Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С СИЛЬНЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТИПА СОБОЛЕВА

АНДРЕАНА С. МАДГЕРОВА

В этой статье вводятся сильные обобщенные A, p производные типа Соболева, где A — линейный дифференциальный оператор порядка N с постоянными коэффициентами, $p=1, 2, \ldots, \infty$. Рассматриваются пространства W_p^A всех функций с сильными обобщенными A, p производными типа Соболева, как и пространства W_p^α всех функций с сильными обобщенными A, p производными типа Соболева для $\forall A \in \alpha$, где α есть конечномерное однородное дифференциально-инвариантное пространство. Пространства W_p^α имеют значение для дифференциальных уравнений. Например, если $u \in L_p$, $1<p<\infty$, то каждое решение уравнения $Af=u$ принадлежит W_p^A.

Пусть A — линейный дифференциальный оператор порядка N с постоянными коэффициентами. В этой статье вводятся сильные обобщенные производные A, p типа Соболева, $p=1, 2, \ldots, \infty$; рассматриваются пространства W_p^A всех функций с сильными обобщенными A, p производными типа Соболева, как и пространства W_p^α всех функций с сильными обобщенными A, p производными типа Соболева для $\forall A \in \alpha$, где α есть конечномерное однородное дифференциальное-инвариантное пространство (т. е. α есть пространство, конечномерное, линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, для которого, если $A \in \alpha$, то и все операторные производныеA тоже принадлежат к α). Пространства W_p^α имеют значение для дифференциальных уравнений. Например, если $u \in L_p$, $1<p<\infty$, то каждое решение уравнения $Af=u$ принадлежит W_p^A.

Исследование одного apriori операторного неравенства позволяет утверждать, что для некоторых операторов A порядка N (названных параболическими) имеем $W_\infty^A \not\subset W_\infty^{N-1}$.

Для удобства изложения ограничим определения и исследования функциями, заданными на фиксированном компактном гиперкубе $K \subset \mathbf{R}^n$.

Определение пространства $W_p^A = W_p^A(K)$, где K — компактный гиперкуб в $\mathbf{R}^n$ с $\mathring{K} \neq \emptyset$. Через $W_p^A(K) = W_p^A$ будем обозначать пополнение $C^\infty | K$ по норме $\pi: \pi f = \Sigma_q \| A^{(q)} f \|_p$, где $A^{(q)}$ есть q-тая операторная производная оператора A, $q=(q_1, \ldots, q_n)$, а $\| g \|_p$ — норма в L_p функции $g \in L_p(K)$:

$$\| g \|_p = \begin{cases} \sup_{x \in K} | g(x) | & \text{при} \quad p=\infty, \\ (\int_K | g |^p dx)^{1/p} & \text{при} \quad p<\infty. \end{cases}$$

Пусть $W_p^N = W_p^N(K)$ — пространство всех функций f, для которых $D^q f \in L_p(K)$, $q \leqq N < \infty$. Компактный гиперкуб K выбираем так, что $\mathring{K} \neq \emptyset$ и фиксируем.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 9, 1983, с. 115—121.

Тогда из теории дифференциальных операторов при $1<p<\infty$ имеем $W_p^A=W_p^N$ тогда и только тогда, когда оператор A эллиптический порядка N.

При $p=1$, ∞, если A эллиптический порядка N, то $W_p^A \subset W_p^{N-1}$, как следует из результатов [1] и [2].

Для систем дифференциальных уравнений целесообразно рассмотреть пространство W_p^α, являющееся пополнением $C^\infty|K$ по норме π:

$$\pi f=\sum_{A \in \alpha} \| Af \|_p,$$

где α — конечномерное однородное дифференциально-инвариантное пространство, т. е. α есть конечномерное пространство линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, для которого, если $A \in \alpha$, то и $A^{(q)} \in \alpha$, $\forall q$.

Будут доказаны

Теорема 1. *Пусть N — порядок линейного дифференциального оператора A с постоянными коэффициентами. Пусть последовательность функций (f_m) удовлетворяет условиям:*

1. *Каждая функция f_m определена и имеет непрерывные частные производные до N-того порядка, включительно на некотором открытом множестве $G \subset \mathsf{R}^n$, $N>0$;*

2. *При $q>0$ имеем $(A^{(q)} f_m) \to 0$ в норме пространства $L_p(G)$;*

3. *$(Af_m) \to F$ в норме $L_p(G)$.*

Тогда в L_p функция $F=0$ на G.

Определение. *Каждый элемент пространства $W_q^A(K)$ определяется функциями f, $g_{A^{(q)}}$, принадлежащих L_p, и последовательностью (f_m), $f_m \in C^\infty|K$, такие, что в норме пространства $L_p(K)$ имеем $(f_m) \to f$ и $(A^{(q)} f_m) \to g_{A^{(q)}}$, $q>0$.*

Из теоремы 1 следует, что функции $g_{A^{(q)}}$ определены однозначно функцией f, и поэтому W_q^A есть пространство функций (точнее изоморфно).

Функции $g_A(q)$, $q>0$, будем обозначать через $A^{(q)} f$ и будем называть сильными обобщенными A, p производными типа Соболева функций f.

Очевидно, что если функция f имеет непрерывные частные производные до N-того порядка включительно, то после применения оператора A над f получаем ее обобщенную сильную A, p производную типа Соболева (с точностью до нулевой функции в L_p).

Также ясно, что при $p<\infty$ функция f может и не иметь все производные Соболева $D^q f \in L_p(K)$, $q \leq N$, т. е. $f \notin W_p^N$, а все-таки возможно существование у функции f обобщенных сильных A, p производных типа Соболева. Для наличия такого случая необходимо и достаточно, чтобы оператор A не был эллиптическим.

В исследовании, когда $W_\infty^A \neq W_\infty^B$, пользуемся следующей теоремой:

Теорема 2. *Пусть F, A, B_1, $B_2, \ldots, B_m$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, для которых:*

1. *Полный характеристический полином $\sigma(A)$ оператора A порядка N имеет вид*

$$\sigma(A)=\sum_{|i^-|=N} a_{i^-}(X^-)^{i^-}+X_n^{N-k}\sum_{|i^-|<k} b_{i^-}(X^-)^{i^-}+P(X_1, \ldots, X_n) \tag{1}$$

при $i^- = (i_1, \ldots, i_{n-1})$; $X^- = (X_1, \ldots, X_{n-1})$; *и где в полиноме* P, *степени меньше* N, *степень относительно* X_n *меньше* $N-k$, $k>0$;

2. *Порядок операторов* $B_1, \ldots, B_m$ *относительно* X_n *меньше* $N-k$;
3. *Порядок операторов* $F, B_1, \ldots, B_m$ *меньше* N;
4. *Порядок оператора* F *относительно* X_n *равен* $N-k$, *где* $k \geqq k_1 > 0$.

Тогда не существует такой константы $\varkappa$, *для которой выполнялось бы*

$$\| Fg \| \leqq \varkappa \{ \| Ag \| + \| B_1 g \| + \cdots + \| B_m g \| \}, \quad \forall g \in D^\infty,$$

где D^∞ — *пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, а* $\| f \| = \sup_s | f(s) |$.

И, следовательно, в частности:

Теорема 2′. *Не существует такой константы* $\varkappa$, *для которой выполнялось бы*

$$\| \frac{\partial}{\partial y} g \| \leqq \varkappa \{ \| (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}) g \| + \| \frac{\partial}{\partial x} g \| + \| g \| \}, \quad \forall g \in D^\infty.$$

Определение. *Линейный дифференциальный оператор* A *порядка* N *называется параболическим, если существует реальное линейное невырожденное преобразование* L *пространства* R^n, *для которого полный характеристический полином* $\sigma(LA)$ *имеет вид* (1).

В частности, при $n=2$, $N=2$ это определение можно высказать в форме

Определение. *При* $n=2$ *оператор второго порядка*

$$A = \sum_{0 \leqq i+k \leqq 2} a_{ik} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}$$

будем называть параболическим, если $a_{20} a_{02} - a_{11}^2 = 0$ *и при* $a_{20} \neq 0$, a_{11}/a_{20} — *реальное, а при* $a_{02} \neq 0$, a_{11}/a_{02} — *реальное.*

Теорема 3. *Пусть* $A, B_1, \ldots, B_m$ — *линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами,* $B_m = I$. *Пусть не существует такой константы* $\varkappa$, *для которой выполнялось бы*

$$\| Ag \| \leqq \varkappa \{ \| B_1 g \| + \cdots + \| B_m g \| \} \tag{2}$$

для $\forall g \in D^\infty$. *Тогда не существует и константы* $\varkappa$, *для которой выполнялось бы* (2) *для* $\forall g \in D_r^\infty$, *где* D_r^∞ *есть пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем с* $\{x : |x| < r\}$, $r>0$, $x = (x_1, \ldots x_n)$, *если* $A, B_i, \ldots, B_m$ *удовлетворяют условиям из теоремы 2 для операторов* $F, A, B_1, \ldots, B_m$ *соответственно.*

Теорема 4. *Если* A — *параболический оператор порядка* N *и с постоянными коэффициентами, то* $W_\infty^A(K) \not\subset W_\infty^{N-1}(K)$, $\mathring{K} \neq \varnothing$, $n \geqq 2$.

(Для $n=2$ определения и теоремы имеют более простой вид.)

Сначала докажем лемму.

Лемма 5. *Пусть* E — *фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Пусть в норме* $L_p(K)$ *последовательность* $(\gamma_m) \to 0$, $\gamma_m \in D^\infty(K_0)$. *Тогда и последовательность* $(E * \gamma_m) \to 0$ *в норме* $L_p(K_0)$ *для каждого фиксированного компактного гиперкуба* K_0, $p = 1, 2, \ldots, \infty$.

Доказательство. Пусть $g \in D^\infty$. Образуем $g * E * \gamma_m$. Из неравенства Юнга следует, что $g * E * \gamma_m = (g * E) * \gamma_m \to 0$ в $L_p(K_0)$, так как $\| g * E * \gamma_m \|_{L_p(K_0)}$

$\leq C(K, K_0)\| g*E\|_{L_p(K^*)}\| \gamma_m\|_p$, K^* — компактный гиперкуб. Но это верно для $\forall g \in D^\infty$, поэтому $E*\gamma_m \to 0$ в норме $L_p(K_0)$.

Лемма 6. *Если функция $f \in L_p$ с компактным носителем K, то $E*f$ является p-локально суммируемой в $L_p(K_0)$, $p=1, 2, \ldots, \infty$.*

Доказательство. Пусть $\psi_m \to f$ в L_p и $\psi_m \in D^\infty(K)$. Установим, что последовательность $E*\psi_m$ фундаментальна в $L_p(K_0)$. Так как $\| E*\psi_m - E*\psi_k\|_{L_p(K_0)} = \| E*(\psi_m-\psi_k)\|_{L_p(K_0)}$, а (ψ_m) — фундаментальная последовательность в L_p, то в силу леммы 5 и последовательность $F*\psi_m$ фундаментальна в $L_p(K_0)$. Итак, имеем, что в $L_p(K_0)$ последовательность $(E*\psi_m) \to \mathscr{L}$, $\mathscr{L} \in L_p(K_0)$. Докажем, что в $D'(K_0)$ верно $\mathscr{L} = E*f$. Так как $(\psi_m) \to f$ и в D' и свертка непрерывна по каждому компоненту в отдельности, то $E*f = \lim(E*\psi_m) = \mathscr{L}$ и в $D'(K_0)$. Но так как $\mathscr{L} \in L_p(K_0)$, то $E*f = \mathscr{L}$ и в $L_p(K_0)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $H \in D^\infty$. Рассмотрим $\varphi_m = Hf_m$. Ясно, что

$$A\varphi_m = \sum_{|q|\leq N} \frac{D^q H}{q!} A^{(q)} f_m \to HF \text{ в } L_p(G).$$

Пусть обобщенная функция E является фундаментальным решением оператора A, $AE = \delta(x)$ ($\delta(x)$ есть δ-функция Дирака). В D' существуют свертки $E*HF$ и $E*A\varphi_m$, так как носители функций HE и $A\varphi_m$ компактны, и кроме того, $\operatorname{supp} A\varphi_m \subset \operatorname{supp} H$ и $A\varphi_m \to HF$ в $L_p(G)$.

Знаем, что $E*A\varphi_m = AE*\varphi_m = \delta*\varphi_m = \varphi_m$.

Итак,

$$\begin{array}{l} E*A\varphi_m \xrightarrow{\text{в } L_p(G)} E*HF. \\ \| \\ \varphi_m \xrightarrow{\text{в } L_p(G)} 0 \end{array}$$

Поэтому $F*HF=0$ в $L_p(K)$. Отсюда $A(E*HF)=0$, но по правилу дифференцирования свертки $A(E*HF) = AE*HF = HF$. Итак, $HF=0$ в D', а, следовательно, и в L_p.

Но $H \in D^\infty$ произвольна, поэтому $F=0$ в L_p.

Для установления утверждения теоремы 2 будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема 7 ([2]). *Пусть $A, A_1, \ldots, A_m$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Для того чтобы существовала константа $\varkappa$ такая, что*

$$\| Ag\| \leq \varkappa(\| A_1 g\| + \cdots + \| A_m g\|) \text{ для } \forall g \in D^\infty, \tag{3}$$

где $\| f\| = \| f\|_\infty = \sup_s |f(s)|$, необходимо и достаточно, чтобы существовали интегрируемые меры $\mu_1, \ldots, \mu_m$, такие, что для их Фурье-Стильтесовых трансформаций $M_1, \ldots, M_m$, соответственно, выполнялось

$$\sigma(A) = M_1\sigma(A_1) + \cdots + M_m\sigma(A_m), \tag{4}$$

где $\sigma(A), \sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_m)$ — полные характеристические полиномы операторов $A, A_1, \ldots, A_m$ соответственно.

Если условие (3) выполнено, и порядок операторов $A_1, \ldots, A_m$ не превосходит N, то:

1) порядок оператора A тоже не превосходит N и

2) если обозначим через $A^N, A_1^N, \ldots, A_m^N$ однородные части порядка N операторов $A, A_1, \ldots, A_m$ соответственно, то $A^N = d_1 A_1^N + \cdots + d_m A_m^N$, где d_i — масса меры μ_i в нуле, $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство теоремы 2. I случай. $\Sigma_{|i^-|<k} b_{i^-} \neq 0$. Допустим противное. Тогда из теоремы 7 вытекает, что существуют такие интегрируемые меры $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, что для их Фурье-Стильтесовых трансформаций $M_0, M_1, \ldots, M_m$ соответственно верно равенство

$$\sigma(F) = M_0\sigma(A) + M_1\sigma(B_1) + \cdots + M_m\sigma(B_m). \tag{5}$$

В (5) фиксируем $X^- = C^- = (c_1, \ldots, c_{n-1})$; делим на $X_n^{N-k} \neq 0$ и совершаем граничный переход $|X_n| \to \infty$. Имея в виду ограниченность Фурье-Стильтесовых трансформаций M_i, $i = 1, \ldots, m$, получаем, что при $\Sigma_{|i^-|<k_1} d_{i^-} (C^-)^{i^-} \neq 0$ имеем

$$\lim_{|X_n| \to \infty} M_0(C^-, X_n) = \begin{cases} \pm\infty & \text{при} \quad k > k_1, \\ \sum\limits_{|i^-|<k_1} d_{i^-} (C^-)^{i^-} \Big/ \sum\limits_{|i^-|<k} b_{i^-} (C^-)^{i^-} & \text{при} \quad k = k_1, \end{cases} \tag{6}$$

где $X_n^{N-k_1} \Sigma_{|i^-| \leqq k_1} d_{i^-} (X^-)^{i^-}$ — член порядка $N - k_1$ относительно X_n в полиноме $\sigma(F)$.

Но опять из теоремы 7 получаем $0 = \alpha A^N$, где A^N — однородная часть порядка N оператора A, а α — масса меры μ_0 в точке 0. Итак, $\alpha = 0$. Лемма [3] утверждает, что функция $f \equiv \alpha$ (так как α — масса в нуле интегрируемой меры μ_0), может быть равномерно аппроксимированна последовательностью вида $\{\pi_e * M_0\}$, где π_e — вероятностная мера с конечным носителем. Отсюда получаем противоречие, так как $\alpha = 0$, а при $\Sigma_{|i^-| \leqq k_1} d_{i^-} (C^-)^{i^-} \neq 0$ для M_0 верно (6).

II случай. $\Sigma_{|i^-|<k} |b_{i^-}| = 0$. В этом случае $\sigma(A)$ не зависит от X_n, и по условию теоремы и полные характеристические полиномы операторов $B_1, \ldots, B_m$ от X_n не зависят. Если допустим, что верно (5), то фиксируя $X^- = C^-$ и деля на $X_n \neq 0$ при $|X_n| \to \infty$ и такие C^-, для которых $\Sigma_{|i^-| \leqq k_1} d_{i^-} (C^-)^{i^-} \neq 0$, получаем опять противоречие. Доказательство теоремы 2 окончено.

Доказательство теоремы 3 можно получить посредством некоторых результатов о проективных пределах, которые изложены, например, в [4]. Здесь приводим непосредственное доказательство.

Допустим противоположное. И пусть порядок операторов $A, B_1, \ldots, B_m$ не превосходит N. Рассмотрим пространство D^N всех финитных функций с непрерывными производными до N-того порядка включительно с топологией, определяемой сходимостью: $(\varphi_s) \to \varphi$, φ_s, $\varphi \in D^N$, когда: 1. $\operatorname{supp} \varphi_s \subset K$ для некоторого компакта K и 2. $\|\varphi_l - \varphi\|_N \to 0$, где для $f \in D^N$

$$\|f\|_N = \sum_{|k| \leqq N} \sup_s |D^k f(s)|.$$

Пусть $E_l = \{\varphi : \varphi \in D^N, \|A\varphi\| \leqq l(\|B_1\varphi\| + \cdots + \|B_m\varphi\|)\}$.

Очевидно $D^N = \bigcup_1^\infty E_l$. Ввиду нашего предположения не все множества E_l являются нигде не плотными. Пусть E_{l_0} не является нигде не плотным.

Через $W(F, r, P, \rho)$ будем обозначать множество

$$W(F, r, P, \rho) = \{f \in D^N, \|F - f\|_N < r, \operatorname{supp} f \subset U(P, \rho)\}.$$

где $U(P, \rho) = \{x : \|x - P\| < \rho\}$, $r > 0$, $\rho > 0$.

Пусть в $W(\varphi_0, r, P_0, \rho_0)$ множество $W(\varphi_0, r, P_0, \rho_0) | E_{l_0}$ всюду плотно и пусть множество $W(\varphi_1, r_1, P_1, \rho_1)$ такое, что $\bar{W}(\varphi_1, r_1, P_1, \rho_1) \subset W(\varphi_0, r_0, P_0, \rho_0)$ и $\varphi_1 \in E_{l_0}$.

Пусть функция $\varphi \in D^N$ такая, что $\| \varphi \|_N = r_1$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset \bar{U}(P_1, \rho_1)$. Тогда $(\varphi_1 + \varphi) \in \bar{W}(\varphi_1, r_1, P_1, \rho_1)$. Так как $\bar{W}(\varphi_1, r_1, P_1, \rho_1) \subset \bar{E}_{l_0}$, то существует последовательность $\{\psi_q\}$, такая, что $\{\psi_q\} \to \varphi_1 + \varphi$ в D^N. Тогда и $\varphi_q = \psi_q - \varphi_1) \to \varphi$ в D^N. Так как $\| \varphi \|_N = r_1$ и $\varphi_q \to \varphi$ в D^N, то можем считать, что $r_1/2 \leqq \| \varphi_q \|_N$. Имея в виду еще, что $\psi_q, \varphi_1 \in E_{l_0}$ и что $\| \varphi_q \|_N \leqq r_1$, получаем, что

$$\| A\varphi_q \| \leqq \| A\psi_q \| + \| A\varphi_1 \| \leqq l_0 \{ \sum_{j=1}^{m} \| B_j \psi_q \| + \sum_{j=1}^{m} \| B_j \varphi_1 \| \}.$$

При $B_j = \Sigma b_{jk} D^k$ имеем

$$\| A\varphi_q \| \leqq l_0 (\sum_{jk} | b_{jk} |)(\| \psi_q \|_N + \| \varphi_1 \|_W) \leqq l_0 (\sum_{jk} | b_{jk} |)(r_1 + 2 \| \varphi_1 \|_N)$$

$$\leqq 2 C_0 \frac{l_0}{r_1} (\sum_{jk} | b_{jk} |)(r_1 + 2 \| \varphi_1 \|_N) \sum_{j=1}^{m} \| B_j \varphi_q \| = C \sum_{j=1}^{m} \| B_j \varphi_q \|.$$

Фиксируем некоторое целое $l, l \geqq C$. Уже доказали, что при $\| \varphi \|_N = r_1$ имеем $\varphi \in \bar{E}_l$.

Пусть $f \in D^N, f \neq 0$, и пусть $\operatorname{supp} f \subset U(P, \rho)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = C_* f [P + (x - P_1) \frac{\rho}{\rho_1}],$$

где

$$C_* = \frac{r}{\| f \|_N} \sum_k (\frac{\rho}{\rho_1})^{|k|} \sup | D^k f(s) |.$$

Тогда $\|\varphi\|_N = r_1$, а $f_q = \frac{1}{C_*} \varphi_q [P_1 + (x - P) \frac{\rho_1}{\rho}] \to f$ в D^N при $\varphi_q \to \varphi$ в D^N; и $f^b \in D^N$.

Итак, $f_q \in E_l$. После граничного перехода $q \to \infty$ в неравенстве $\| Af_q \| \leqq l \{ \Sigma_j \| B_j f_q \| \}$ получаем, что и $f \in E_l$. Но это противоречит условию, что не существует такая константа $\varkappa$, для которой $\| A\varphi \| \leqq \varkappa \Sigma_j \| B_j \varphi \|$, $\forall \varphi \in D^N$. Доказательство теоремы 3 окончено.

Эту теорему можно формулировать и как утверждение о вложении некоторых пространств функций.

В частности, в силу теорем 2 и 3 существует функция $f \in W^A_\infty$, где $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}$, которая не принадлежит W^1_∞.

Доказательство теоремы 4. Допустим, что $W^A_\infty \subset W^{N-1}_\infty$, где оператор A параболический, порядка N. И пусть L есть соответствующая оператору A трансформация из определения параболического оператора. Из теорем 2 и 3 очевидно, что $W^{LA}_\infty(LK) \not\subset W^{N-1}_\infty(LK)$. Пусть $f \in W^{LA}_\infty(LK)$ и $f \notin W^{N-1}_\infty(LK)$. Тогда $f(L^{-}s) = \varphi(s) \in W^A_\infty$ и $\varphi(s) \notin W^{N-1}_\infty(K)$. Доказательство теоремы 4 окончено.

Для параболического оператора A, удовлетворяющего условию (1), можно утверждать, что $W^A_\infty \not\subset W^{N-k}_\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Ornstein. A non-inequality for differential operators in the L_1 norm. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**, 1962, 40—49.
2. K. de Leeuw, H. Mirkil. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm. *Illinois J. Math.*, **8**, 1964, No 1.
3. F. W. Eberlein. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 1949, 217—240.
4. В. П. Паламодов. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва, 1967.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 26. 11. 1980
в переработанном виде 10. 7. 1982