Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ЧИСЛАХ ЗЫКОВА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ РАМСЕЯ

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

Рассматриваются только обыкновенные графы. Через $\mathrm{cl}(G)$ и $\varkappa(G)$ обозначаются, соответственно, кликовое число и хроматическое число графа G, а через $H(p, r)$, $p \leqq r$, — множество всех графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leqq p$ и $\varkappa(G) \geqq r$. Числа Зыкова определяются следующим образом:

$$Z(p, r) = \min\{|V(G)|,\ G \in H(p, r)\},$$

где $V(G)$ обозначает множество вершин графа G. В настоящей работе доказывается, что $Z(r, r+2) = r+6$, $r \geqq 4$ и $Z(r, r+3) = r+9$, $r \geqq 6$. При помощи этих равенств получаются оценки для некоторых констант, связанных с графами Рамсея (теорема 6 и следствия 1, 2, 3).

1. Введение и формулировка основных результатов. Рассматриваются только конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать, соответственно, множество вершин и множество ребер графа G. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$ говорят, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \dots, v_p$ графа G называется p-кликой, если любые две из них смежны. Через $\mathrm{cl}(G)$ обозначается наибольшее натуральное число p, для которого граф G обладает p-кликой. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\bar{G}$ — дополнительный граф графа G.

$G-v$ — подграф графа G, получающийся удалением вершины v.

$G-e$ — подграф графа G, получающийся удалением ребра $e \in E(G)$.

$A(V')$, $V' \subset V(G)$ — множество всех вершин графа G, смежных всем вершинам множества V'.

$\langle V' \rangle$, $V' \subset V(G)$ — подграф, порожденный множеством вершин V'.

C_n — простой цикл длины n.

K_n — полный граф с n вершинами.

$\chi(G)$ — хроматическое число графа G.

$\alpha(G)$ — число независимости графа G ($\alpha(G) = \mathrm{cl}(\bar{G})$).

$G_1 + G_2$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, — граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где $E' = \{[v_1, v_2],\ v_1 \in V(G_1),\ v_2 \in V(G_2)\}$.

Очевидно, $\mathrm{cl}(G) \leqq \chi(G)$. Пусть p и r — натуральные числа и $2 \leqq p \leqq r$. Через $H(p, r)$ обозначим множество всех графов G таких, что $\mathrm{cl}(G) \leqq p$ и $\chi(G) \geqq r$. Числа Зыкова определяются следующим равенством:

$$Z(p, r) = \min\{|V(G)|,\ G \in H(p, r)\}.$$

Существование чисел $Z(p, r)$, $p \leqq r$ доказано в [5] и [15].

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы:

Теорема 1 [7]. *$Z(r, r+2) \geq r+6, r \geq 2$. Если $r \geq 4$, тогда $Z(r, r+2) = r+6$.*

Теорема 2. *Пусть $G \in H(r, r+2)$ и $|V(G)| = r+7$. Тогда $\mathrm{cl}(G) = r$.*

Теорема 3. *$Z(r, r+3) \geq r+9$, $r \geq 2$. Если $r \geq 6$, тогда $Z(r, r+3) = r+9$.*

Теорема 4. $10 \leq Z(3, 5) \leq 11$.

Теорема 5. *Пусть $G \in H(r, r+2)$, $r \geq 4$ и $|V(G)| = r+6$. Тогда $G = K_{r-4} + C_5 + C_5$.*

При помощи этих теорем мы получим некоторые результаты, относящиеся к графам Рамсея. Для формулировки этих результатов нам придется ввести еще несколько понятий:

Определение. *Любое разложение*

$$E(G) = E_1 \cup \cdots \cup E_s,\ E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j, \tag{1}$$

называется s-раскраской ребер графа G.

Пусть дана s-раскраска (1) ребер графа G и Q является его p-кликой. Если $E(Q) \subset E_i$, будем говорить, что Q является монохроматической p-кликой i-го цвета данной s-раскраски. Ниже $p_1, \dots, p_s$ всюду являются натуральными числами. Граф G называется $(p_1, \dots, p_s)$-графом Рамсея, если для любой s-раскраски его ребер существует i, $1 \leq i \leq s$, такое, что имеется монохроматическая p_i-клика i-го цвета. Через $R(p_1, \dots, p_s)$ обозначим наименьшее натуральное число n, для которого полный граф с n вершинами является $(p_1, \dots, p_s)$-графом Рамсея. Существование чисел $R(p_1, \dots, p_s)$ впервые было доказано Рамсеем [1]. Ниже будем пользоваться следующими равенствами: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$ и $R(3, 3, 3) = 17$. Подробный обзор результатов по числам Рамсея содержится в [2].

Через $N(p_1, \dots, p_s; q)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует $(p_1, \dots, p_s)$-граф Рамсея G такой, что $|V(G)| = n$ и $\mathrm{cl}(G) < q$. В [4] доказано, что $N(p_1, \dots, p_s; q) < \infty$, если $q > \max(p_1, \dots, p_s)$. Очевидно, если $q > R(p_1, \dots, p_s)$, тогда $N(p_1, \dots, p_s; q) = R(p_1, \dots, p_s)$. В [3] Лин доказал, что если $p_i \geq 3$, $1 \leq i \leq s$, $s \geq 2$, тогда

$$N(p_1, \dots, p_s; R(p_1, \dots, p_s)) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 2, \tag{2}$$

$$N(p_1, \dots, p_s; R(p_1, \dots, p_s) - 1) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 4. \tag{3}$$

К этим двум неравенствам мы добавим еще одно, а именно:

Теорема 6. *Если $p_i \geq 3$, $1 \leq i \leq s$, $s \geq 2$, тогда*

$$N(p_1, \dots, p_s; R(p_1, \dots, p_s) - 2) \geq R(p_1, \dots, p_s) + 6. \tag{4}$$

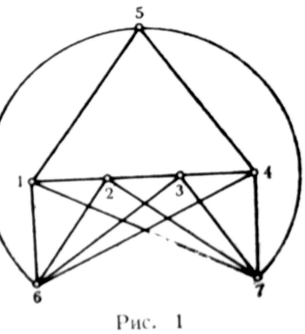

Рис. 1

2. Обзор результатов по числам Зыкова. Прежде всего отметим следующие два неравенства:

$$Z(2, r) \leq 2^r - 2^{r-2} - 1, \ r \geq 3, \ [5]; \tag{5}$$

$$Z(2, r) \geq \binom{r+2}{2} - 4, \ r \geq 4, \ [6]. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$Z(2, 4) = 11. \tag{7}$$

Через F обозначим граф, заданный на рис. 1. Очевидно, $F=\bar{K}_2+C_5$. Рассмотрим следующие подграфы графа F:

$$F_1=F-\{[1,\ 7],\ [5,\ 6]\};\ F_2=F-\{[2,\ 7],\ [5,\ 6]\};$$
$$F_3=F_1-[4,\ 7];\ F_4=F_1-[2,\ 7];\ F_5=F_2-[3,\ 7];\ F_6=F_5-[4,\ 6].$$

Положим $F_7=\bar{C}_7$. Нам будут нужны следующие две теоремы:

Теорема А [7; 12]. $Z(r,\ r+1)\geqq r+3,\ r\geqq 2$. *Равенство достигается только для графа* $K_{r-2}+C_5$, $r\geqq 2$.

Теорема В [12]. *Пусть* $G\in H(r,\ r+1)$, $r\geqq 3$ *и* $|V(G)|=r+4$. *Тогда верно одно из следующих двух утверждений:*

а) граф G *изоморфен некоторому из графов* $K_{r-3}+F_i$, $1\leqq i\leqq 7$.

б) существует вершина $v\in V(G)$ *такая, что подграф* $G-v$ *изоморфен графу* $K_{r-2}+C_5$.

3. Необходимые леммы. Граф G называется графом Шпернера, если существуют две несмежные его вершины v_1 и v_2 такие, что $A(v_1)\subseteqq A(v_2)$. Граф G называется вершинно-критическим хроматическим графом, если $\chi(G-v)<\chi(G)$, для любой вершины $v\in V(G)$. Очевидно, вершинно-критические хроматические графы не являются графами Шпернера. Переходим к к формулировкам лемм:

Лемма 1 [7]. *Пусть* $G\in H(p,\ r)$, $p\leqq r$ *и* $|V(G)|=Z(p,\ r)$. *Тогда* $\mathrm{cl}\ (G)=p$, $\chi(G)=r$, *граф* G *является вершинно-критическим хроматическим графом и, следовательно, не является графом Шпернера.*

Лемма 2. *Пусть* $|V(G)|=5$ *и* $\mathrm{cl}\,(G)=\alpha(G)=2$. *Тогда* $G=C_5$.

Лемма 3 [11]. *Пусть*

$$V(G)=\{v_1\}\cup\cdots\cup\{v_k\}\cup T_{k+1}\cup\cdots\cup T_{\chi(G)}$$

является $\chi(G)$*-хроматическим разложением графа* G, *где* $v_1,\ldots,v_k$ — *его вершины. Тогда* $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$ *является* k*-кликой и в любом из множеств* T_i *есть вершина, смежная всем вершинам* $v_1,\ldots,v_k$. *Следовательно, если* $|V(G)|>k$, *тогда* $\mathrm{cl}\,(G)\geqq k+1$.

Лемма 4. *Пусть* $G\in H(p,r)$, $|V(G)|\leqq Z(p,r)+1$ *и* $\alpha(G)\geqq 3$. *Тогда* $\mathrm{cl}\,(G)=p$.

Лемма 5. *Пусть* $G\in H(r,\ r+2)$, $r\geqq 3$ *и* $|V(G)|=r+6$. *Тогда* $\alpha(G)=2$.

Лемма 6 [3]. *Пусть* $\chi(G)<R(p_1,\ldots,p_s)$. *Тогда граф* G *не является* $(p_1,\ldots,p_s)$-графом Рамсея.

Лемма 7 [7; 13]. *Пусть граф* G *обладает* 9*-хроматическим разложением* $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_9$ *таким, что* $\mathrm{cl}\,(\langle V_1\cup V_2\cup V_3\cup V_4\rangle)\leqq 3$. *Тогда* G *не является* (3, 4)*-графом Рамсея.*

Нам будут нужны тоже следующие очевидные следствия из равенств $R(3,\ 3)=6$ и $R(3,\ 4)=9$:

(8) если $|V(G)|\geqq 6$, тогда либо $\mathrm{cl}\,(G)\geqq 3$, либо $\alpha(G)\geqq 3$;

(9) если $|V(G)|\geqq 9$ и $\alpha(G)\leqq 2$, тогда $\mathrm{cl}\,(G)\geqq 4$;

(10) если $|V(G)|\geqq 9$ и $\mathrm{cl}\,(G)\leqq 3$, тогда $\alpha(G)\geqq 3$.

4. Доказательства леммы 4 и теорем 1, 2 и 3. Доказательство леммы 4. Пусть $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ является 3-кликой дополнительного графа $\bar{G}$. Рассмотрим граф $G'=K_1+(G-\{v_1,\ v_2,\ v_3\})$. Так как $|V(G')|<Z(p,\ r)$, то $G'\notin H(p,\ r)$. Ясно, что $\chi(G')\geqq r$. Следовательно, $\mathrm{cl}\,(G')\geqq p+1$. Из этого вытекает $\mathrm{cl}\,(G)\geqq p$. Так как $G\in H(p,\ r)$, то $\mathrm{cl}\,(G)=p$.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что $Z(r, r+2) \geqq r+6$. Допустим противное, т. е., что существует граф $G \in H(r, r+2)$ такой, что $|V(G)| \leqq r+5$. Добавлением изолированных вершин можно добиться того, чтобы $|V(G)| = r+5$. Так как $G \in H(r+1, r+2)$, то, согласно теореме B, $\mathrm{cl}(G) = r+1$. Это противоречит условию $G \in H(r, r+2)$.

Итак, мы доказали, что $Z(r, r+2) \geqq r+6$, $r \geqq 2$. Пусть $r \geqq 4$. Рассмотрим граф $L = K_{r-4} + C_5 + C_5$. Очевидно, $L \in H(r, r+2)$ и $|V(L)| = r+6$. Следовательно, $Z(r, r+2) = r+6$, если $r \geqq 4$.

Доказательство теоремы 2. В случае $r=2$ утверждение теоремы 2 очевидно, а если $r=3$, оно вытекает из (7). Поэтому будем предполагать, что $r \geqq 4$. Согласно лемме 4 достаточно рассмотреть случай $\alpha(G)=2$. Прежде всего покажем, что $\chi(G) = r+2$. Допустим противное, т. е. $\chi(G) > r+2$. Пусть v' и v'' — несмежные вершины графа G. Рассмотрим подграф $G_1 = G - \{v', v''\}$. Очевидно, $\chi(G_1) \geqq r+2$ и, следовательно, $G_1 \in H(r, r+2)$. Это противоречит теореме 1, так как $|V(G_1)| = r+5$.

Итак, $\chi(G) = r+2$. Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{r+7}\}$. Из $\alpha(G)=2$ следует, что с точностью до нумерации вершин любое $\chi(G)$-хроматическое разложение имеет следующий вид:

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9, v_{10}\} \cup \{v_{11}\} \cup \cdots \cup \{v_{r+7}\}.$$

Согласно лемме 3, можно предположить, что $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9 \in A(v_{11}, \ldots, v_{r+7})$. Пусть $Q = \langle v_{11}, \ldots, v_{r+7} \rangle$ и $\Gamma = \langle v_1, v_3, v_5, v_7, v_9 \rangle$. Тоже согласно лемме 3, подграф Q является $(r-3)$-кликой. Граф G содержит подграф $Q + \Gamma$. Если $\mathrm{cl}(\Gamma) \geqq 3$, тогда утверждение теоремы очевидно. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $\mathrm{cl}(\Gamma) = 2$. Из $\alpha(G) = 2$ следует $\alpha(\Gamma) = 2$. Согласно лемме 2 $\Gamma = C_5$. Без ограничения общности можно предположить, что

$$E(\Gamma) = \{[v_1, v_3], [v_3, v_5], [v_5, v_7], [v_7, v_9], [v_9, v_1]\}. \tag{11}$$

Рассмотрим два случая:

Случай 1. Некоторая из вершин $v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}$ принадлежит $A(Q)$. Пусть, например, $v_2 \in A(Q)$. Рассмотрим подграф $\Gamma' = \langle v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_2 \rangle$. Граф G будет содержать $Q + \Gamma'$. Из $\alpha(G) = 2$ и (8) вытекает, что $\mathrm{cl}(\Gamma') \geqq 3$. Следовательно, $\mathrm{cl}(G) \geqq r$. Так как $G \in H(r, r+2)$, то $\mathrm{cl}(G) = r$.

Случай 2. Любая из вершин $v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}$ не принадлежит $A(Q)$ Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_{11}] \notin E(G)$. Тогда $v_6, v_8 \in A(v_{12}, \ldots, v_{r+7})$, если $r \geqq 5$ (иначе из (11) следует $\chi(G) \leqq r+1$). Остается единственная возможность $[v_6, v_{11}] \notin E(G)$ и $[v_8, v_{11}] \notin E(G)$. Аналогичным образом из $[v_6, v_{11}] \notin E(G)$ получаем $v_2, v_{10} \in A(v_{12}, \ldots, v_{r+7})$, если $r \geqq 5$, а из $[v_8, v_{11}] \notin E(G) - v_4 \in A(v_{12}, \ldots, v_{r+7})$, если $r \geqq 5$. Пусть $\Gamma'' = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{11} \rangle$. Из сделанных рассуждений вытекает, что граф G содержит подграф $K_{r-4} + \Gamma''$. Из $\alpha(G) = 2$ и (9) получаем $\mathrm{cl}(\Gamma'') \geqq 4$. Следовательно, $\mathrm{cl}(G) \geqq r$. Так как $G \in H(r, r+2)$, то $\mathrm{cl}(G) = r$.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем, что $Z(r, r+3) \geqq r+9$, $r \geqq 2$. Допустим противное, т. е., что существует граф $G \in H(r, r+3)$ и $|V(G)| \leqq r+8$. Добавлением изолированных вершин можно добиться того, чтобы $|V(G)| = r+8$. Ясно, что $G \in H(r+1, r+3)$. Согласно теореме 2, $\mathrm{cl}(G) = r+1$. Это противоречит условию $G \in H(r, r+3)$.

Итак, $Z(r, r+3) \geqq r+9$, $r \geqq 2$. Пусть $r \geqq 6$. Рассмотрим граф $L = K_{r-6} + C_5 + C_5 + C_5$. Очевидно, $L \in H(r, r+3)$ и $|V(L)| = r+9$. Следовательно, $Z(r, r+3) = r+9$, если $r \geqq 6$.

5. Доказательства леммы 5 и теорем 4, 5 и 6. Доказательство леммы 5. Допустим противное, т. е. $\alpha(G)\geqq 3$ и пусть $[v_1, v_2, v_3]$ является 3-кликой дополнительного графа $\bar{G}$. Рассмотрим подграф $G_1=G-\{v_1, v_2, v_3\}$. Очевидно, $G_1 \in H(r, r+1)$. Согласно теореме А, $G_1=K_{r-2}+C_5$. Заметим, что в

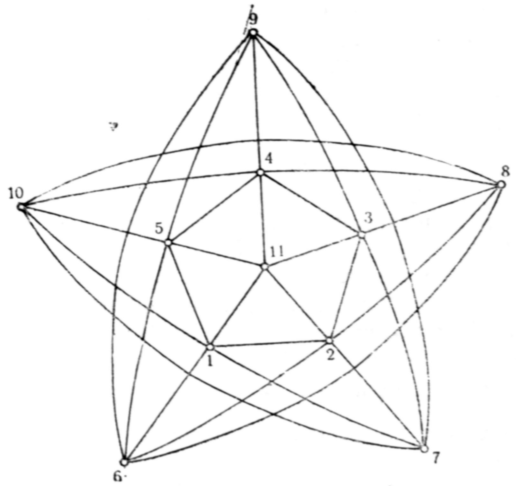

Рис. 2

графе G вершины v_1, v_2, v_3 смежны всем вершинам подграфа K_{r-2} (иначе граф G будет графом Шпернера, что противоречит лемме 1). Следовательно, $G=K_{r-2}+G'$. Из этого равенства вытекает $G' \in H(2, 4)$ и $|V(G')|=8$, что противоречит (7).

Доказательство теоремы 4. Согласно теореме 1, $Z(3, 5)\geqq 9$. Покажем, что $Z(3, 5)\neq 9$. Допустим противное, т. е., что существует граф $G \in H(3, 5)$ и $|V(G)|=9$. Согласно (10), $\alpha(G)\geqq 3$. Это противоречит лемме 5. Итак, $Z(3, 5)\geqq 10$. Неравенство $Z(3, 5)\leqq 11$ вытекает из того, что граф, заданный на рис. 2, принадлежит $H(3, 5)$.

Доказательство теоремы 5. Пусть $G \in H(r, r+2)$, $r \geqq 4$ и $|V(G)| = r+6$. Согласно лемме 1, $\mathrm{cl}(G)=r$ и $\chi(G)=r+2$, а согласно лемме 5 — $\alpha(G)=2$. Пусть $V(G)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{r+6}\}$. Из $\alpha(G)=2$ и $\chi(G)=r+2$ вытекает, что любое $(r+2)$-хроматическое разложение имеет следующий вид:

$$V(G)=\{v_1, v_2\}\cup\{v_3, v_4\}\cup\{v_5, v_6\}\cup\{v_7, v_8\}\cup\{v_9\}\cup\cdots\cup\{v_{r+6}\}.$$

Согласно лемме 3, подграф $\langle v_9, \ldots, v_{r-6}\rangle$ является $(r-2)$-кликой, которую обозначим через Q. Тоже согласно лемме 3 можно предположить, v_1, v_3, v_5, $v_7 \in A(Q)$. Положим $\Gamma=\langle v_1, v_3, v_5, v_7\rangle$. Тогда граф G содержит $\Gamma+Q$. Так как $\mathrm{cl}(G)=r$ и $\alpha(G)=2$, то $\mathrm{cl}(\Gamma)=\alpha(\Gamma)=2$. Из этого вытекает, что $E(\bar{\Gamma})$ содержит два ребра без общих вершин, и поэтому мы можем предположить, что $[v_1, v_3]\notin E(G)$ и $[v_5, v_7]\notin E(G)$. Покажем, что либо одновременно $v_2\notin A(Q)$ и $v_4\notin A(Q)$, либо одновременно $v_6\notin A(Q)$ и $v_8\notin A(Q)$. Допуская, что это не так, без ограничения общности можем предположить, что $v_2 \in A(Q)$ и $v_6 \in A(Q)$. Рассмотрим подграф $\Gamma'=\langle v_1, v_3, v_5, v_7, v_2, v_6\rangle$.

Граф G будет содержать подграф $Q+\Gamma'$. Из $\mathrm{cl}(G)=r$ и $\alpha(G)=2$ вытекает $\mathrm{cl}(\Gamma')=\alpha(\Gamma')=2$. Это противоречит (8).

Итак, мы имеем право предположить, что $v_2\notin A(Q)$, $v_4\notin A(Q)$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_9]\notin E(G)$. Из этого вытекает $[v_4, v_i]\in E(G)$, $i\geq 10$ (иначе $\chi(G)\leq r+1$). Следовательно $[v_4, v_9]\notin E(G)$. Аналогичным образом из $[v_4, v_9]\notin E(G)$ получаем $[v_2, v_i]\in E(G)$, $i\geq 10$. Положим $Q'=Q-v_9$ и $\Gamma''=\langle v_1, \ldots, v_9\rangle$. Ясно, что $G\not\supset Q'+\Gamma''$ (иначе будет следовать $\mathrm{cl}(\Gamma'')\leq 3$ и $\alpha(\Gamma'')=2$, что противоречит (9)). Из этого следует, что либо $v_6\notin A(Q')$, либо $v_8\notin A(Q')$. Достаточно рассмотреть случай, когда $[v_6, v_{10}]\notin E(G)$. Граф G не является графом Шпернера, и поэтому вершина v_{10} несмежна хотя бы двум вершинам. Так как $v_{10}\in A(V(G)-\{v_6, v_8\})$, то $[v_8, v_{10}]\notin E(G)$. Из $\alpha(G)=2$ вытекает, что $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\rangle=C_5$ и $\langle v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}\rangle=C_5$. Следовательно, граф G является подграфом графа $K_{r-4}+C_5+C_5$. Так как любой собственный подграф графа $K_{r-4}+C_5+C_5$ имеет хроматическое число меньше $r+2$, то $G=K_{r-4}+C_5+C_5$.

Доказательство теоремы 6. Вместо $R(p_1, \ldots, p_s)$ будем писать только R. Пусть G является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея с $N(p_1, \ldots, p_s; R-2)$ вершинами и $\mathrm{cl}(G)<R-2$. Согласно лемме 6, $\chi(G)\geq R$. Следовательно, $G\in H(R-3, R)$. Из определения чисел $Z(p, r)$ получаем

$$|V(G)|=N(p_1, \ldots, p_s; R-2)\geq Z(R-3, R). \tag{12}$$

Неравенство (4) вытекает из (12) и теоремы 3.

6. Некоторые следствия. Из теоремы 5 очевидным образом получаем:

Следствие 1. *Равенство в* (3) *достигается тогда и только тогда, когда граф* $K_{R(p_1, \ldots, p_s)-6}+C_5+C_5$ *является* $(p_1, \ldots, p_s)$*-графом Рамсея. Притом, все графы, для которых достигается равенство в* (3), *изоморфны этому графу.*

Замечание. В [3] Лин высказал предположение, что неравенство (3) всегда строгое. В [14] мы опровергли это предположение, доказав, что граф $K_{11}+C_5+C_5$ является (3, 3, 3)-графом Рамсея. В [9] доказано, что для (3, 3, 3)-графов Рамсея неравенство (4) тоже точное. Это единственные известные нам случаи точности неравенств (3) и (4). О точности неравенства (2) см. [3].

Следствие 2 [11]. $N(3, 3; 5)\geq 11$.

Доказательство. Допустим противное, т. е., что существует (3, 3)-граф Рамсея G такой, что $\mathrm{cl}(G)<5$ и $|V(G)|\leq 10$. Согласно лемме 6, $\chi(G)\geq 6$. Следовательно, $G\in H(4, 6)$. Из следствия 1 получаем $G=C_5+C_5$. Очевидно, граф C_5+C_5 не является (3, 3)-графом Рамсея, что противоречит нашему допущению.

Следствие 3 [13]. $N(3, 4; 8)\geq 14$.

Доказательство. Допустим противное и пусть G является (3, 4)-графом Рамсея, для которого $\mathrm{cl}(G)\leq 7$ и $|V(G)|\leq 13$. Согласно лемме 9, $\chi(G)\geq 9$. Следовательно, $G\in H(7, 9)$. Из следствия 1 получаем $G=K_3+C_5+C_5$. Очевидно, $K_3+C_5+C_5$ удовлетворяет условиям леммы 7. Из этого вытекает, что он не является (3, 4)-графом Рамсея, что противоречит нашему допущению.

Следствие 4. $N(3, 3; 4)\geq 13$,

Доказательство. Допустим противное, т. е., что существует (3, 3)-граф Рамсея такой, что $|V(G)|\leq 12$ и $\mathrm{cl}(G)=3$. Из следствия 2 вытекает, что $|V(G)|>9$. Согласно (10), $\alpha(G)\geq 3$. Пусть $[v_1, v_2, v_3]$ является 3-кликой графа $\bar{G}$. Рассмотрим подграф $G'=G-\{v_1, v_2, v_3\}$. Так как $\chi(G)\geqq 6$ (см. лемму 6), то $\chi(G')\geqq 5$. Следовательно, $G'\in H(3, 5)$ и $|V(G')|\leqq 9$. Это противоречит теореме 4.

Замечание. В [10] доказано, что $N(3, 3; 5)\leqq 15$. Для числа $N(3, 3; 4)$ пока нет хорошей оценки сверху.

7. О хроматическом числе критических (3, 3)-графов Рамсея. Будем говорить, что (3, 3)-граф Рамсея является критическим (3, 3)-графом Рамсея, если любой его собственный подграф не является (3, 3)-графом Рамсея. Докажем следующую теорему:

Теорема 7. *Пусть G является критическим (3-3)-графом Рамсея и $|V(G)|\leqq 11$. Тогда $\chi(G)=6$.*

Доказательство. Согласно лемме 6, $\chi(G)\geqq 6$. Следовательно, нужно показать, что $\chi(G)\leqq 6$. Допустим противное, т. е. $\chi(G)\geqq 7$. Если $G=K_6$, утверждение теоремы 7 очевидно, поэтому можем предположить, что $G\neq K_6$. Тогда $\mathrm{cl}(G)<5$. Согласно следствию 1, $G=K_1+C_5+C_5$. Из этого следует, что G содержит подграф, изоморфный графу C_3+C_5, который, согласно теореме 1 из [8], является (3, 3)-графом Рамсея. Этим теорема 7 доказана.

Все известные нам критические (3, 3)-графы Рамсея имеют хроматическое число 6. В связи с этим поставим следующий вопрос: существует ли критический (3, 3)-граф Рамсея с хроматическим числом больше 6?

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *J. London Math. Soc.*, **30**, 1930, 264—286
2. J. Graver, J. Yackel. Some graph theoretic results associated with Ramsey theorem *J. Combin. Theory*, **3**, 1968, 1—51.
3. S. Lin. On Ramsey Numbers and K_r-coloring of graphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, **12** 1972, 82—92.
4. J. Neštřil, V. Rödl. The Ramsey property for graphs with forbiden subgraphs *J. Combin. Theory, Ser. B*, **20**, 1976, 243—249.
5. J. Mycielski. Sur le coloriage des graphes. *Coll. Math.*, **32**, 1955, 161—162.
6. V. Chvatal. The minimality of the Mycielski graph. *Lecture Notes Math.*, **406**, 1973, 243—246.
7. Н. Ненов. Графи на Ремзи и някои константи, свързани с тях. Дисертация, Софийски университет, 1980.
8. Н. Ненов, Н. Хаджииванов. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. *Сердика*, **5**, 1979, 303—305.
9. Н. Ненов. Обобщение одной теоремы Грийнвуда и Глиссона о трицветных раскрасках ребер полного графа с 17 вершинами. *Доклады БАН*, **34**, 1981.
10. Н. Ненов. Пример 15-вершинного (3, 3)-графа Рамсея с кликовым числом 4. *Доклады БАН*, **34**, 1981.
11. Н. Ненов. Новая оценка снизу для числа Грахама-Спенсера. *Сердика*, **6**, 1980, 373—383.
12. Н. Ненов. Некоторые применения чисел Зыкова в теории Рамсея. *Годишник Соф. университет, фак. мат. мех.*, **74** (в печати).
13. Н. Ненов. Об одной константе, связанной с (3, 4)-графами Рамсея. *Сердика* (в печати).
14. Н. Ненов. Об одном предположении Лина, относящемся к числам Рамсея-Грахама-Спенсера. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1171—1174.
15. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сб.*, **24**, 1949, 163—188.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 21. 4. 1981