Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРИВОДИМОСТИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

ЛИЛЯНА К. ДЕСИМИРОВА

Доказывается теорема о неприводимости многоченов над полем рациональных чисел Q, обобщающая результаты Пойа (1919) и Брауера и Эрлиха (1946).

1. В работе [1] Д. Пойа доказал следующую теорему:

Целочисленный многочлен $p(x)$ степени n неприводим над полем рациональных чисел Q, если для целых чисел $\{x_i\}_1^n = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$, $\{p(x_i)\}_1^n \neq 0$ и $\{|p(x_i)|\}_1^n < G = G_p^* = (d/2)^{n-[n/2]}(n-[n/2])!$, $d = \min\{x_{i+1} - x_i : i = 1, 2 \dots n-1\}$.

В случае $d=1$ эта теорема неоднократно улучшалась. В этой работе показывается, что теорема Д. Пойа остается в силе для

$$G = d^{n-[n/2]}(1 + R/(n-1)d)\frac{(n-1)!}{2^{n-1}([n/2]-1)!} = d^{n-[n/2]}(1 + R/(n-1)d)G_{BE},$$

где $R \geq 0$, а G_{BE} участвует в теореме Брауера и Эрлиха [2].

Вводим следующие обозначения:

а) $d = \min\{x_{i+1} - x_i : i = 1, 2 \dots n-1\}$; $x_{i+1} - x_i = d + t_i$;

б) r — число разниц $x_{i+1} - x_i$, для которых $x_{i+1} - x_i = d$;

в) q — число разниц $x_{i+1} - x_i$, для которых $x_{i+1} - x_i > d$; $q = n - r - 1$;

г) $t = \min\{t_i : t_i > 0,\ i = 1, 2 \dots n\}$;

д) $x_n - x_1 = (n-1)d + T,\ T = \sum_{q=1}^{n-r-1} t_q = (n-r-1)t + R.$

Теорема 1. *Для любого многочлена $f(x) = b_0x^m + \dots + b_m$ выполняются неравенства*

$$\max\{|f(x_i)| : i = 1, 2 \dots, m+1\} \geq |b_0|(d/2)^m m!\, K_1, \tag{1}$$

где $\{x_i\}_1^n = \{x_1 < \dots < x_{m+1}\}$, $d = \min\{x_{i+1} - x_i : i = 1, 2, \dots, m+1\}$ *и*

$$K_1 = (1 + t(m-r)/md + R/md)\prod_{i=1}^{m-r-1}(1 + ti/(r+i)d). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что

$$K_1 \geq K_2 = (1 + t(m-r)/md + R/md)(1 + t/(r+1)d)^{m-r-1} \tag{2'}$$

и

$$K_1 \geq K_3 = 1 + t(m-r)(m-r+1)/2md + R/md. \tag{2''}$$

Непосредственно видно, что $K_s \geq 1$, $s = 1, 2, 3$. Притом, $K_s = 1$ для $s = 1, 2, 3$, тогда и только тогда, когда числа $\{x_i\}_1^n$ эквидистантные. Числа K_s, $s = 1, 2, 3$, введенные с помощью формул (1), (2), здесь названы коррекционными множителями, ввиду того что они вводят коррекции в формулу Д. Пойа из [1].

Теорема 2. *Теорема Пойа из* [1] *остается в силе для*

$$G=G^*=d^{n-[n/2]}(1+R/(n-1)d)G_{BE}\quad\left(G_{BE}=\frac{(n-1)!}{2^{n-1}([n/2]-1)!}\right).$$

Ввиду того что $G_P<G_{BE}\leq G^*$, теорема 2 может являться усилением теоремы Пойа [1] и Брауера и Эрлиха [2].

2. Воспользуемся следующей теоремой Татузава [3, теор. 2]:

Для любого многочлена $f(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$ *и для* $m+1$ *чисел* $x_1<x_2<\cdots<x_{m+1}$ *выполняется неравенство*

(3) $$\max\{|f(x_i)|:i=1,2\ldots m+1\}\geq|b_0|2^{-m}D(1)D(2)\ldots D(m),$$

где $D(k)=\min\{x_{k+i}-x_i:i=1,2,\ldots,m-k+1\}$.

С помощью теоремы Татузава выводим неравенство (1). Так как $(x_{i+k}-x_i)=(x_{i+1}-x_i)+(x_{i+2}-x_{i+1})+\cdots+(x_{i+k}-x_{i+k-1})$, то $\min(x_{k+i}-x_i)=kd$, если $k\leq r$, и $\min(x_{k+i}-x_i)\geq kd+(k-r)t$, если $k>r$. Следовательно, $D(k)=kd$, если $k\leq r$, и $D(k)\geq kd+(k-r)t$, если $k>r$.

Из (3), используя найденные значения $D(k)$, получаем

$$\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,m+1\}\geq|b_0|2^{-m}d^rr!\,(x_{m+1}-x_1)\prod_{i=1}^{m-r-1}[(r+i)d+it]$$

или ввиду д) находим

(4) $$\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,m+1\}\geq|b_0|2^{-m}d^rr![md+(m-r)t+R]\prod_{i=1}^{m-r-1}[(r+i)d+it].$$

Используя (2), из (4) получаем

$$\max\{|f(x_i)|:i=1,2\ldots,m+1\}$$

$$\geq|b_0|2^{-m}d^m\,m!\,(1+(m-r)t/md+R/md)\prod_{i=1}^{m-r-1}[1+it/(r+i)d]=|b_0|(d/2)^mm!\,K_1.$$

Этим теорема 1 доказана.

Ввиду неравенств $1/r+i\leq i/r+i$ $(i=1,2,\ldots,m-r)$ из (2) следует (2′). Из (2), используя очевидное неравенство для $a\geq b>0$, $x\geq0$, $y\geq0:(a+x)(b+y)\geq b(a+x+y)$, получаем (2″).

Лемма 1. *Для любого многочлена* $f(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$ *и для* n *чисел* $x_1<x_2<\cdots<x_n$ *при введенных обозначениях и* $n-[n/2]\leq m<n$, *выполняется неравенство*

(5) $$\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}\geq|b_0|(d/2)^m(2m+1-n)!\,(2m+3-n)\ldots(n-3)(n-1+R/d).$$

Доказательство. Пусть $s=n-m$. Чтобы применить теорему 1, нам нужны $m+1$ чисел, которые можно подобрать произвольным образом из чисел $\{x_i\}_1^n$, притом, $s-1$ из этих чисел являются лишними. Следовательно, можно так выбрать $m+1$ чисел $\{\xi_j\}_1^{m+1}$ из $\{x_i\}_1^n$, что для всех разностей $\xi_{j+1}-\xi_j$ имело место неравенство $\xi_{j+1}-\xi_j\geq d$, $j=1,2,\ldots,m$, а для $s-1$ из этих разностей выполнялось неравенство $\xi_{j+1}-\xi_j\geq2d$, т. е. можно считать, что для $s-1$ из этих разностей соответствующее $t_i\geq d$.

Применяя к числам $\{\xi_j\}_1^{m+1}$ теорему 1, имея в виду очевидное неравенство $\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}\geqq\max\{|f(\xi_j)|:j=1,2,\ldots,m+1\}$, получаем

$$\max\{|f(\xi_j)|:j=1,2\ldots m+1\}$$
$$\geqq|b_0|(d/2)^m(2m-n+1)!\,(n-1+R/d)\prod_{i=1}^{n-m-1}(2m-n+1+2i).$$

Этим неравенство (5) доказано.

Лемма 2. *Если $f(x)$ — целочисленный многочлен степени m, $x_1<x_2,<\cdots<x_n$ — целые числа и $n-[n/2]\leqq m<n$, выполняется неравенство*

$$\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}\geqq(d/2)^{n-[n/2]}(n-1)!!\,(1+R/(n-1)d)$$
$$=d^{n-[n/2]}\frac{(n-1)!}{2^{n-1}([n/2]-1)!}(1+R/(n-1)d)=G^*_{BE}(1+R/(n-1)d). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $L(m,n)$ обозначить выражение

$$L(m,n)=(d/2)^m(2m+1-n)!\,(2m+3-n)\ldots(n-3)(n-1+R/d).$$

Покажем, что $\min L(m,n)=L(n-[n/2],n)$. Для $m_1=m+1$ получаем

$$L(m+1,n)=(d/2)^{m+1}(2m+3-n)!\,(2m+5-n)\ldots(n-3)(n-1+R/d)$$
$$=L(m,n)d(2m+2-n)/2,$$

так как $d(2m+2-n)\geqq2(n-[n/2])+2-n\geqq2$. Следовательно,

$$L(m,n)\geqq L(n-[n/2],\ n)=(d/2)^{n-[n/2]}(2(n-[n/2])+1-n)!\ldots(n-3)(n-1+R/d)$$
$$=(d/2)^{n-[n/2]}(n-1)!!\,(1+R/(n-1)d).$$

Тогда из леммы 1 для $f(x)$ следует

$$\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}$$
$$\geqq\max\{|f(\xi_j)|:j=1,2,\ldots,m+1\}\geqq(d/2)^{n-[n/2]}(n-1)!!\,(1+R/(n-1)d)=G^*.$$

Пользуясь равенством $\frac{(n-1)!!}{2^{n-[n/2]}}=\frac{(n-1)!}{2^{n-1}([n/2]-1)!}$ и целочисленности $f(x)$, получаем (6). Этим доказательство леммы 2 закончено.

Теорема 2. *Целочисленный многочлен $p(x)$ степени n неприводим над полем рациональных чисел Q, если для n целых чисел $x_1<x_2<\cdots<x_n$, $d=\min\{x_{i+1}-x_i:i=1,2,\ldots,n-1\}$, $\{p(x_i)\}_1^n\neq0$, и $\{|p(x_i)|\}_1^n<G^*$.*

Доказательство. Предположим, что $p(x)=f(x).g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — целочисленные многочлены, притом пусть степень m многочлена $f(x)$ удовлетворяет неравенства $n-[n/2]\leqq m<n$. Из сделанного предположения следует

$$\max\{|p(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}\geqq\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\},$$

так как $p(x_i)=f(x_i).g(x_i)$ и $|p(x_i)|=|f(x_i)|.|g(x_i)|\geqq|f(x_i)|$. Вследствие (6) имеем $\max\{|f(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}\geqq G^*_{BE}(1+R/(n-1)d)G^*$, т. е. получаем неравенство $\max\{|p(x_i)|:i=1,2,\ldots,n\}\geqq G^*$. Однако по условию $\{|p(x_i)|\}_1^n<G^*$ для всех $\{x_i\}_1^n$. Мы получили противоречие, теорема 2 доказана.

В частном случае $x_{i+1}=x_i+1$, $i=1,2,\ldots,n$ получаем $G^*=G_{BE}$. Следовательно, теорема 2 усиливает теорему Брауера и Эрлиха из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Pólya. Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie. Jahresber. *Deusch. Math.-Ver.*, **28**, 1919, 31—40.
2. A. Brauer, G. Ehrlich. On the irreducibility of certain polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52, 1946, 844—856.
3. T. Tatuzawa. Über die Irreaduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15**, 1932, 253—254.

Высший химико-технологический институт, София

Поступила 7. 10. 1978