Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О m-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЕЙ МНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

АНГЕЛ В. ДИЧЕВ

В настоящей работе показано, что существуют сильно неотделимые подмножества E и F множества N натуральных чисел, для которых любое множество M, удовлетворяющее соотношению $F \subseteq M \subseteq N \setminus E$, не является m-эквивалентным множеству M^2. Установлено, что если подмножество M множества натуральных чисел является m-эквивалентным множеству M^2, то множество M^k является m-эквивалентным множеству M^l, где k, l — произвольные положительные натуральные числа.

Для доказательства утверждения, что если φ допустима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $C_1, \ldots, C_m$, то φ вычислима относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; $\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_m$ [1], необходимо показать, что существует рекурсивно перечислимое подмножество F множества натуральных чисел, не являющееся m-эквивалентным множеству F^2 [2], и что существует подмножество M множества натуральных чисел, не являющееся m-эквивалентным множеству M^2 и имеющее рекурсивно перечислимое дополнение.

Напомним некоторые определения. Пусть M — подмножество множества натуральных чисел и k, l — положительные натуральные числа. Говорим, что M^k m-сводимо к множеству $M^l (M^k = mM^l)$ [2], если существует k-местная рекурсивная функция f, такая, что

$$i_1 \in M \& \ldots \& i_k \in M \longleftrightarrow f(i_1, \ldots, i_k) \in \{I^l(y_1, \ldots, y_l) \mid y_1 \in M \& \ldots \& y_l \in M\}$$

для всех натуральных чисел $i_1, \ldots i_k$, где I^l — инъективная примитивно рекурсивная функция. Говорим, что M^k m-эквивалентно $M^l (M^k \equiv mM^l)$ тогда и только тогда, когда $M^k \leq mM^l$ и $M^l \leq mM^k$. Далее, рекурсивно перечислимые множества натуральных чисел E, F называются сильно неотделимыми, если выполнены следующие условия: а) $E \cap F = \Phi$; б) дополнение множества $E \cup F$ бесконечно; в) для любого рекурсивно перечислимого подмножества α множества натуральных чисел из $\alpha \cap E = \varnothing$ следует, что $\alpha \setminus F$ конечно, и из $\alpha \cap F = \varnothing$ следует, что $\alpha \setminus E$ конечно [3; 4]. В статье показано, что существуют довольно много подмножеств множества натуральных чисел, не являющихся m-эквивалентными своему квадрату. Этот результат является следствием следующей основной теоремы:

Теорема. *Существуют сильно неотделимые подмножества E и F множества натуральных чисел, для которых любое множество M, удовлетворяющее соотношению $F \subseteq M \subseteq N \setminus E$, не является m-эквивалентным множеству M^2.*

Для доказательства этой теоремы нам будут необходимы две леммы.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 43—48.

Лемма 1. *Пусть E_1 и E_2 являются сильно неотделимыми, множество α рекурсивно перечислимо, множество A бесконечно и содержится в множестве $N\setminus(E_1\cup E_2)$, а f — рекурсивная функция, для которой $f(A)\subseteq\alpha$. Тогда существует натуральное число j из E_1, для которого $f(j)\in\alpha$.*

Доказательство леммы 1. Допустим, что множество $\{j\,|\,j\in E_1\&f(j)\in\alpha\}$ пусто и положим $\alpha_1=f^{-1}(\alpha)$. Очевидно, что множество α_1 рекурсивно перечислимо и $\alpha_1\cap E_1=\varnothing$. С другой стороны, $A\subseteq\alpha_1$, т. е. $\alpha_1\setminus E_2$ бесконечно. Это противоречит сильной неотделимости E_1 и E_2, чем и доказана лемма 1.

Лемма 2. *Пусть E и F являются сильно неотделимыми, множество M удовлетворяет соотношению $F\subseteq M\subseteq N\setminus E$ и $M^2\leq mM$. Тогда множество $N\setminus(M\cup E)$ является бесконечным.*

Доказательство. Пусть f — такая двухместная рекурсивная функция, что $\forall_i\forall_j(i\in M\&j\in M\longleftrightarrow f(i,j)\in M)$ (в силу [2] существование такой функции вытекает из соотношения $M^2\leq mM$). Допустим, что $N\setminus(M\cup E)$ — конечное множество. Положим $E_1=F$ и $E_2=E\cup(N\setminus(M\cup E))$. Очевидно, что E_1 и E_2 — сильно неотделимые множества и $E_2=N\setminus M$. Если $i\in M$, то $j\in M\longleftrightarrow f(i,j)\in M$ для каждого натурального j, и, следовательно, множество $\bar{\alpha}_i=\{f(i,j)\,|\,j\in E_1\}$ содержится в множестве M. Так как E_1 и E_2 — рекурсивно неотделимые множества, множество $\bar{\alpha}_i$ бесконечно. Следовательно, множество $\bar{\alpha}_i\cap E_1$ не пусто, так как $N\setminus(E_1\cup E_2)$ — имунное множество. С другой стороны, для фиксированного i, принадлежащего множеству $N\setminus M$, выполнено $f(i,j)\in N\setminus M$ для каждого натурального j. Тогда множества M и $\{i\,|\,\exists j(j\in E_1\&f(i,j)\in E_1)\}$ совпадают, т. е. $N\setminus E_2$ рекурсивно перечислимо, что невозможно вследствие рекурсивной неотделимости E_1 и E_2. Противоречие показывает, что множество $N\setminus(M\cup E)$ бесконечное. Этим лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. Предположим, что Φ_2 является универсальной функцией для двухместных частично рекурсивных функций и G — график Φ_2, т. е. $G=\{(x,y_1,y_2,z)\,|\,\Phi_2(x,y_1,y_2)=z\}$.

Пусть X, Y_1, Y_2, Z — одноместные рекурсивные функции, такие, что $G=\{(X(t),Y_1(t),Y_2(t),Z(t))\,|\,t\in N\}$.

Определим частичную функцию u следующим образом:

$$u(0)=\mu t[Y_1(t)>4X(t)\&Y_2(t)>4X(t)\&Z(t)>4X(t)\&Y_1(t)\neq Y_2(t)],$$

$$u(n+1)=\mu t[Y_1(t)>4X(t)\&Y_2(t)>4X(t)\&Z(t)>4X(t)\&Y_1(t)\neq Y_2(t)\&,$$

$$\prod_{i=0}^{n}|Y_1(t)-Y_1(u(i))|\neq0\&\prod_{i=0}^{n}|Y_1(t)-Y_2(u(i))|\neq0\&\prod_{i=0}^{n}|Y_1(t)-Z(u(i))|\neq0\&,$$

$$\prod_{i=0}^{n}|Y_2(t)-Y_1(u(i))|\neq0\&\prod_{i=0}^{n}|Y_2(t)-Y_2(u(i))|\neq0\&\prod_{i=0}^{n}|Y_2(t)-Z(u(i))|\neq0\&,$$

$$\prod_{i=0}^{n}|Z(t)-Y_1(u(i)|\neq0\&\prod_{i=0}^{n}|Z(t)-Y_2(u(i))|\neq0\&\prod_{i=0}^{n}|Z(t)-Z(u(i))|\neq0\&,$$

$$\prod_{i=0}^{n}|X(t)-X(u(i))|\neq0].$$

Очевидно, что u — частично рекурсивная функция. Докажем, что u — всюду определенная функция, т. е. что u является рекурсивной функцией. Установим это индукцией относительно определения u. Сначала покажем, что $!\, u(0)$.

Пусть $I_1^2(y_1, y_2)=y_1$ для каждых натуральных y_1 и y_2. Существует такое x, что $\forall y_1 \forall y_2 (I_1^2(y_1, y_2=\Phi_2(x, y_1, y_2))$, так как I_1^2 — примитивно рекурсивная функция. Тогда $(x, 4x+1, 4x+2, 4x+1) \in G$ и существует натуральное число t, для которого $X(t)=x$, $Y_1(t)=4x+1$, $Y_2(t)=4x+2$, $Z(t)=4x+1$. Следовательно, существует t, для которого $Y_1(t)>4x(t)$, $Y_2(t)>4X(t)$, $Z(t)>4X(t)$ и $Y_1(t)\neq Y_2(t)$. Так как X, Y_1, Y_2, Z — всюду определенные функции, получаем, что $!\, u(0)$.

Допустим, что $!\, u(0), \ldots, !\, u(n)$. Покажем, что $!\, u(n+1)$. Действительно, из теоремы Райса—Успенского следует, что существуют бесконечно много натуральных чисел x, для которых $I_1^2(y_1, y_2)=\Phi_2(x, y_1, y_2)$ для любых натуральных y_1, y_2. Пусть x — такое, что $x\neq X(u(i))$, $i=0, \ldots, n$ и $\forall y_1 \forall y_2 (I_1^2(y_1, y_2)$ $=\Phi_2(x, y_1, y_2))$. Обозначим через $y \max\{x, Y_1(u(0)), \ldots, Y_1(u(n)), Y_2(u(0)), \ldots,$ $Y_2(u(n)), Z(u(0)), \ldots, Z(u(n))\}$. Тогда $(x, 4y+1, 4y+2, 4y+1) \in G$ и существует натуральное число t, для которого $X(t)=x$, $Y_1(t)=4y+1$ $Y_2(t)=4y+2$, $Z(t)=4y+1$. Следовательно, существует t, для которого

$$Y_1(t)>4X(t),\ Y_2(t)>4X(t),\ Z(t)>4X(t),\ Y_1(t)\neq Y_2(t),$$

$$\prod_{i=0}^{n} |Y_1(t)-Y_1(u(i))|\neq 0,\ \prod_{i=0}^{n} |Y_1(t)-Y_2(u(i))|\neq 0,\ \prod_{i=0}^{n} |Y_1(t)-Z(u(i))|\neq 0,$$

$$\prod_{i=0}^{n} |Y_2(t)-Y_1(u(i))|\neq 0,\ \prod_{i=0}^{n} |Y_2(t)-Y_2u(i))|\neq 0,\ \prod_{i=0}^{n} |Y_2(t)-Z|u(i))|\neq 0,$$

$$\prod_{i=0}^{n} |Z(t)-Y_1(u(i))|\neq 0,\ \prod_{i=0}^{n} |Z(t)-Y_2(u(i))|\neq 0,\ \prod_{i=0}^{n} |Z(t)-Z(u(i))|\neq 0,$$

$$\prod_{i=0}^{n} |X(t)-X(u(i))|\neq 0.$$

В силу того, что X, Y_1, Y_2, Z — всюду определенные, следует, что $!\, u(n+1)$. Этим доказано, что u — рекурсивная функция.

Далее определим рекурсивные функции g_0, g_1 и g_2 при помощи равенств:

$$g_0(i)=\begin{cases} Y_1(u(i)), & \text{если} \quad Z(u(i))\neq Y_1(u(i)), \\ Y_2(u(i)), & \text{если} \quad Z(u(i))=Y_1(u(i)), \end{cases}$$

$$g_1(i)=\begin{cases} Y_2(u(i)), & \text{если} \quad Z(u(i))\neq Y_1(u(i)), \\ Y_1(u(i)), & \text{если} \quad Z(u(i))=Y_1(u(i)). \end{cases}$$

$$g_2(i)=Z(u(i)).$$

Пусть $E=\operatorname{Range} g_0$, $F_1=\operatorname{Range} g_1$ $F_2=\operatorname{Range} g_2$. Тогда E, F_1, F_2 являются рекурсивно перечислимыми множествами.

Сначала покажем, что $g_0(i)\neq g_1(j)$ и $g_0(i)\neq g_2(j)$ для произвольных натуральных чисел i, j. Действительно, по определению функции u, справедливо неравенство $Y_1(u(i))\neq Y_2(u(i))$. Далее, когда $Z(u(i))\neq Y_1(u(i))$, имеет место $g_0(i)=Y_1 u(i))\neq Y_2(u(i))=g_1(i)$ и $g_0(i)=Y_1(u(i))\neq Z(u(i))=g_2(i)$, а в случае, когда $Y_1(u(i))=Z(u(i))$, выполняется $g_0(i)=Y_2(u(i))\neq Y_1(u(i))=g_1(i)=g_2(i)$. Таким образом, если $i=j$, то $g_0(i)\neq g_1(j)$ и $g_0(i)\neq g_2(j)$. Предположим теперь, что

$i \neq j$. Тогда либо $i<j$, либо $j<i$. Рассмотрим только случай, когда $i<j$ (случай, когда $j<i$, рассматривается аналогичным образом). Можно записать $j=n+1$, где $i \leq n$. Имеем $g_0(i)=Y_{l_1}(u(i))$ и $g_1(j)=Y_{l_2}(u(j))$, где $l_1, l_2 \in \{1, 2\}$ и $l_1=1$ только тогда, когда $Z(u(i)) \neq Y_1(u(i))$, а $l_2=2$ тогда и только тогда, когда $Z(u(j)) \neq Y_1(u(j))$. По определению, $u(n+1)=u(j)$, $Y_{l_2}(u(n+1)) \neq Y_{l_1}(u(i))$ и $Z(u(n+1)) \neq Y_{l_1}(u(i))$, т. е. $g_0(i) \neq g_1(j)$, $g_0(i) \neq g_2(j)$.

Из доказанного можно заключить, что $E \cap F_1 = \emptyset$ и $E \cap F_2 = \emptyset$. Далее докажем, что множество $N \setminus (E \cup F_1 \cup F_2)$ бесконечно. Для этого достаточно установить, что для произвольного натурального числа n множество $N_{4n+1} \cap (N \setminus (E \cup F_1 \cup F_2))$ содержит по крайней мере $n+1$ различных элементов, где $N_k = \{m \mid m \in N \,\&\, m<k\}$. Для доказательства последнего утверждения достаточно показать, что каждое, из множеств $E \cap N_{4n+1}$, $F_1 \cap N_{4n+1}$ $F_2 \cap N_{4n+1}$, имеет не более n элементов для произвольного натурального n. Проверим, например, что множество $E \cap N_{4n+1}$ содержит не более n элементов. Допустим, что $E \cap N_{4n+1}$ содержит по крайней мере $n+1$ элементов для заданного n. Пусть эти элементы — $Y_{l_0}(u(i_0)), \ldots, Y_{l_n}(u(i_n))$. Тогда справедливы неравенства $X(u(i_p)) \neq X(u(i_q))$ при $p \neq q$ и $0 \leq p, q \leq n$. Предположим для определенности, что $X(u(i_0)) < \cdots < X(ui_n))$. Следовательно, $X(u(i_n)) \geq n$. Из неравенства $Y_{l_n}(u(i_n)) > 4X(u(i_n)) \geq 4n$ получаем, что $Y_{l_n}(u(i_n)) \notin N_{4n+1}$, так как $Y_{l_n}(u(i_n)) > 4n$. Противоречие получено из допущения, что множество $N_{4n+1} \cap E$ содержит по крайней мере $n+1$ различных элементов для данного натурального n. Этим мы установили, что множество $N_{4n+1} \cap E$ имеет не более n элементов.

С помощью аналогичных рассуждений нетрудно проверить, что аналогичное утверждение имеет место и F_1 и F_2.

Пусть $F = F_1 \cup F_2$. Очевидно, что множество F — рекурсивно перечислимое и $F \cap E = \emptyset$. Теперь покажем, что множества E и F являются сильно неотделимыми. Ранее установлено, что множество $N \setminus (E \cup F)$ — бесконечное. Остается доказать, что если множества α и β рекурсивно перечислимы, $\alpha \cap E = \emptyset$ и $\beta \cap F = \emptyset$, то $\alpha \setminus F$ и $\beta \setminus E$ конечны. Мы докажем только, что $\alpha \setminus F$ — конечное. Установление конечности множества $\beta \setminus E$ проводится аналогичным способом.

Предположим, что α — рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел, такое, что $\alpha \cap E = \emptyset$, и допустим, что множество $\alpha \setminus E$ — бесконечное. Определим следующую частично рекурсивную функцию f': $\mathrm{Dom}\, f' = \alpha^2$ и $\forall i \forall j (i \in \alpha \,\&\, j \in \alpha \to f'(i, j) = i)$. Существует натуральное число x', такое, что $f'(i, j) = \Phi_2(x', i, j)$ для любых натуральных i, j. Если допустим, что $x' = X(u(n))$ для некоторого n, то $Y_1(u(n)) \in \alpha$, $Y_2(u(n)) \in \alpha$, $Y_1(u(n)) \neq Y_2(u(n))$ и $g_0(n) = Y_2(u(n)) \in E$, т. е. $Y_2(u(n)) \in \alpha \cap E$ и, значит, $\alpha \cap E \neq \emptyset$, что противоречит допущению. Следовательно, $x' \neq X(u(n))$ для каждого n из N. С другой стороны, существуют такие a_1 и a_2 из $\alpha \setminus F$, что $a_1 \neq a_2$, $a_1 > 4x'$ и $a_2 > 4x'$. Тогда для некоторого натурального числа t' имеем $X(t') = x'$, $Y_1(t') = a_1$, $Y_2(t') = a_2$, $Z(t') = a_1$, так как $(x', a_1, a_2, a_1) \in G$. Далее, $x' \neq X(u(n))$ для каждого натурального n и $a_1, a_2 \notin E \cup F$. Следовательно, $u(n') = t'$ для некоторого n' и, значит, $x' = X(u(n'))$ для этого n'. Противоречие получено вследсвие допущения, что $\alpha \setminus F$ бесконечно. Следовательно, $\alpha \setminus F$ — конечное.

Пусть множество M удовлетворяет условию $F \subseteq M \subseteq N \setminus E$. Согласно [2] множество M является m-эквивалентным множеству M^2 тогда и только тогда, когда существует двухместная рекурсивная функция f, такая, что

$\forall i \forall j(i \in M \,\&\, j \in M \longleftrightarrow f(i, j) \in M)$. Допустим, что существует рекурсивная функция f с этим свойством. Тогда $N \diagdown (M \cup E)$ — бесконечное множество, в силу леммы 2. Так как функция f рекурсивна, существует натуральное число x, такое, что для любых натуральных чисел i, j выполнено $f(i, j) = \Phi_2(x, i, j)$. Если для некоторого натурального числа n имеет место равенство $x = X(u(n))$, то получаем $\Phi_2(x, Y_1(u(n)), X_2(u(n))) = Z(u(u))$ и $Z(u(n)) \in F \subseteq M$, откуда следует, что $Y_1(u(n)), Y_2(u(n)) \in M$ и, значит, $g_0(n) \in M$. Однако $M \subseteq N \diagdown E$, а $g_0(n) \in E$. Получаем, таким образом, что $g_0(n) \in (N \diagdown E) \cap E$. Этим противоречием доказано, что $x \neq X(u(n))$ для каждого натурального n.

Пусть P_1 — множество тех и только тех $i \in N \diagdown (M \cup E)$, которые удовлетворяют неравенству $i > 4x$. Из бесконечности множества $N \diagdown (M \cup E)$ следует, что P_1 — бесконечное множество. Пусть $\{p_1, \ldots, P_s\} = N_{4x+1} \cap (N \diagdown (M \cup E))$, и допустим, что для каждого i из P_1 и для каждого j из множества $N \diagdown (M \cup E \cup \{p_1, \ldots, p_s\})$, $j \neq i$, имеет место $f(i, j) \in \{p_1, \ldots, p_s\} \cup E$. Согласно лемме 1, для каждого i из P_1 существует $j \in F$, для которого $f(i, j) \in \{p_1, \ldots, p_s\} \cup E$. Тогда множество $\beta = \{i \mid \exists j (\in F \,\&\, f(i, j) \in \{p_1, \ldots, p_s\} \cup E)\}$ рекурсивно перечислимо, $\beta \cap F = \varnothing$ и $P_1 \subseteq \beta$, т. е. $\beta \diagdown E$ — бесконечное. Это противоречит сильной неотделимости множеств E и F. Следовательно, существуют $i \in P_1$ и $j \in N \diagdown (M \cup E \cup \{p_1, \ldots, p_s\})$, $j \neq i$, для которых $f(i, j) \in N \diagdown (M \cup E \cup \{p_1, \ldots, p_s\})$. Для таких натуральных i, j существует натуральное t, для которого $X(t) = x$, $Y_1(t) = i$, $Y_2(t) = j$, $Z(t) = f(i, j)$, так как $(x, i, j, f(i, j)) \in G$. Тогда должно существовать натуральное n, для которого $u(n) = t$, вследствие того, что $x \neq X(u(n))$ для каждого натурального n и $j \neq i$ и $i, j, f(i, j) \notin E \cup F \cup N_{4x+1}$. Мы получили противоречие ($x = X(u(n))$ для некоторого n) вследствие допущения того, что некоторое множество M, удовлетворяющее условию $F \subseteq M \subseteq N \diagdown E$, является m-эквивалентным множеству M^2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Существуют $2^{\aleph_0}$ подмножества M множества натуральных чисел, для которых множество M не является m-эквивалентным множеству M^2.*

Доказательство. Пусть E и F — такие сильно неотделимые множества, существование которых установили в теореме. Тогда $N \diagdown (E \cup F)$ есть бесконечное множество, и поэтому множество $\mathscr{P}(N \diagdown (E \cup F))$, состоящее из всех его подмножеств, имеет мощность $2^{\aleph_0}$, а каждое множество M из $\{F \cup M_1 \mid M_1 \in \mathscr{P}(N \diagdown (E \cup F))\}$ удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, не является m-эквивалентным своему квадрату.

Следствие 2. *Существует рекурсивно перечислимое множество M, которое не является m-эквивалентным множеству M^2.*

Доказательство. Пусть E и F — такие сильно неотделимые множества, существование которых доказано в теореме. Тогда, если $M = F$, то M не является m-эквивалентным M^2.

Следствие 3. *Существует рекурсивно перечислимое множество M_1, дополнение $N \diagdown M_1$ которого не является m-эквивалентным множеству $(N \diagdown M_1)^2$.*

Доказательство. Пусть E и F — такие сильно неотделимые множества, существование которых доказано в теореме. Тогда, если $M_1 = E$, то дополнение $N \diagdown M_1$ не является m-эквивалентным множеству $(N \diagdown M_1)^2$.

Лемма 3. *Если множество M содержится в множестве натуральных чисел и k, l — положительные натуральные числа, для которых $k \leq l$, то $M^k \leq mM^l$.*

Доказательство. Если множество M пусто, каждая рекурсивная функция f m-сводит M^k к M^l. Предположим, теперь, что множество М не пусто. Если $k=l$, функция I^l m-сводит множество M^k к множеству M^l, а если $k<l$ и $a_1, \ldots, a_{l-k} \in M$, то функцня f определена при помощи равенства $f(p)=I^l(p, a_1, \ldots, a_{l-k})$ m-сводит M^k к M^l.

Лемма 4. *Пусть M — некоторое множество натуральных чисел, для которого $M_2 \leq mM$. Тогда для любых положительных натуральных чисел k и l выполнено $M^{l+k} \leq mM^k$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией относительно l. Пусть f — двухместная рекурсивная функция, для которой $i \in M \,\&\, j \in M \leftrightarrow f(i, j) \in M$ для любых натуральных i, j. Очевидно, что функция g определена при помощи равенства $g(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})=I^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, f(x_k, x_{k+1}))$ m-сводит M^{k+1} к M^k. Допустим, что соотношение $M^{l+k} \leq mM^k$ верно для некоторого $l \geqq 1$. Пусть f_1—$(k+l)$ — местная рекурсивная функция, которая m-сводит M^{l+k} к M^k и

$$f_2(x_1, \ldots, x_{k+l}, x_{k+l+1})=f_1(x_1, \ldots, x_{k+l-1}, f(x_{k+l}, x_{k+l+1})).$$

Очевидно, что f_2 m-сводит M^{k+l+1} к M^k.

Предложение. *Если M — подмножество множества натуральных чисел и $M^2 \equiv mM$, то $M^k \equiv mM^l$ для любых положительных натуральных чисел k и l.*

Доказательство. Действительно, если $k=l$, из леммы 3 получаем $M^k \leq mM^l$ и $M^l \leq mM^k$, и предложение доказано. Если $k \neq l$, то либо $k<l$, либо $l<k$. Пусть для определенности $k<l$ и $l=l_1+k$, где $l_1 \geqq 1$. Согласно лемме 4, $M^l=mM^k$ и, согласно лемме 3, $M^k \leq mM^l$, откуда следует, что $M^k \equiv mM^l$.

Проблема 1. Существует ли (рекурсивно перечислимое) множество M, для которого $M^k \equiv Mm^l$ для некоторых различных положительных натуральных k и l, но $M^2 \not\equiv mM$?

Проблема 2. Существует ли пара сильно неотделимых множеств E и F, такая, что $E \equiv mE^2$ или $F^2 \equiv mF$?

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Дичев. Вычислимость в смысле Московакиса и ее связь с частичной рекурсивностью через нумерации. *Сердика* **7**, 1981, 117—130.
2. А. В. Дичев. Пример на множество M от естествени числа, което не е m-эквивалентно на M^2. В: *Математика и математическо образование*. София, 1981, 137—140.
3. А. А. Мучник. Об отделимости рекурсивно перечислимых множеств. *Доклады АН СССР*, **109**, 1956, 29—32.
4. А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва, 1965.

Высший педагогический институт
9700 Шумен Болгария

Поступила 18. 2. 1981
В переработанном виде 25. 11. 1981