Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ESPACES A COURBURE STANILOV QUASI-CONSTANTE

VALENTIN BOJU, LOUIS FUNAR

Soit $(M; g)$ un espace de Riemann de dimension $n = \dim M \geqq 4$. Pour un vecteur A de l'espace tangent M_p, $A \neq 0$, nous notons:

$$C(A, w, r) = \{V \subset M_p;\ V \text{ sous-espace vectoriel de l'espace } M_p;\ \dim V = r,\ \sphericalangle (A, V) = w\}.$$

On sait [3] que la courbure Stanilov d'un sous-espace vectoriel V est donnée par

$$S_r(V) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq r} K(A_i, A_j),$$

où $\{A_1, \ldots, A_r\}$ est une base orthonormée du sous-espace V, $K(A_i, A_j)$ désignant la courbure sectionnelle de la facette plane (A_i, A_j).

Supposons qu'il existe $w \in (0; \pi/2)$, $X \in M_p$, $X \neq 0$ et $r \in N$, de sorte que

$$S_r(V) = S_r(V') = (\text{notation})\ E,\ \forall\ V, V' \in C(X, w, r). \tag{1}$$

Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$, une base orthonormée telle que $X_n = X$. Nous avons

$$E = \sum_{1 \leqq q < p \leqq r} A_q^i A_p^j A_p^k A_q^l B_{ijkl},$$

où $A_q = A_q^i X_i$, $q = 1, \ldots, r$, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ étant une base orthonormée d'un V' $V \in C(X, w, r)$. Pour $2 \leqq r \leqq n-2$, utilisant la méthode exposée dans [1] pour les espaces QC, il résulte:

$$R_{ijkl} = 0,\ R_{ijki} = 0,\ \forall\ i, j, k, l \text{ distincts, } i, j, k, l = 1, \ldots, n;$$

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = R_{\gamma\delta\delta\gamma} = (\text{notation})\ H,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \leqq n-1,\ \alpha \neq \beta,\ \gamma \neq \delta;$$

$$R_{n\alpha\alpha n} = R_{n\beta\beta n} = (\text{notation})\ L,\ \alpha, \beta \leqq n-1 \text{ et, aussi:}$$

$$E = (r-1)(\sin^2 w)H + (r-1)(\cos^2 w)L + C_{r-1}^2 H,$$

donc:

Théorème 1. *S'il existe $X \in M_p$, $X \neq 0$, $w \in (0; \pi/2)$ et $r \in N$, $2 \leqq r \leqq n-2$, de sorte que nous ayons* (1), *alors nous avons une relation de type* (1) $\forall\ w' \in [0; \pi/2]$, $r' \in N$, *où* $2 \leqq r' \leqq n-2$.

Définition. *Un espace de Riemann est un espace $S_r - QC$ s'il existe un champ vectoriel régulier $X \in D^1(M)$ et une fonction $w: M \to (0; \pi/2)$ de sorte que $S_r(V) = S_r(V')$, $\forall\ V, V' \in C(X_p, w(p), r)$, pour chaque $p \in M$.*

Corollaire 1. *Un espace de Riemann $(M; g)$ est $S_r - QC$ si et seulement si $(M; g)$ est un espace QC* ([1]).

Corollaire 2. *Les fonctions L et H sont différentiables; pour $L=H$ un espace S_r-QC est à courbure constante H.*

Maintenant nous pouvons donner un résultat de type Schur; à savoir:

Corollaire 3. *Si un espace de Riemann est r-Stanilov isotrope (c'est-à-dire: pour chaque $p \in M$ $S_r(V)=S_r(V')$, $\forall V, V' \subset M_p$,* dim $V=$ dim $V'=r$), *alors il est à courbure constante (pour $n \geq 3$).*

Soit $\overset{\circ}{R}$ la courbure scalaire, R_{ij} les composantes du tenseur de Ricci, W^i_{jkl} les composantes du tenseur de Weyl par rapport à une base orthonormée $\{X_1, \ldots, X_n\}$ (locale) de champs vectoriels, de sorte que $X_n=X$, où X est le champ distingué.

Théorème 2. *Nous avons*: $R_{ij}=0$, $\forall i \neq j$; $R_{11}=\cdots=R_{n-1\,n-1}=L+(n-2)H$; $R_{nn}=(n-1)L$; $\overset{\circ}{R}=(n-1)(n-2)H+2(n-1)L$: $W^i_{jkl}=0$, $\forall i, j, k, l=1, \ldots, n$.

Corollaire 4. *Soit $(M; g)$ un espace S_r-QC. Si $(M; g)$ est un espace Einstein, alors il est à courbure constante.*

Corollaire 5. *Un espace S_r-QC est conformément euclidien.*

Remarque 1. Pour $L \neq H$, un espace S_r-QC admet un groupe de mouvements à s paramètres, où $s \leq 1+n(n-1)/2$ [4, p. 103].

Remarque 2. Utilisant une technique un peu modifiée, il résulte que les résultats établis restent valables pour $2 \leq r \leq n-1$, $n \geq 3$.

Remarque 3. Les conditions imposées par (1) sont plus faibles que celles données dans [1], mais assurent la propriété d'un espace d'être à courbure QC.

Remarque 4. Comme l'on constate immédiatement, si la condition (1) est satisfaite pour un nombre fini de sous-espaces $V \in C(X, w, r)$, convenablement choisis, alors il résulte, aussi, le Théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Boju, M. Popescu. Espaces à courbure quasi-constante. *J. Diff. Geometry*, **13**, 1978, 373—383.
2. L. P. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton, 1925.
3. Gr. Stanilov. Généralisation de la courbure riemannienne et quelques applications. *Bull. Inst. Math. Acad. Bulg. Sci.*, **14**, 1973, 211—241 (en bulgare).
4. Gh. Vranceanu. Leçons de géométrie différentielle, II^e vol. Bucarest, 1977 (en roumain).

Université de Craiova
Craiova Roumania
Collège „N. Balcescu"
Craiova Roumania

Received 18. 1. 1982
Revised 2. 8. 1982