Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ПРИМЕР 16-ВЕРШИННОГО (3,3)-ГРАФА РАМСЕЯ С КЛИКОВЫМ ЧИСЛОМ 4

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

Рассматриваются только обыкновенные графы. (3,3)-графом Рамсея называется такой граф, который в любой двуцветной раскраске ребер содержит монохроматический треугольник. т. е. треугольник, все ребра которого имеют одинаковый цвет. В [5] была поставлена следующая задача: найти минимальное натуральное число n, такое, что существует (3,3)-граф Рамсея с n вершинами, который не содержит полный граф с 5 вершинами. Ирвинг [6] доказал, что $n \leqq 18$. В [8] нами приведена схема доказательства неравенства $n \leqq 16$. В настоящей статье изложено подробно новое, более короткое доказательство этого неравенства.

1. Введение. Под обыкновенным графом будем понимать упорядоченную пару $G=(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторое подмножество множества всех 2-элементных подмножеств $V(G)$. Будем рассматривать только обыкновенные графы. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$, будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ называется p-кликой, если любые две из них смежны. Максимальное число вершин графа G, составляющих клику, будем называть кликовым числом графа G.

Определение. (3, 3)-*графом Рамсея называется такой граф, который в любой двуцветной раскраске ребер содержит монохроматический треугольник, т. е. треугольник, все ребра которого имеют одинаковый цвет.*

Цель настоящей статьи построить 16-вершинный (3,3)-граф Рамсея с кликовым числом 4.

Хорошо известно, что если граф имеет кликовое число хотя бы 6, тогда он является (3, 3)-графом Рамсея. Эрдёш и Хайнал в [1] поставили вопрос о существовании (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом меньше 6. Впервые такой граф был построен Дж. ван Линтом. Этот граф содержится в [5]. Позже в [2] Грахам построил 8-вершинный (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом 5. Этот пример является оптимальным: в [3] Лин доказал, что граф Грахама является единственным (3, 3)-графом Рамсея с не более, чем 8-ью вершинами, который не содержит 6 клику. Поша впервые доказал, что существует (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом 4, а позже Шойблев [4] построил такой граф с 42 вершинами. В [5] Грахам и Спенсер построили 23-вершинный (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом 4, а в [6] Ирвинг уменьшил число вершин такого графа до 18. Последний результат в этом направлении получен авторами в [8], где построен 16-вершинный (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом 4. В [8], однако, нет под-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 73—77.

робных доказательств. В настоящей работе мы заполняем этот пробел. Прежде чем перейти к построению этого графа, отметим, что в [3] Лин доказал, что не существует (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом 4 и меньше, чем 10-ью вершинами, а в [9] доказано, что не существует такого графа и с 10 вершинами. Последний результат, который мы хотим упомянуть, получен Фолкманом в [7], где доказано, что существует (3, 3)-граф Рамсея с кликовым числом 3. Пока нет хорошей оценки для минимального числа вершин таких графов.

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. В дальнейшем будем пользоваться следующей операцией над графами [11]:

Определение. *Под соединением графов G_1 и G_2 будем понимать граф G для которого:*

1. $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$;
2. $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup E'$, *где E' состоит из всех 2-элементных множеств $[v_1, v_2]$, $v_1\in V(G_1)$, $v_2\in V(G_2)$.*

Соединение графов G_1 и G_2 будем обозначать через G_1+G_2.

Через $G-v$, $v\in V(G)$ будем обозначать подграф графа G, получающийся удалением вершины v и всех инцидентных ей ребер.

2. Конструкция. Через Γ обозначим граф, заданный на рис. 1. Он составлен из трех простых 5-циклов: $C^{(1)}=(A, C_1^{(1)}, B, C_2^{(1)}, C_3^{(1)})$, $C^{(2)}=(A, C_1^{(2)}, B$ $C_2^{(2)}, C_3^{(2)})$ и $C^{(3)}=(A, C_1^{(3)}, B, C_2^{(3)}, C_3^{(3)})$. Через L обозначим граф, заданный на рис. 2. При помощи графов Γ и L строим граф F следующим образом:

1. $V(F)=V(\Gamma)\cup V(L)$;
2. $E(F)=E(\Gamma)\cup E(L)\cup E'$, где E' состоит из всех ребер, соединяющих неизолированные вершины графа $L-c_i$ со всеми вершинами 5-цикла $C^{(i)}$, $i=1, 2, 3$.

Через G_1, G_2 и G_3 обозначим графы заданные соответственно на рисунках 3, 4 и 5. Понятно, что граф F получается из графов G_1, G_2 и G_3 отождествлением одноименных вершин.

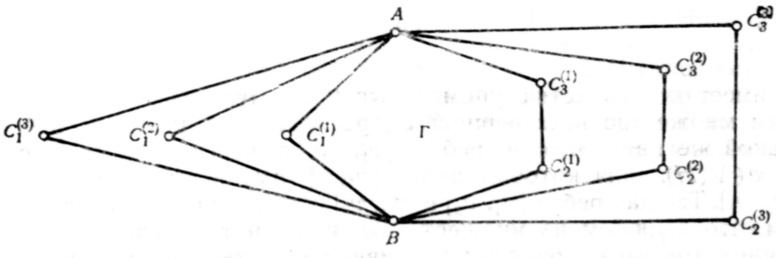

Рис. 1

3. О свойствах графа F. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Граф F является (3,3)-графом Рамсея с кликовым числом 4.*

Для доказательства теоремы нам будет нужна следующая:

Лемма. *Пусть граф $T=L_2+H$, где L_2 — простая цепь длины 2, не является (3,3)-графом Рамсея. Если граф T обладает двуцветной* *раскраской ребер без монохроматических треугольников, такой, что ребра L_2 оцвечены различно, тогда хроматическое число графа H удовлетворяет неравенству $\chi(H) \leq 2$.*

Доказательство леммы. Пусть $V(L_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $E(L_2) = \{[v_1, v_2], [v_1, v_3]\}$. Рассмотрим какую нибудь двуцветную раскраску ребер графа T,

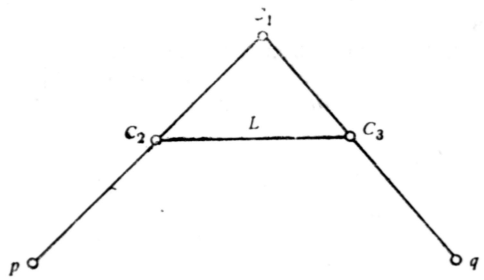

Рис. 2

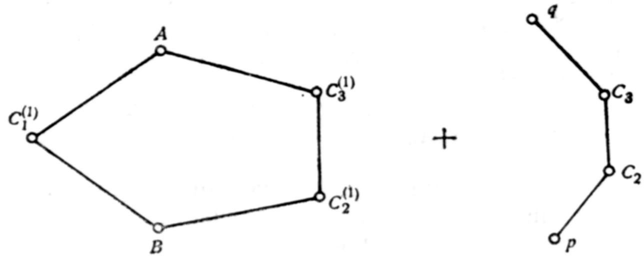

Рис. 3

которая имеет все свойства, упомянутые в формулировке леммы. Через M обозначим множество всех вершин v графа H, для которых ребро $[v_1, v]$ имеет такой же цвет, что и ребро $[v_1, v_2]$, а через N — множество всех вершин $v \in V(H)$, для которых ребер $[v_1, v]$ имеет такой же цвет, что и ребро $[v_1, v_3]$. Так как ребра $[v_1, v_2]$ и $[v_1, v_3]$ оцвечены различно, то $M \cap N = \emptyset$, Покажем, что в любом из множеств M и N нет смежных вершин. Этим лемма будет доказана. Допустим противное и пусть, например, множество M, содержит смежные вершины a и b. Из определения множества M следует, что ребра $[v_1, a]$, $[v_1, b]$ и $[v_1, v_2]$ имеют одинаковый цвет. Так как рассматриваемая раскраска ребер графа T не содержит монохроматических треугольников, то хотя бы одно из ребер $[a, b]$, $[a, v_2]$, $[b, v_2]$ имеет такой же цвет, что и ребро $[v_1, v_2]$. Из этого следует, что один из треугольников $[v_1, a, b]$, $[v_1, a, v_2]$, $[v_1, b, v_2]$ является монохроматическим. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказетальство теоремы. 1. Граф F является (3,3)-графом Рамсея. Допустим противное и рассмотрим произвольную двуцветную раскраску ребер графа F без монохроматических треугольников. Эта раскраска порождает двуцветную раскраску ребер подграфов G_1, G_2 и G_3 без монохроматических треугольников. Согласно доказанной лемме ребра $[c_1, c_2]$, $[c_1, c_3]$ и $[c_2, c_3]$ имеют одинаковый цвет, что противоречит сделанному допущению.

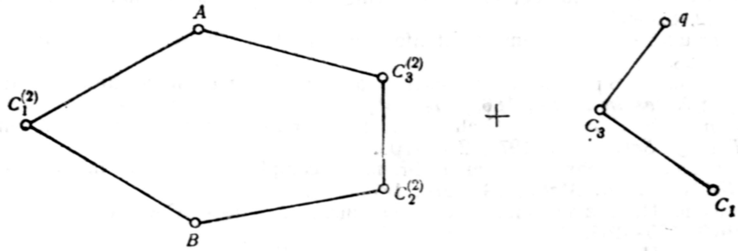

Рис. 4

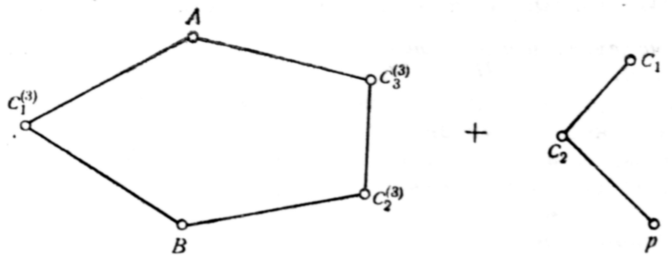

Рис. 5

2. Кликовое число графа F равно 4. Прежде всего заметим, что единственно вершины A и B смежны всем трем вершинам треугольника $]c_1, c_2, c_3]$. Так как вершины A и B не смежны, то треугольник $[c_1, c_2, c_3]$ не входит ни в какую 5-клику. Из этого следует, что если граф F содержит 5-клику, то хотя бы три из ее вершины принадлежат графу Г. С другой стороны, граф Г не содержит треугольников. Следовательно, граф F не содержит 5-клик. Так как граф F очевидно содержит 4-клику, то кликовое число графа F равно 4. Теорема доказана.

4. О критичности графа F.

Определение. *Будем говорить, что* (3,3)*-граф Рамсея G является критическим* (3,3)*-графом Рамсея, если никакой его собственный подграф не является* (3,3)*-графом Рамсея.*

Верно следующее:

Предложение. *Граф F является критическим* (3,3)*-графом Рамсея.*

Доказательство этого предложения, с незначительными изменениями, проходит так же, как и доказательство теоремы 3 из [10], и поэтому мы его приводить не будем.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Erdos, A. Hajnal. Research problem 2—5. *J. Combin. Theory*, **2**, 1967, 107.
2. R. Graham. On Edgewise 2-colored Graphs with monochromatic triangles and containing no complete hexagon. *J. Combin. Theory*, **4**, 1968, 300.
3. S. Lin. On Ramsey number and $\vec{K}_r$-coloring of graphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, **12**, 1972, 82—92.
4. M. Schauble. Zu einem Cantenferbungsproblem. *Wiss. Z. Th. Ilemenau*, **15**, 1969, 55—58.
5. R. Graham, J. Spenser. On small graphs with forced monochromatic triangles. *Lecture Notes in Math.*, **186**, 137—141.
6. R. Irving. On a bound of Graham and Spenser for a graph coloring constant. *J. Combin. Theory, Ser. B*, **15**, 1973, 200—203.
7. J. Folkman. Graphs with monochromatic complete subgraph in every edge coloring. *SIAM J. Apll. Math.*, **18**, 1970, 137—141.
8. Н. Ненов, Н. Хаджииванов. О числе Грахама—Спенсера. *Доклады БАН*, **32**, 1979, 155—158.
9. Н. Ненов. Новая оценка снизу для числа Грахама—Спенсера. *Сердика*, **6**, 1980, 373—383.
10. Н. Ненов, Н. Хаджииванов. О минимальных t-графах. *Сердика*, **6**, 1980, 128—142.
11. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. Сб.*, **24**, 1949, 163—188.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 573

Поступила 23. 3. 1981