Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О БЕСКОНЕЧНО БАЗИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР ЛИ

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Над любым полем положительной характеристики построен пример бесконечно базируемого локально конечного многообразия алгебр Ли. Как следствие построены примеры многообразий алгебр Ли с заданными свойствами.

Будем использовать обозначения из [1] и [2]. В частности все произведения левонормированны: $xyz=(xy)z$ и $xy^n=x\underbrace{y\cdots y}_{n}$. В [1] и [2] М. Р. Воон-Ли и автор построили примеры бесконечно базируемых многообразий алгебр Ли над полем положительной характеристики. Аналогичный пример построил и Ю. Г. Клейман (неопубликовано). В связи с этим Ю. А. Бахтурин поставил вопрос о существовании локально конечных бесконечно базируамых многообразий. Совсем недавно И. Б. Воличенко [3] построил такой пример в случае поля характеристики 2. Используя идеи [1] и [2], мы даем ответ в случае произвольной положительной характеристики.

Теорема 1. *Пусть K — поле положительной характеристики p. Тогда многообразие алгебр Ли над K, определенное тождествами*

$$(x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{2p-1}x_{2p})x_{2p+1}=0, \tag{1}$$

$$((x_1x_2)(x_3x_4))((x_5x_6)(x_7x_8))=0, \tag{2}$$

$$x_1x_2^{p^2+2}=0, \tag{3}$$

$$(x_1x_2\cdots x_{k+2})(x_1x_2)^{p-1}=0,\quad k=1, 2, \dots, \tag{4}$$

локально конечно и бесконечно базируемо.

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Будем следовать изложению [2, § 2].

1. Пусть T_n — множество всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$, A_n — алгебра с базисом над K, $\{a^{(1)}_{\sigma s}, a^{(k)}_{\tau s}, b_s \mid \sigma, \tau \in T_n, |\tau|$ — нечетное, $k=2, 3, \dots, p-1$, $s=0,1 \dots, p\}$. Для всех $\tau\in T$, $|\tau|$ — нечетное, положим $a^{(p)}_{\tau s}=b_s$, если $|\tau|=2n-1$ и $a^{(p)}_{\tau s}=0$, если $|\tau|<2n-1$. Определим умножение в A_n следующим образом: $a^{(k)}_{\sigma s}a^{(l)}_{\tau t}=(-1)^{|\sigma|}a^{(k+l)}_{\pi s+t}$, где $\pi=\sigma\cup\tau$, если $k+l\leq p$, $s+t\leq p$, $\sigma\cap\tau=\emptyset$, $|\sigma|+|\tau|\equiv 1 \pmod 2$, $a^{(k)}_{\sigma s}a^{(l)}_{\tau t}=0$ во всех остальных случаях.

Рассмотрим множество

$$\{g_{\lambda_s}, h_{\mu_s} \mid \lambda, \mu\in T_n,\ |\lambda| \text{ — нечетное, } \mu \text{ — четное, } s=0, 1, \dots, p\} \tag{5}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 79—81.

линейных преобразований в A_n, определенных следующими равенствами:

$a_{\sigma s}^{(k)} g_{\lambda t} = a_{\pi s+t}^{(k)}$, где $\pi = \sigma \cup \lambda$, если $s+t \leqq p$, $\sigma \cap \lambda = \varnothing$, $|\sigma|$ — четное,

$a_{\sigma s}^{(k)} h_{\mu t} = k a_{\pi s+t}^{(k)}$, где $\pi = \sigma \cup \mu$, если $s+t \leqq p$, $\sigma \cap \mu = \varnothing$,

$a_{\sigma s}^{(k)} g_{\lambda t} = a_{\sigma s}^{(k)} h_{\mu t} = 0$ во всех остальных случаях.

Как в [2], доказывается, что алгебра A_n является алгеброй Ли из $\mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{N}_p$, а преобразования (5) являются дифференцированиями алгебры A_n, которые попарно коммутируют между собой. Обозначим через B_n расщепляемое расширение алгебры A_n с помощью абелевой алгебры дифференцирований D_n, порожденной преобразованиями (5). Следуя [2], легко проверить, что B_n удовлетворяет тождествам (1) и (2).

2. Обозначим через C_n подалгебру в B_n, порожденную множеством

$$\{a_{\sigma 0}^{(1)},\ g_{\lambda 0},\ h_{\sigma 1}, h_{\mu 0} \mid \sigma = \varnothing,\ \lambda = \{1\},\ \mu = \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots, \{2n-2, 2n-1\}\}.$$

Алгебра C_n обладает линейным базисом над K

$$\{a_{\sigma s}^{(k)},\ g_{\lambda 0}, h_{\mu 0}, h_{\nu 1} \mid \sigma \in T_n,\ k = 1, 2, \ldots, p,\ s = 0, 1, \ldots, p, \tag{6}$$

$$a_{\sigma s}^{(k)} \in C_n,\ \lambda = \{1\}, \mu = \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots, \{2n-2, 2n-1\},\ \gamma = \varnothing\}.$$

Мы установим, что C_n нильпотентна класса $2p+n$ и что она удовлетворяет тождеству (3):

В любом ненулевом произведении $l_1 l_2 \cdots l_m$ элементов из (6) не более p раз встречаются элементы $a_{\sigma s}^{(k)}$, не более p раз встречается $h_{\nu 1}$, каждый элемент $g_{\lambda 0}$, $h_{\mu 0}$ встречается не более, чем однажды, т. е. $m \leqq 2p+n$ и $C_n \in \mathfrak{N}_{2p+n}$.

Предположим, что $m \geqq p^2+2$ и докажем, что в C_n $x_1 x_2^m = 0$. Пусть $l_1, l_2 \in C_n$, $l_2 = a+d$, где $a \in A_n$, $d \in D_n$. Тогда $l_1 l_2 = a_1 \in A_n$. Раскроем скобки в произведении $l_1 l_2^m = (l_1 l_2) _2^{m-1} = a_1 (a+d)^{m-1}$:

$$l_1 l_2^m = \Sigma a_1 c_1 c_2 \cdots c_{m-1}, \tag{7}$$

где $c_i = a$ или $c_i = d$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Если $a_1 c_1 c_2 \cdots c_{m-1} \neq 0$, то среди $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ не больше, чем $p-1$ раз встречается a; если a встречается ровно $p-1$ раз, то $c_{m-1} = a$ ($a_{\sigma t}^{(p)}$ принадлежит центру C_n). Следовательно, ненулевые произведения в сумме (7) следующего вида:

$$a_1 d^{k_1} a d^{k_2} a \cdots a d^{k_s} a^{\varepsilon}, \quad s \leqq p-1, \quad \varepsilon = 0, 1, \tag{8}$$

и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s + (s-1) + \varepsilon = m-1$. Поэтому

$$m = k_1 + k_2 + \cdots + k_s + s + \varepsilon \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_s + p. \tag{9}$$

Элемент d является линейной комбинацией дифференцирований из (6), т. е. $d = \Sigma \alpha_i d_i$ и d_i попарно коммутируют. Тогда ($\operatorname{char} K = p$)

$$(\operatorname{ad} \Sigma \alpha_i d_i)^p = \Sigma \alpha_i^p (\operatorname{ad} d_i)^p, \tag{10}$$

$$(\operatorname{ad} d_i)^p = \begin{cases} 0, & \text{если } d_i = g_{\lambda 0}, h_{\mu 0}, \mu \neq \varnothing, \\ \operatorname{ad} h_{\nu p}, & \text{если } d_i = h_{\nu 1}, \nu = \varnothing, \end{cases} \tag{11}$$

потому что $a_{\sigma s}^{(k)} (h_{\nu 1})^p = k^p a_{\sigma+sp}^{(k)} = k a_{\sigma s+p}^{(k)} = a_{\sigma s}^{(k)} h_{\nu p}$, $\nu = \varnothing$. Рассмотрим произведение $a_1 d^{k_1} \cdots a d^{k_s} a^{\varepsilon}$ из (8). Пусть

(12) $$k_i=\max(k_1,\ldots,k_s),\quad k_j=\max(\{k_1,\ldots,k_s\}\setminus\{k_i\}).$$

Если $k_i\leqq 2p-1$, $k_j\leqq p-1$, то ($s\leqq p-1$) из (12)

$$k_1+\cdots+k_s\leqq(2p-1)+(s-1)(p-1)\leqq(2p-1)+(p-2)(p-1)=p^2-p+1$$

и из (9) $m\leqq p^2+1$, что невозможно. Поэтому возможны два случая: $k_j\geqq p$ или $k_i\geqq 2p$. Для удобства записи предположим, что $i=1$, $j=2$ (это не влияет на общность рассуждений).

а) $k_2\geqq p$. Тогда, ввиду (10) и (11),

$$a_1d^{k_1}ad^{k_2}=a_1d^pd^{k_1-p}ad^pd^{k_2-p}=a_1(\Sigma\alpha_id_i)^pd^{k_1-p}a(\Sigma\alpha_i\mathrm{d}_i)^pd^{k_2-p}$$

$$=a_1(\Sigma\alpha_i^p(\mathrm{ad}d_i)^p)d^{k_1-p}a(\Sigma\alpha_i^p(\mathrm{ad}d_i)^p)d^{k_2-p}=\alpha^{2p}a_1h_{\nu1}^pd^{k_1-p}ah_{\nu1}^pd^{k_2-p}$$

$$=\alpha^{2p}a_1h_{\nu p}d^{k_1-p}ah_{\nu p}d^{k_2-p}=0,\quad \nu=\varnothing.$$

Следовательно, в этом случае произведение (8) равно нулю.

б) $k_1\geqq 2p$. Тогда из (10) и (11)

$$a_1d^{k_1}=a_1d^pd^pd^{k_1-2p}=a_1(\Sigma\alpha_id_i)^p(\Sigma\alpha_id_i)^pd^{k_1-2p}=a_1(\Sigma\alpha_i^p(\mathrm{ad}d_i)^p)^2d^{k_1-2p}$$

$$=\alpha^{2p}a_1(\mathrm{ad}h_{\nu1})^{2p}d^{k_1-2p}=\alpha^{2p}a_1h_{\nu p}^2d^{k_1-2p}=0,\ \nu=\varnothing,$$

и снова произведение (8) равно нулю. Следовательно, алгебра C_n удовлетворяет тождеству (3).

3. Многообразие, определенное тождествами (1), (2), (3), разрешимо и энгелево. Согласно теореме К. В. Грюнберга [4], оно локально нильпотентно, следовательно, локально конечно.

4. Как в [2, леммы 2.1 и 2.2 и теорема 2.3] можно доказать, что C_n удовлетворяет всем тождествам (4) при $k<n$, а $(x_1x_2\cdots x_{n+2})(x_1x_2)^{p-1}\neq 0$ в C_n. Кроме того, C_n нильпотентна класса $2p+n$, и поэтому она удовлетворяет (4) и при $k>n$, т. е. тождества (4) независимы по модулю тождеств (1), (2), (3). Теорема доказана.

Используя идеи А. Ю. Ольшанского [5] и [6] и теорему 1, можно построить некоторые примеры многообразий алгебр Ли с заданными свойствами.

Теорема 2. *Над каждым полем положительной характеристики существует континуум локально конечных многообразий алгебр Ли, образующих строго возрастающую цепочку относительно включения.*

Доказательство. Пронумеруем множество Q рациональных чисел:

(13) $$r_1,r_2,r_3,\ldots.$$

Рассмотрим множество $\{L_r\mid r\in Q\}$ алгебр Ли, $L_r\cong C_m$, где m — номер числа r в (13), а C_m — алгебры из доказательства теоремы 1. Для каждого вещественного числа α определим многообразие

(14) $$\mathfrak{W}_\alpha=\mathrm{var}\{L_r\mid r\leqq\alpha\}.$$

Из пункта 4 доказательства теоремы 1 легко следует, что при $\alpha<\beta\ \mathfrak{W}_\alpha\subsetneqq\mathfrak{W}_\beta$.

Следствие 3. *Над каждым полем положительной характеристики существует континуум локально конечных многообразий с попарно различными порядковыми функциями. (Порядковая функция $f_{\mathfrak{W}}$ ло-*

кально конечного многообразия $\mathfrak{B}$ — *это функция от натурального аргумента, которая определяется равенством* $f_{\mathfrak{B}}(n)=\dim F_n(\mathfrak{B})$, $n=1, 2, \ldots$, $F_n(\mathfrak{B})$ — *относительно свободная алгебра ранга* n *в* $\mathfrak{B}$).

Доказательство. Рассмотрим многообразия (14). Тогда при $\alpha>\beta$

$$\mathfrak{W}_\beta\subset\mathfrak{W}_\alpha \tag{15}$$

и для каждого n существует естественный эпиморфизм $\psi_n: F_n(\mathfrak{W}_\alpha)\to F_n(\mathfrak{W}_\beta)$. Включение (15) строгое, поэтому существует n такое, что $\ker\psi_n\neq 0$, т. е. $f_{\mathfrak{W}_\alpha}(n)\neq f_{\mathfrak{W}_\beta}(n)$.

Замечание 4. Как в [6], можно показать, что существуют два различных многообразия над полем характеристики p с одинаковыми порядковыми функциями. Например, пусть $k=p^3+p^2+p+2$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^2\cap\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{W}$ — подмногообразия в $\mathfrak{M}$, определенные соответственно тождествами

$$v(x_1, x_2, y_0, y_1, \ldots, y_p, y_{p+1})=x_1x_2y_0^py_1^p\ldots y_p^py_{p+1}^{p^3}=0,$$

$$w(x_1, x_2, y_0, y_1, \ldots, y_p, y_{p+1})=x_1x_2y_0^{p^2}y_1^{p^2}\cdots y_p^{p^2}y_{p+1}^p=0.$$

Тогда $f_{\mathfrak{B}}(n)=f_{\mathfrak{M}}(n)$.

Замечание 5. Для ассоциативных алгебр над конечным полем Ю. Н. Мальцев (неопубликовано), используя свою работу [7], построил пример двух почти коммутативных многообразий с одинаковыми порядковыми функциями. Используя идеи в [6], можно построить следующий простой пример: Пусть K — поле характеристики $p>0$, а многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр определено тождествами $xy-yx=x_1x_2\cdots x_{k+1}=0$, $k=p^2+p+1$ и $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}$ подмногообразия в $\mathfrak{M}$, определенные соответственно тождествами

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_p, y)=x_0x_1\cdots x_py^{p^2}=0,\quad w(x_0, x_1, \ldots, x_p, y)=(x_0x_1\cdots x_p)^p\, y=0.$$

Тогда $\mathfrak{B}\neq\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{W}$ имеют одинаковые порядковые функции.

Результаты этой работы составляют часть диссертации автора [8]. Автор выражает свою искреннюю благодарность Ю. А. Бахтурину за постановку задач и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. R. Vaughan-Lee. Varieties of Lie algebras. *Quart. J. Math. Oxford* (2), **21**, 1970 297—308.
2. В. С. Дренски. О тождествах в алгебрах Ли. *Алгебра и логика*, **13**, 1974, 265—290
3. И. Б. Воличенко. О многообразиях центрально-метабелевых алгебр Ли, препринт № 16 1980, Институт матем. АН БССР, Минск.
4. K. W. Gruenberg. Two theorems of Engel groups. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **49**, 1953, 377—380.
5. А. Ю. Ольшанский. О некоторых бесконечных системах тождеств. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, вып. 3, 1978, 139—146.
6. А. Ю. Ольшанский. О порядках свободных групп локально конечных многообразий. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **37**, 1973, 89—94.
7. Ю. Н. Мальцев. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец. *Сиб. матем. ж.*, **17**, 1976, 1086—1096.
8. В. С. Дренски. Разрешимые многообразия алгебр Ли. Диссертация, Москва, МГУ, 1979.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 26. 3. 81