Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОМБИНАТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Л. А. БОКУТЬ

Статья представляет собой обзор новых результатов по указанной теме, полученных, в основном, в Новосибирске и Омске. Она написана на основе доклада, сделанного автором в Национальной школе по алгебре (Марциганица, 2-8 октября 1981 г.). Содержание:

1. Вложения полугрупп в группы, колец в тела и простые кольца.
2. Комбинаторные методы теории многообразий ассоциативных алгебр.
3. Алгоритмические и комбинаторные вопросы для алгебр Ли и ассоциативных алгебр

1. Вложения полугрупп в группы, колец в тела и простые кольца.

1.1. Мы начнем с одной открытой проблемы, касающейся вложений в конечно определенные (к. о.) простые кольца (группы и полугруппы).

Проблема. *Вложима ли любая конечно порожденная (к. п.) ассоциативная алгебра (алгебра Ли, группа, полугруппа) с разрешимой проблемой равенства в к. о. простую ассоциативную алгебру (алгебру Ли, группу, полугруппу)?*

Условие разрешимости проблемы равенства является необходимым, так как любая к. о. простая алгебра (группа, полугруппа) имеет разрешимую проблему равенства.

В настоящее время известна теорема Буна — Хигмана [1] для групп о том, что любая к. п. группа с разрешимой проблемой равенства вложима в к. п. простую группу, являющуюся подгруппой некоторой к. о. группы. Аналогичный результат справедлив и для ассоциативных, и лиевых алгебр: любая к. п. ассоциативная (лиева) алгебра над простым полем с рекурсивным базисом вложима в к. п. простую ассоциативную (лиеву) алгебру, являющуюся подалгеброй к. о. ассоциативной (лиевой) алгебры. Первая часть предыдущего утверждения следует из результатов [2], [3], вторая — из результатов В. Я. Беляева [4] и Г. П. Кукина [5] (о том, что любая р. о. ассоциативная (лиева) алгебра над простым полем вложима в к. о. ассоциативную (лиеву) алгебру; последние утверждения дают решение проблем, поставленных автором в [6; 7; 8]).

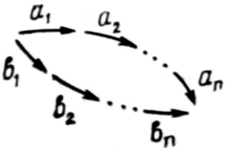
Отметим также, что в настоящее время существует мало примеров к. о. простых бесконечных алгебр, групп и полугрупп (для ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 такой будет алгебра Вейля $\langle x, y: xy - xy = 1\rangle$; для групп — первые примеры были построены Р. Томпсоном и Г. Хигманом, см. [9]).

В работах [2; 3] было доказано, что любая счетная ассоциативная (лиева) алгебра вложима в простую ассоциативную (лиеву) алгебру с тремя (двумя) порождающими. Ранее аналогичный результат для групп (о вложении счетной группы в простую с двумя порождающими) доказал Горюшкин [10]. Имеет место следующая

Теорема 1 [11]. *Любая счетная ассоциативная алгебра вложима в простую ассоциативную алгебру с двумя порождающими.*

1.2. Остановимся теперь на вложениях полугрупп в группы. Новые условия вложимости полугрупп в группы нашел В. Н. Герасимов. (Эти результаты были доложены на XVI Всесоюзной алгебраической конференции, Ленинград, 1981). Они привели к новым, значительно более простым доказательствам основных результатов, полученных в этой области.

Пусть S — полугруппа. Назовем S-сферой клеточное разбиение 2-мерной сферы, такое, что каждая клетка (грань) имеет вид (топологического) многоугольника, ребра которого ориентированы и помечены элементами полугруппы:



(случаи $n=0$ или $m=0$ не исключаются). Одна из граней S-сферы считается выделенной. Верхняя клетка (I) называется коммутативной, если $\alpha_1 \ldots \alpha_n = b_1 \ldots b_m$ в S.

Теорема 2. *Полугруппа S вложима в группу тогда и только тогда, когда для любой S-сферы из коммутативности всех ее граней, кроме выделенной, следует коммутативность выделенной грани.*

Для проверки удобно это условие несколько переделать. Пусть $S=\langle X; A_i=B_i,\ i\in I\rangle$ — представление полугруппы S порождающими и соотношениями. Назовем S-сферу простой, если выполняются следующие условия:

1. Ребра помечены порождающими элементами и все соотношения $a_1 \ldots a_n = b_1 \ldots b_m$, соответствующие граням (I) (кроме выделенной), являются определяющими соотношениями.

2. Граф сферы не содержит циклов.

3. Любые два различные простые пути между двумя точками сферы графически не равны:

$$\begin{array}{ccc} & a_1a_2 \longrightarrow \ldots\ a_n & \\ \nearrow & & \searrow \\ \searrow & & \nearrow \\ & b_1b_2 \longrightarrow \ldots\ b_m & \end{array}, \quad a_1\ n\neq m \vee a_1\neq b_1 \vee a_2\neq b_2 \vee \ \ldots$$

Теорема 3. *Полугруппа $S=\langle X; A_i=B_i,\ i\in I\rangle$ вложима в группу тогда и только тогда, когда для любой простой S-сферы из коммутативности всех ее граней, кроме выделенной, следует коммутативность выделенной грани.*

Известные условия Мальцева [12] и Ламбека [13] (см. также [14]) являются частными случаями этих условий. Назовем некоторую вершину S-сферы максимальной (минимальной), если из нее все стрелки выходят (входят). В противном случае вершина называется промежуточной. Обозначим для ссылок следующее условие через (*):

любой максимальный путь $\to\to\ldots\to$ имеет длину 2 и идет из максимальной вершины в минимальную.

Оказывается, что в этих терминах условия Мальцева и Ламбека можно сформулировать следующим образом.

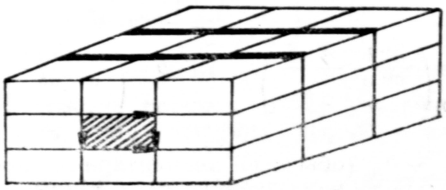
Условия Мальцева — это условие коммутативности выделенных граней всех S-сфер, удовлетворяющих условию (*), и таких, что в каждой промежуточной вершине сходятся ровно 4 ребра:

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d] & \\ {} & {} \arrow[l] \arrow[r] & {} \\ & {} \arrow[u] & \end{tikzcd}.$$

Условия Ламбека соответствуют S-сферам с условием (*), в каждой минимальной вершине которых сходятся ровно два ребра: $\searrow\swarrow$.

Доказательства следуют из теоремы 2 с помощью „перестроек“ произвольной S-сферы в S-сферы с условиями Мальцева или Ламбека.

Теоремы 2 и 3 приводят к новым доказательствам теорем А. И. Мальцева [12] (о неконечной аксиоматизируемости класса полугрупп, вложимых в группы), Досса [15] (о вложимости жестких полугрупп в группы), С. И. Адяна [10], [17] (о том, что полугруппа без левых и правых циклов вложима в группу). Скажем, теорема Мальцева доказывается так: строится серия полугрупп, S_n, каждая из которых соответствует кубу с ребром длины n с „дыркой“

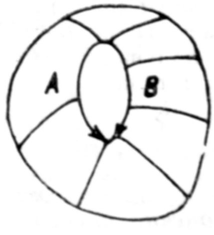


(каждому квадратику

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r"'] & \cdot \arrow[d, "q"] \\ \cdot \arrow[r, "s"'] & \cdot \end{tikzcd},$$

кроме выделенного, ставится в соответствие соотношение $pq = rs$). Полугруппа S_n имеет только одну простую S-сферу — нарисованный куб. Она не вложима в группу (выделенная грань, „дырка“, некоммутативна), но в ней выполняются все „меньшие“ (по отношению к параметру n) условия из теоремы 2 просто потому, что „меньших“ простых S-сфер не существует.

Для доказательства теоремы Адяна достаточно заметить, что в любой простой S-сфере, где S — полугруппа без левых и правых циклов, есть ровно максимальная и ровно одна минимальная вершины. Коммутативность

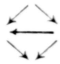
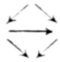


выделенной клетки следует из „гомотопности“ путей A и B на S-сфере.

Условие жесткости в теореме Досса означает, что любую диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

можно „разрезать“, т. е. дополнить до коммутативной диаграммы вида

 или  .

Теперь с помощью перестроек доказывается, что любую S-сферу можно свести к тетраэдру, для которого условие коммутативности проверяется непосредственно.

1.3. В. Н. Герасимов [18] получил также конструкцию универсального Σ-обращающего кольца $R\Sigma^{-1}$, где Σ — некоторое множество матриц над R, и вычислил [19] ядро универсального гомоморфизма $R \to R\Sigma^{-1}$. Вводится множество клеточных матриц

$$M(R, \Sigma) = \left\{ a = \left(\begin{array}{c|c} a' & \widetilde{a} \\ \hline a^0 & 'a \end{array} \right) \right\},$$

где a^0 — верхнетреугольная матрица с элементами Σ по диагонали. Определяются операции

$$a \oplus b = \left(\begin{array}{cc|c} a' & b' & \widetilde{a}+\widetilde{b} \\ \hline a^0 & 0 & 'a \\ 0 & b^0 & 'b \end{array} \right), \qquad a \odot b = \left(\begin{array}{cc|c} a' & \widetilde{a}\, b' & \widetilde{a}\ \widetilde{b} \\ \hline a^0 & 'ab' & 'a\widetilde{b} \\ 0 & b^0 & 'b \end{array} \right)$$

и эквивалентность ($a \sim b$) (обычные элементарные преобразования, не меняющие верхнетреугольного вида матриц a^0, а также вычеркивание строк и столбцов, проходящих через a^0, все клетки которых, кроме диагональной, нулевые).

Теорема 4. *$M(R, \Sigma)/\sim\, \cong R\Sigma^{-1}$. Ядро универсального Σ-обращающего гомоморфизма $R \to R\Sigma^{-1}$ состоит из элементов $r \in R$, таких, что*

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} a' & \widetilde{a} \\ \hline a^0 & 'a \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} b' & \widetilde{b} \\ \hline b^0 & 'b \end{array} \right),$$

где a, $b \in M(R, \Sigma)$.

Отметим некоторые применения этого метода.

Теорема 5 [18]. *Любое кольцо 2-свободных идеалов обратимо: R вложено в $R(R^*)^{-1}$.*

Это решает, в частности, проблему П. Кона ([20], вопрос 1.5.5).

Теорема 6 [19]. *Если R — кольцо n-свободных идеалов, $n \geq 2$, то кольцо $R(R^*)^{-2}$ является кольцом $(n-2)$-свободных идеалов.*

Последняя теорема отвечает на вопрос Дж. Бергмана [21]. В качестве следствия теорем 4 и 5 получается также теорема Кона о вложении колец полусвободных идеалов в тела:

$$R \to R(R^*)^{-1} = R_1 \to R_1(R_1^*)^{-1} = R_2 \to \ldots,$$

$\cup R_i$ — тело.

Теорема 7 [22]. *Класс колец, вложимых в радикальные в смысле Джекобсона, не является конечно аксиоматизируемым.*

Теорема 8 [23]. *Существует не конечно порожденный проективный модуль P над кольцом R, фактор-модуль $P/J(R)P$ которого, конечно, порожден как $R/J(R)$-модуль ($J(R)$ — радикал Джекобсона).*

Это утверждение дает отрицательный ответ на вопрос Д. Лазара [24]. Для PI-колец последний вопрос решается положительно [25].

2. Комбинаторные методы теории многообразий ассоциативных алгебр. В этой части речь будет идти, в основном, о новых результатах А. Р. Кемера [26] в теории многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики 0. Коротко говоря, им построена структурная теория таких многообразий, сводящая их изучение к нильпотентным многообразиям над алгеброй Грассмана. В основе этой теории лежит следующий важный результат, доказанный А. Р. Кемером [27].

Теорема 9. *Радикал Джекобсона конечно порожденной PI-алгебры характеристики 0 нильпотентен.*

Это отвечает на известную проблему В. Н. Латышева, поставленную на Московском математическом конгрессе (1966). Доказательство теоремы 9 опирается на важный результат Ю. П. Размыслова [28].

Пусть k — поле характеристики 0, G — алгебра Грассмана счетного ранга над k, $G=G_0+G_1$, где G_0 — четная компонента, G_1 — нечетная. Положим

$$M_{n,m}=\begin{array}{c} \\ n \end{array}\!\!\left(\begin{array}{c|c} \overset{n}{G_0} & G_1 \\ \hline G_1 & \underset{m}{G_0} \end{array}\right)_{m}$$

— алгебра квадратных матриц порядка $n+m$ указанного вида. Положим, по определению, $M_{\varnothing,n}=M_n$, $M_{n,\varnothing}=M_n \otimes G$, где M_n — алгебра $n\times n$-матриц над k.

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное собственное многообразие ассоциативных над полем характеристики 0. Тогда*

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_k \circ \Big(\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{M}_i\Big),$$

где $\mathfrak{N}_k$ — нильпотентное многообразие индекса k, $\mathfrak{M}_i=\mathrm{Var}(M_{n_i m_i})$.

По-другому, $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_k \circ \mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}'$ — полупервичное многообразие (т. е. его свободная алгебра T-полупервична — степень произвольного ненулевого T-идеала отлична от нуля). Любое T-полупервичное многообразие есть объединение конечного числа T-первичных многообразий (для которых свободные алгебры T-первичны), а T-первичное имеет вид $\mathrm{Var}(M_{n,m})$ для некоторых n, m.

Отметим некоторые следствия теоремы 10 [27; 29].

Следствие 1. *Энгелева ассоциативная алгебра характеристики 0 лиевски нилпотентна.*

Это следствие решает другую проблему В. Н. Латышева.

Назовем многочлен f многочленом Нагата — Хигмана, если

$$\forall n \exists N \quad \{f^n\}^T \supset (\{f\}^T)^N,$$

где $\{f\}^T$ — T-идеал, порожденный f. В этом смысле теорема Нагата — Хигмана утверждает, что многочлен $f=x$ является таким.

Следствие 2. *f — многочлен Нагата — Хигмана тогда и только тогда, когда*

$$f=\bigcup_{n=0}^{\infty} \big(T(M_n \otimes G \otimes G) \setminus T(M_{n+1})\big).$$

Одновременно с теоремой 10 доказывается

Теорема 11. *В любой приведенно свободной ассоциативной алгебре характеристики 0 существует максимальный нильпотентный T-идеал.*

В доказательстве теорем 9—11 большую роль играет алгебра ${}_tF_r$, t, $r \geq 0$, $t+r>0$, порожденная множеством

$$\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} E_i \ \dot{\cup}\ \{y_1, \ldots, y_r\}$$

(каждое E_i счетно) с определяющими соотношениями $e_j^{(i)}ue_k^{(i)} = -e_k^{(i)}ue_j^{(i)}$, где $e^{(i)} \in E_i$, u — произвольный элемент ${}_tF_r$. При $t=0$ получаем свободную алгебру ранга r, при $r=0$ — тензорное произведение t экземпляров алгебры Грассмана счетного ранга. Можно сказать, что алгебра ${}_tF_r$ имеет t грассмановых и r свободных порождающих. Основное утверждение о связи T-идеалов и алгебры ${}_tF_r$ состоит в следующем [29].

Теорема 12. *Пусть $0 \neq \Gamma \triangleleft_T k\langle X\rangle$ — T-идеал свободной алгебры счетного ранга. Тогда существуют такие t, r, что $\Gamma = T({}_tF_r/\Gamma({}_tF_r))$, где $\Gamma({}_tF_r)$ — вербальный идеал, $T(R)$ — идеал тождеств алгебры R.*

Таким образом, Γ является идеалом тождеств „конечно порожденной“ алгебры ${}_tF_r/\Gamma({}_tF_r)$.

Следующая теорема, доказанная Ангелом Поповым, отвечает на вопрос, поставленный, в частности, А. Р. Кемером.

Теорема 13. *Алгебра $G \otimes G$ конечно бизируема (ее базис тождеств состоит из двух тождеств — $[[[x_1x_2][x_3x_4]]x_5]=0$ и $[[x_1x_2]^2x_2]=0$).*

Отмечу в заключение этой части, что ряд результатов по комбинаторной теории многообразий ассоциативных алгебр получен в работах [30—33]. Р. Гончигдорж [30—32] описал многообразия с дистрибутивным (справа, слева, с двух сторон) относительно объединения и пересечения произведением подмногообразий. Приведем один из его результатов [30; 32].

Теорема 14. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие ассоциативных алгебр над бесконечным полем F, $\operatorname{ch} F \neq 2$. Тогда $\mathfrak{M}$-произведение дистрибутивно относительно пересечения тогда и только тогда, когда идеал тождеств $\mathfrak{M}$ содержит многочлены*

$$x_1x_2x_3x_4 - x_2x_1x_4x_3 - \alpha[[x_1x_4][x_2x_3]] + \beta[x_1x_4, x_3x_2] + \gamma[x_4x_1, x_2x_3],$$

$$[[x_1x_2], x_3x_4x_5] - \sum_{\sigma\in S(s)} \{\gamma_\sigma[[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]]x_{\sigma(5)}$$

$$+ \beta_\sigma x_{\sigma(1)}[[x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}][x_{\sigma(4)}x_{\sigma(5)}]] + \delta_\sigma[[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]]$$

и либо $\operatorname{ch} F=0$, либо $\operatorname{ch} F=p>2$, и идеал тождеств $\mathfrak{M}$ содержит элемент $x_1x_2 \ldots x_{p+1}x_{p+2}$.

3. Алгоритмические и комбинаторные вопросы для алгебр Ли и ассоциативных алгебр. 3.1. В этом пункте мы приведем новые результаты Г. П. Кукина, доложенные на XVI алгебраической конференции, Ленинград, 1981. Пусть P_i — класс к. о. алгебр Ли над полем k, в которых разрешима проблема линейной зависимости любого множества с $\leq i$ элементами. Имеем

$$P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_i \supseteq \ldots,$$

$P = \bigcap P_i$ — к. о. алгебры Ли с рекурсивным базисом, P_1 — к. о. алгебры Ли с разрешимой проблемой равенства. Через P_i', P' обозначим аналогичные классы ассоциативных алгебр.

Теорема 15. *Над произвольным бесконечным полем k класса $P_i(P_i')$, $i=1, 2, \ldots$, попарно различны.*

В частности, это отвечает на вопрос А. Л. Шмелькина и автора о несовпадении классов P_1 и P.

Аналогичным методом доказана.

Теорема 16. *Существует конечно определенная алгебра Ли (ассоциативная алгебра) с неразрешимой проблемой равенства, являющаяся 3-разрешимой (коммутаторный идеал нильпотентен).*

Аналогичный результат для групп принадлежит О. Б. Харламповичу [34].

3.2. В. В. Талапов получил ряд результатов по проблеме равенства для алгебр Ли и групп (они доложены на XVI Всесоюзной алгебраической конференции, Ленинград, 1981, см. также [35]).

Теорема 17. *Полинильпотентная алгебра Ли с 1 соотношением имеет разрешимую проблему равенства.*

Теорема 18. *Любая метабелева алгебра Ли вложима в алгебраически замкнутую метабелеву алгебру Ли.*

Предыдущие теоремы доказаны с использованием вербальных сплетений алгебр Ли и развивают метод композиции, идущий от А. И. Ширшова.

3.3. Следующие два результата аналогичны теореме Столлингза—Суона [37; 38] о том, что почти свободная группа без кручения является свободной.

Теорема 19 [39]. *Почти свободная p-алгебра Ли без алгебраических элементов свободна.*

Теорема 20 [40]. *Почти свободная ассоциативная алгебра без алгебраических элементов свободна.*

3.4. В этом пункте мы изложим несколько результатов А. Т. Колотова [41] о к. п. алгебрах и их функциях роста.

Пусть $A=\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ — к. п. ассоциативная алгебра над полем k, $g(n)$ — размерность подпространства, порожденного словами длины $\leq n$ от порождающих (которые считаются фиксированными). Будем называть $g(n)$ функцией роста A. Алгебру A назовем слабо алгебраической, если алгебраично любое слово от порождающих.

Теорема 21. *Слабо алгебраическая алгебра с функцией роста $g(n)$, такой, что*

$$\exists n \quad g(n)<n(n+3)/2,$$

является конечномерной. Существует даже не конечно определенная алгебра A со слабым тождеством $u^5=0$ (где u — любое слово от порождающих) и такое, что

$$\forall n \quad g(n)=n(n+3)/2.$$

Алгебра A из этой теоремы строится по бесконечной последовательности, получающейся из слова xy последовательной заменой $x\rightarrow xy$, $y\rightarrow xxy$:

$$\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{x}\,\dot{y}xxyxyxxy\ldots$$

Построенная последовательность обладает двумя свойствами: она не содержит пятой степени никакого слова от x, y и для любого n в ней имеется ровно $(n+1)$ различных подслов длины n. Базой алгебры A являются все слова от $x_1 y$ и произведение $u\,.\,v$ двух слов u, v равно 0, если слово uv не встречается в предыдущей последовательности (в противном случае $u\,.\,v=uv$).

Следующая теорема дает оценку высоты в теореме Ширшова о высоте [42].

Теорема 22. *Высота r-порожденной PI-алгебры* $A=\langle a_1, \ldots, a_2\rangle$, *удовлетворяющей тождеству степени n, ограничена числом* $n^{r^{n-1}}$

Это означает, что любое слово v от порождающих представляется в виде линейной комбинации слов $v_{i_1}^{k_1}\ldots v_{i_h}^{k_h}$, где $h\leq n^{r^{n-1}}$ и каждое слово v_i имеет длину, меньшую n.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. W. Boone, G. Higman. An algebraic characterization of groups with soluble word problem. *J. Austral. Math. Soc.*, **2**, 1974, 41—53.
2. Л. А. Бокуть. Вложения в простые ассоциативные алгебры. *Алгебра и логика*, **15**, 1976, 117—142.
3. Л. А. Бокуть. Вложения в простые и алгебраически замкнутые алгебры Ли. *Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР*. **148**, 1978, 30—42.
4. В. Я. Беляев. Подкольца конечнопорожденных ассоциативных колец. *Алгебра и логика*, **24**, 1978, 627—638.
5. Г. П. Кукин. Подалгебры конечноопределенных лиевых алгебр. *Алгебра и логика*, **18**, 1979, 311—327.
6. Днестровская тетрадь. Нерешенные задачи теории колец и модулей. Новосибирск, 1976.
7. Л. А. Бокуть. Неразрешимость проблемы равенства и подалгебры конечно определенных алгебр Ли. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **36**, 1972, 1173—1219.
8. Л. А. Бокуть. Некоторые вопросы теории колец. *Сердика*, **3**, 1977, 299—308.
9. Г. Хигман. Конечно определенные бесконечные простые группы. *Математика, Новое в зарубежной науке*, № 21. Разрешимые и простые бесконечные группы, Москва, 1981, 87—147.
10. А. Н. Горюшкин. Вложение счетных групп в 2-порожденные простые группы. *Матем. заметки*, **16**, 1974, 231—235.
11. Л. А. Бокуть. Вложение счетных ассоциативных алгебр в простые с 2 порождающими. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, часть первая, Ленинград, 1981, с. 22.
12. А. И. Мальцев. О включении ассоциативных систем в группы. *Матем. сб.*, **6**, 1939, 331—336; II — там же, **8**, 1940, 251—264.
13. J. Lambek. The immersibility of a semigroup into a group. *Canad. J. Math.*, **3**, 1951 34—43.
14. А. Клиффорд, Г. Престон. Алгебраическая теория полугрупп, том 2. Москва, 1972.
15. R. Doss. Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe. *Bull. Sci. Math.*, **72**, 1948, 139—150.
16. С. И. Адян. О вложимости полугрупп в группы. *Доклады АН СССР*, **133**, 1960, 255—257.
17. С. И. Адян. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп. *Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР*, **85**, 1966.
18. В. Н. Герасимов. Обращающие гомоморфизмы колец. *Алгебра и логика*, **18**, 1979, 648—663.
19. В. Н. Герасимов. Локализации ассоциативных колец. — В: *IV Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей*. Кишинев, 1980, 25.
20. П. Кон. Свободные кольца и их связи. М., 1975.
21. G. Bergman. Coproducts and some universal ring constructions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **200**, 1974, 33—88.
22. А. И. Кулев. Бесконечная базируемость квазимногообразия колец, вложимых в радикальные кольца. — В: *IV Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей*, Кишинев, 1980, 62.
23. В. Н. Герасимов, И. И. Сахаев. О проблеме Д. Лазара для проективных модулей. — В: *IV Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей*. Кишинев, 1980, 25.
24. D. Lazar. Liberté des gros modules projectifs. *J. Algebra*, **37**, 1974, 437-451.
25. S. Jondroup. Flat and projective modules. *Math. Scand.*, **43**, 1978, 336-342.
26. А. Р. Кемер. Разложение многообразий, Всесоюзная алгебраическая конференция, часть первая, Л., 1961, 67.
27. А. Р. Кемер. Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно-порожденной *PI*-алгебры. *Доклады АН СССР*, **255**, 1980, 793—796.

28. Ю. П. Размыслов. О радикале Джекобсона в *PI*-алгебрах. *Алгебра и логика*, 13, 1974, 337—360.
29. А. Р. Кемер. О нематричных многообразиях. *Алгебра и логика*, **19**, 1980, 255—283.
30. Р. Гончигдорж. О многообразиях ассоциативных алгебр, произведение подмногообразий которых дистрибутивно относительно пересечения. *Сиб. матем. ж.*, **18**, 1977, 1296—1302.
31. Р. Гончигдорж. О многообразиях ассоциативных алгебр с U-дистрибутивных произведением подмногообразий. *Сиб. матем. ж.*, **20**, 1979, 529—538.
32. Р. Гончигдорж. О многообразиях ассоциативных алгебр над бесконечным полем характеристики $p>0$. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, часть вторая, Ленинград, 1981, 34.
33. Р. Гончигдорж, Ю. Н. Мальцев. О многообразиях ассоциативных алгебр с коммутативным группоидом подмногообразий. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, часть первая, Ленинград, 1981, 41.
34. О. Г. Харлампович. Конечноопределенная разрешимая группа с неразрешимой проблемой равенства. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **45**, 1981, 852—873.
35. В. В. Талапов. О разрешимых алгебрах Ли с одним определяющим соотношением. *Сиб. матем. ж.*, **22**, 1981, 176—181.
36. Н. С. Романовский. О некоторых алгоритмических проблемах для разрешимых групп. *Алгебра и логика*, 13, 1974, 26—34.
37. J. R. Stollings. Groups of dimension 1 are locally free. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74**, 1968, 361-364.
38. R. G. Swan. Groups of cohomological dimension one. *J. Algebra*, **12**, 1969, 585-610.
39. Г. П. Кукин. О дифференцированиях свободных алгебр Ли. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, часть первая, Л., 1981, 91.
40. А. Т. Колотов. Почти свободные ассоциативные алгебры. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, часть первая, Л., 1981, 76.
41. А. Т. Колотов. Апериодические последовательности и функции роста алгебр. *Алгебра и логика*, **20**, 1981, 138—154.
42. А. И. Ширшов. О кольцах с тождественным соотношением. *Матем. сб.*, **43**, 1957, 277—283.

Институт математики СО АН СССР
630090 Новосибирск 90 СССР

Поступила 18. II. 1982