Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КРАТНОСТЬ РАМСЕЯ ПРИ 2-РАСКРАСКАХ РЕБЕР ПОЛНОГО ГРАФА С ЧЕТЫРНАДЦАТЬЮ ВЕРШИНАМИ

ИВАН Ж. ПАШОВ

Рассматриваются всевозможные 2-раскраски ребер полного графа $K_{R(p,q)}$, где $R_{(p,q)}$ — число Рамсея. Минимум суммы чисел одноцветных p-клик и q-клик (соответственно первого и второго цвета) называется кратностью Рамсея — $M(p, q)$.
В работе доказывается, что $M(3, 5)=4$.

Рассматриваются только обыкновенные графы, т. е. конечные, неориентированные графы, без петель и кратных ребер. Через K_n обозначается полный граф с n-вершинами. Множество из p-вершин графа называется p-кликой, если любые две из этих вершин связаны ребром. Предположим что задана 2-раскраска графа, если каждое ребро графа покрашено в красный или зеленый цвет. Две 2-раскраски полного графа K_n изоморфны, если существует перестановка φ множества его вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$, при которой ребро, связывающее вершины $\varphi(v_i)$, $\varphi(v_j)$ имеет такой же цвет, как и ребро, связывающее вершины v_i, v_j.

Обозначим через $\Omega(n;\ i,\ p;\ j,\ q)$ множество из всех 2-раскрасок ребер полного графа с n-вершинами K_n, при которых имеются ровно i красные p-клики и j зеленые q-клики. При заданной α, $\alpha\in\Omega(n;\ i,\ p;\ j,\ q)$, будем обозначать через $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^i$ красные p-клики, а через $\Delta_2^1, \Delta_2^2, \dots, \Delta_2^j$ — зеленые q-клики. В этих обозначениях число Рамсея — $R(p,q)$, называется наименьшее натуральное число n, при котором $\Omega(n;\ o,\ p;\ o,\ q)=\emptyset$. Существование чисел $R(p, q)$ доказано впервые Рамсеем [7]. Очевидно $R(p, q)=R(q, p)$ и $R(p, 2)=p$. Известны следующие числа Рамсея: $R(3, 3)=6$, $R(3, 4)=9$, $R(3, 5)=14$, $R(3, 6)=18$, $R(3, 7)=23$, $R(4, 4)=18$.

Следуя [8], назовем кратностью Рамсея $M(p, q)$ — наименьшее значение суммы $i+j$ при $\Omega(R(p, q);\ i,\ p;\ j,\ q)\neq\emptyset$. Из определения чисел Рамсея следует, что $M(p, q)\geq 1$. $M(p, 2)=1$, $M(p, q)=M(q, p)$. Результаты Гудмана [9] дают $M(3, 3)=2$. Якобсон [10] доказал неравенство, оценивающее сверху числа $M(p, q)$, в частности $M(3, 6)\leq 4$, $M(4, 4)\leq 12$ и $M(3, 5)\leq 4$.

В [2] и [3] Н. Хаджииванов и Н. Ненов получили $M(3, 4)=1$ Н. Ненов [1] доказал, что, если $R(p, q)=R(p-1, q)+R(p, q-1)$, $p\geq 3$, $q\geq 3$, то $M(p, q)\geq 2$. В частности $M(4, 4)\geq 2$ и

$$M(3,5)\geq 2. \tag{2}$$

В [4] доказано, что $M(4, 4)\geq 3$. В [5] получено, что $M(3, 5)\geq 3$. Для полноты настоящей работы приведем легко получающееся с помощью результатов из [6] доказательство последнего утверждения (теорема 1).

Основной результат этой работы — равенство $M(3, 5)=4$ (теорема 2).

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 192—197.

При доказательстве теоремы 1 будем пользоваться следующими предложениями и обозначениями:

(3) $$\Omega(13;\ 0,\ 3;\ 1,\ 5)=\emptyset\ [6].$$

Пусть $\alpha\in\Omega(n;\ i,\ p;\ j,\ q)$. Обозначим через $A_1^\alpha(v)$ (соответственно $A_2^\alpha(v)$), множество вершин, связанных красными (соответственно — зелеными) ребрами с вершиной v. Через Q будем обозначать множество вершин v, $v\notin\Delta_1^k$, $v\notin\Delta_2^l$, $k=1,\ 2,\ldots,i$, $l=1,\ 2,\ldots,j$.

(4) Если $\alpha\in\Omega(13;\ 1,\ 3;\ 0,5)$, то для любой v из Q $|A_1^\alpha(v)|=4$ [6].

(5) При $\alpha\in\Omega(n;\ i,\ 3;\ j,\ 5)$ и $v\notin\Delta_2^l$, $l=1,2,\ldots,j$, для любого множества S, удовлетворяющего условием $S\subset A_2^\alpha(v)$, $S\not\supset\Delta_1^k$, $k=1,2,\ldots,i$, выполняется $|S|\leqq 8$.

Действительно, в противном случае из $R(3,\ 4)=9$ получим, что существует зеленая 4-клика Δ, $\Delta\subset S$. Тогда $\Delta\cup\{v\}$ — зеленая 5-клика, что является противоречием.

Пусть $\alpha\in\Omega(n;\ i,\ p;\ j,\ q)$ и v — вершина K_n. Двураскраска α индуцирует на графе K_n-v тоже 2-раскраску. Ее мы будем обозначать через $\alpha-v$. Понятно, что $\alpha-v\in\Omega(n-1;\ i_1,\ p;\ j_1,\ q)$, $i_1\leqq i$, $j_1\leqq j$.

Т е о р е м а 1. $M(3,5)\geqq 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2) достаточно доказать, что $M(3,\ 5)\neq 2$. Допустим, что $M(3,\ 5)=2$, т. е. существует α, $\alpha\in\Omega(14;\ i,3;\ 2-i,5)$ для некоторого $i\in\{0,\ 1,\ 2\}$. Если $i=0$ (соответственно $i=1$), то существует вершина v такая, что $v\in\Delta_2^2$ (соответственно $v\in\Delta_1^1$) и $v\notin\Delta_2^1$. Тогда $\alpha-v\in\Omega(13;\ 0,\ 3;\ 1{,}5)$, что противоречит (3).

Следовательно, $i=2$. Пусть $v_1\in\Delta_1^1\setminus\Delta_1^2$. Понятно, что $|A_2^\alpha(v_1)\cap\Delta_1^2|\geqq 1$. Из (5) получим, что $|A_2^\alpha(v_1)\cap Q|\leqq 7$. Тогда существует вершина v_2 такая, что $v_2\in Q$, $A_1^\alpha(v_1)\ni v_2$. Так как $\alpha-v_1\in\Omega(13;\ 1,\ 3;\ 0,\ 5)$, из (4) получим, что $|A_1^\alpha(v_2)|=5$. Следовательно, $A_1^\alpha(v_2)$ — зеленая 5-клика, что является противоречием.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся еще следующие утверждения:

(6) *Если* $\alpha\in\Omega(13;\ 0,\ 3;\ 0,\ 5)$, *то для любой* v $|A_1^\alpha(v)|=4$ [11].

(7) *Если* $\alpha\in\Omega(14,\ i,\ 3;\ j,\ 5)$, *то для любой* v из Q *существует* $k\in\{1,\ 2,\ldots,i\}$ *или* $l\in\{1,\ 2,\ldots,j\}$, *такое, что* $A_1^\alpha(v)\supset\Delta_2^l$, *или* $A_2^\alpha(v)\supset\Delta_1^k$. *Отметим*, что при $j\leqq 5$ *в случае* $A_1^\alpha(v)\supset\Delta_2^l$ *на самом деле* $A_1^\alpha(v)=\Delta_2^l$ [1].

(8) *Пусть* $\alpha\in\Omega(14;\ i,\ 3;\ j,\ 5)$, $j\leqq 5$, *и для любых* $k\in\{1,\ 2,\ldots,i\}$, $l\in\{1,\ 2,\ldots,j\}$, $\Delta_1^k\cap\Delta_2^l\neq\emptyset$. *Если* s — *число вершин* v *из* Q, *таких, что* $A_1^\alpha(v)=\Delta_2^{l_v}$ *при некотором* $l_v\in\{1,\ 2,\ldots,j\}$, *то* $s\leqq j$.

При $i=0$ (8) является частным случаем неравенства (12) из [5].

При $i\geqq 1$ допустим, что $s>j$. Тогда существуют вершины $v_1\neq v_2$ из Q, такие, что $A_1^\alpha(v_1)=A_1^\alpha(v_2)=\Delta_2^l$ при некотором $l\in\{1,\ 2,\ldots,j\}$. Пусть $A_2^\alpha(v_1)\cap A_2^\alpha(v_2)=F$. Так как $F\cap\Delta_2^l=\emptyset$, то $F\not\supset\Delta_1^k$, $k=1,2,\ldots,i$. Поскольку $R(3,\ 3)=6$ и $|F|=7$, существует зеленая 3-клика Δ, $\Delta\subset F$. Тогда $\Delta\cup\{v_1,\ v_2\}$ — зеленая 5-клика, что противоречит условию $v_1\in Q$.

Теорема 2. $M(3,5)=4$.

Доказательство. Согласно теореме 1 и неравенству (1), достаточно доказать, что $M(3,5)\neq 3$. Так как $\Omega(14;\ 0,\ 3;\ 3,5)=\varnothing$ [6], нам осталось доказать, что $\Omega(14;\ i,\ 3;\ 3\text{-}i,\ 5)=\varnothing$, $i=1, 2, 3$.

Допустим сначала, что существует α, $\alpha\in\Omega(14;\ 1,\ 3;\ 2{,}5)$. Существует вершина v, $v\in\Delta_1^1\setminus(\Delta_2^1\cup\Delta_2^2)$, и, следовательно, $\alpha-v\in\Omega(13;\ 0,\ 3;\ 2{,}5)$. Согласно теореме 2 из [6] $|\Delta_2^1\cap\Delta_2^2|=2$. Если $\Delta_1^1\cap(\Delta_2^1\cup\Delta_2^2)=\varnothing$, то $|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_2^1|\geq 2$, $v\in\Delta_1^1$ и $\sum\limits_{v\in\Delta_1^1}|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_2^1|\geq 6$. Тогда существует v, $v\in\Delta_2^1$, $|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_1^1|\geq 2$, т. е. $\alpha\in\Omega(14,\ i,\ 3;\ 2,\ 5)$, $i>1$. Следовательно, $\Delta_1^1\cap(\Delta_2^1\cup\Delta_2^2)\neq\varnothing$. Если существует вершина v, $v\in\Delta_1^1\cap(\Delta_2^1\cup\Delta_2^2)$ и $v\notin\Delta_2^i$, для некоторого $i\in\{1,\ 2\}$, то $\alpha-v\in\Omega$ $(13;\ 0,\ 3;\ 1,5)$, что противоречит (3). Следовательно, $|\Delta_1^1\cap\Delta_2^1\cap\Delta_2^2|=1$. Пусть $\Delta_1^1\cap\Delta_2^1\cap\Delta_2^2=\{v_1\}$. Из (7) и (8) следует

$$|A_1^\alpha(v_1)\cap Q|\leq 2. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$|A_1^\alpha(v_2)\cap Q|\geq 3,\ \text{где}\ \{v_2\}=(\Delta_2^1\cap\Delta_2^2)\setminus\{v_1\}. \tag{10}$$

Действительно, в противном случае существует множество W, $W\subset A_2^\alpha(v_2)$, $|W|\geq 9$, $|W\cap\Delta_1^1|=1$, $W\not\ni v_1$. Так как $R(3,4)=9$, множество W содержит зеленую 4-клику Δ. Зеленая 5-клика $\Delta\cup\{v_2\}\neq\Delta_2^i$, $i=1{,}2$, что является противоречием.

Из (9) и (10) получим, что существует вершина v_3, $v_3\in Q$, $A_1^\alpha(v_3)\ni v_2$, $A_1^\alpha(v_3)\not\ni v_1$. Так как $\alpha-v_2\in\Omega(13;\ 1,\ 3;\ 0,5)$, из (4) получим, что $|A_1^\alpha(v_3)|=5$. Поскольку $v_3\notin\Delta_1^1(v_3)A_1^\alpha$ — зеленая 5-клика, что противоречит $v_1\notin A_1^\alpha(v_3)$.

Допустим теперь, что существует α, $\alpha\in\Omega(14;\ 2{,}3;\ 1{,}5)$. Если имеется вершина v такая, что $v\in(\Delta_1^1\cap\Delta_1^2)\setminus\Delta_2^1$, то $\alpha-v\in\Omega(13;\ 0,\ 3;\ 1{,}5)$, а это противоречит (3). Следовательно, либо

$$\Delta_1^1\cap\Delta_1^2=\varnothing, \tag{11}$$

либо

$$\Delta_1^1\cap\Delta_1^2\neq\varnothing\ \text{и}\ \Delta_1^1\cap\Delta_1^2\subset\Delta_2^1. \tag{12}$$

Пусть выполняется (11). Для любой v, если $v\in\Delta_1^i\setminus\Delta_2^1$, $i=1,\ 2$, то выполняется $|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_2^1|\geq 2$. Если для некоторого $i\in\{1,\ 2\}$ $\Delta_1^i\cap\Delta_2^1=\varnothing$, то $\Sigma|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_2^1|\geq 6$, $v\in\Delta_1^i$. Тогда существует v, $v\in\Delta_2^1$, $|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_1^i|\geq 2$, что невозможно при (11). Следовательно, имеются вершины v_i, $\{v_i\}=\Delta_1^i\cap\Delta_2^1$, $i=1,\ 2$.

Если для некоторой v, $v\in Q$, $A_1^\alpha(v)\ni v_i$, $i=1$ или 2, из (4) получим, что $|A_1^\alpha(v)|=5$ (так как $\alpha-v_i\in\Omega(13;\ 1,3;\ 0,\ 5)$). Тогда $A_1^\alpha(v)=\Delta_2^1$. Согласно (8), существуют вершины v_i из Q такие, что $A_2^\alpha(v_i)\supset\{v_1,\ v_2\}$, $i=3,\ 4,\ 5,\ 6$. Пусть $U=\{v_i\mid i=3,\ 4,\ldots,8\}$, где $\{v_7,\ v_8\}\subset\Delta_2^1\setminus\{v_1,\ v_2\}$. Тогда $U\not\supset\Delta_1^i$, $i=1,\ 2$. Так как $R(3{,}3)=6$, то существует зеленая 3-клика Δ, $\Delta\subset U$. Понятно, что

$\Delta \cap \{v_3, v_4, v_5, v_6\} \neq \emptyset$. Тогда зеленая 5-клика $\Delta \cup \{v_1, v_2\}$ отлична от Δ_2^1, что является противоречием.

Допустим теперь, что выполняется (12). Понятно, что существует вершина v_1, для которой $\Delta_1^1 \cap \Delta_1^2 \cap \Delta_2^1 = \Delta_1^1 \cap \Delta_1^2 = \{v_1\}$. Из (6) получим, что

(13) для любой вершины v, если $v \neq v_1$, то $|A_1^\alpha(v) \setminus \{v_1\}| = 4$.

Обозначим через B и C соответственно множества $\Delta_2^1 \setminus \{v_1\}$ и $(\Delta_1^1 \cup \Delta_1^2) \setminus \{v_1\}$.

Если $v \in Q$, то $|A_1^\alpha(v) \cap B| \geqq 2$ (иначе из (7) получим $v_1 \in A_2^\alpha(v)$ и вершина v образует с множеством $A_2^\alpha(v) \cap \Delta_2^1$ зеленую q-клику, $q \geqq 5$). Следовательно, $\Sigma |A_1^\alpha(v) \cap B| \geqq 10$, $v \in Q$. Отсюда и из (13) получим, что $\Sigma |A_1^\alpha(v) \cap C| \leqq 4.4 - 10 = 6$, $v \in B$. Так как ровно две пары вершин из множества C связаны красными ребрами, из (13) получим, что $\Sigma |A_1^\alpha(v) \cap Q| \geqq 4.3 - 6 = 6$, $v \in C$. Поскольку $|Q| = 5$, существует вершина v_2 из Q, для которой $|A_1^\alpha(v_2) \cap C| \geqq 2$. Так как v_2 не принадлежит ни одной красной 3-клике, множество $A_1^\alpha(v_2) \cap C$ содержит по одной вершине из каждой $\Delta_1^1 \setminus \{v_1\}$, $\Delta_1^2 \setminus \{v_1\}$. Согласно (7), имеем $A_1^\alpha(v_2) \supset \Delta_2^1$ и $|A_1^\alpha(v_2)| \geqq 5+2$, т. е. $A_1^\alpha(v_2)$ — зеленая q-клика, $q \geqq 7$, что является противоречием.

Допустим, наконец, что существует α, $\alpha \in \Omega(14;\ 3, 3;\ 0, 5)$. Обозначим $T = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 \cup \Delta_1^3$. Возможны два случая:

(14) Δ_1^i, $i = 1, 2, 3$, попарно не пересекаются;

(15) некоторые две из Δ_1^i, $i = 1, 2, 3$, пересекаются.

В случае (14) для любой v, $v \in \Delta_1^i$, выполняется $|A_2^\alpha(v) \cap \Delta_1^j| \geqq 2$, где i, $j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Из (5) следует, что для любой v из T $|A_2^\alpha(v) \cap Q| \leqq 8 - 2.2$, т. е. $|A_1^\alpha(v) \cap Q| \geqq 1$. Таким образом $\Sigma |A_1^\alpha(v) \cap Q| \geqq 9$, $v \in T$.

С другой стороны, из (7) получим

(16) для любой v из Q $|A_1^\alpha(v) \cap T| \leqq 2$.

Тогда $\Sigma |A_1^\alpha(v) \cap T| \leqq 10$, $v \in Q$. Следовательно, $|A_1^\alpha(v) \cap T| = k$, где $k = 2$ для любой v из Q, за исключением (быть может) одной v_0, $v_0 \in Q$, для которой $k = 1$.

Допустим, что имеется вершина v_0. Существует вершина v', $v' \in Q \cap A_2^\alpha(v_0)$ (в противном случае $|A_1^\alpha(v_0)| = 5$ и $A_1^\alpha(v_0)$ — зеленая 5-клика). Множество $X = A_2^\alpha(v_0) \cap A_2^\alpha(v')$ имеет хотя бы шесть элементов (из T). Так как $A_1^\alpha(v')$ содержит две вершины из разных Δ_1^i, в множество X входит одна (или ни одна) из Δ_1^i, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $M\ (3,3) = 2$, множество X содержит зеленую 3-клику. Последняя образует зеленую 5-клику с v_0 и v', что является противоречием.

Следовательно, вершина v_0 не существует. Тогда некоторая вершина v'' из T связана красными ребрами с двумя вершинами v_1, v_2 из Q. Согласно (16), имеем $|A_2^\alpha(v_1) \cap A_2^\alpha(v_2)| \geqq 6$. Рассуждая для вершин v_1, v_2 точно так же, как было сделано выше для v_0, v', снова получим противоречие.

Пусть теперь выполняется (15), и вершина v_1 принадлежит хотя бы двум из красных 3-клик. Тогда $\alpha - v_1 \in \Omega(13;\ i,\ 3;\ 0,\ 5)$, $i = 0$ или 1. Из (6) или (4) (соответственно) получим, что для любой v из Q $|A_1^\alpha(v)\setminus\{v_1\}|=4$. Если для некоторой v из Q $v_1\notin A_1^\alpha(v)$, то $A_1^\alpha(v)$ — зеленая 5-клика. Следовательно,

$$(17)\qquad A_2^\alpha(v_1)\supset Q.$$

Согласно (5), получим $|Q|\leqq 8$, т. е. $|T|\geqq 6$. Следовательно, имеем две возможности, исчерпывающие рассматриваемый случай (15),

$$(18)\qquad \Delta_1^i\cap\Delta_1^j=\{v_1\},\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\quad i\neq j;$$

(19) существует вершина, принадлежащая ровно двум из красных 3-клик.

Если выполняется (18), ровно три пары вершин из множества $T\setminus\{v_1\}$ связаны красными ребрами. Так как $\alpha-v_1\in\Omega(13;\ 0{,}3;\ 0{,}5)$, из (6) получим, что $|A_1^\alpha(v)\cap Q|=3$ и $\Sigma|A_1^\alpha(v)\cap Q|=18$, где $v\in T\setminus\{v_1\}$. Поскольку $|Q|=7$, существует вершина v из Q, для которой $|A_1^\alpha(v)\cap T|\geqq 3$, что является противоречием, так как (16) выполняется и в случае (15).

Пусть теперь выполняется (19). Существует вершина v_1, принадлежащая ровно двум красным 3-кликам Δ_1^1, Δ_1^2, и такая, что $|A_2^\alpha(v_1)\cap\Delta_1^3|\geqq 2$. Из (17) и (5) следует, что $|Q|\leqq 6$ и $|T|\geqq 8$.

Следовательно, $\Delta_1^1\cap\Delta_1^2=\{v_1\}$ и $\Delta_1^i\cap\Delta_1^3=\varnothing$, $i=1, 2$. Так как $\alpha-v_1\in\Omega(13;\ 1{,}3;\ 0{,}5)$, из (4) получим, что

$$(20)\qquad \text{для любой } v, \text{ если } v\notin\Delta_1^3\cup\{v_1\}, \text{ то } |A_1^\alpha(v)\setminus\{v_1\}|=4.$$

Обозначим $T_1=(\Delta_1^1\cup\Delta_1^2)\setminus\{v_1\}$. Из (20) следует, что при $v\in T_1$ $|A_1^\alpha(v)\cap(\Delta_1^3\cup Q)|=3$. Поскольку $|A_1^\alpha(v)\cap\Delta_1^3|\leqq 1$, должно выполняться

$$(21)\qquad \text{для любой } v \text{ из } T_1,\ |A_1^\alpha(v)\cap Q|\geqq 2.$$

Так как $|T_1|=4$, а $|Q|=6$, существует вершина v_2 из Q такая, что $|A_1^\alpha(v_2)\cap T_1|\geqq 2$. Поскольку v_2 не принадлежит ни одной красной 3-клике, v_2 связана красными ребрами ровно с по одной вершине v_3, v_4 из каждой Δ_1^1, Δ_1^2. Согласно (20) и (16), имеем $|A_1^\alpha(v_2)\cap Q|=2$ и $|A_2^\alpha(v_2)\cap Q|=3$. Тогда некоторые две вершины v_5, v_6 из $A_2^\alpha(v_2)\cap Q$ связаны зеленым ребром. Так как $v_i\in A_1^\alpha(v_2)$, $i=3, 4$, и $v_2\notin T$, то $A_1^\alpha(v_i)\subset A_2^\alpha(v_2)\cup\{v_2\}$. Из (21) следует, что либо v_3 и v_4 связаны красным ребром с одной и той же вершиной v_0 из $A_2^\alpha(v_2)\cap Q$, либо некоторая из v_3, v_4 связана красным ребром с некоторой из v_5, v_6.

В первом случае, согласно (16), множество $A_2^\alpha(v_2)\cap A_2^\alpha(v_0)$ имеет шесть элементов (из T) и содержит единственную красную 3-клику Δ_1^3. Из $M(3, 3)=2$ следует, что это множество содержит зеленую клику. Последняя образует зеленую 5-клику с v_2 и v_0.

Во втором случае для множества $Y=A_2^\alpha(v_2)\cap A_2^\alpha(v_5)\cap A_2^\alpha(v_6)$ из (16) получим $|Y|\geqq 3$, причем в случае равенства Y не является красной 3-кликой (так как $v_1\in Y$, а $v_i\notin Y$, $i=3,\ 4$). Следовательно, существуют вершины v_7, v_8 из Y, связанные зеленым ребром. Тогда $\{v_2,\ v_5,\ v_6,\ v_7,\ v_8\}$ — зеленая 5-клика, что является противоречием.

Теорема 2 доказана полностью.

Автор благодарен Н. Г. Хаджииванову и Н. Д. Ненову за постановку задачи и оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Ненов. Некоторые замечания о Рамсеевских кратностях. — В: *Математика и математическо образование*. С., 1981, 176—179.
2. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О некоторых двуцветных раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Годишник СУ*, **71** (в печати).
3. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глисона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 631—633.
4. И. Ж. Пашов. Одно свойство 2-раскрасок ребер полного графа с восемнадцатью вершинами. — В: *Математика и математическо образование*. С., 1982, 262—264.
5. Н. Д. Ненов, И. Ж. Пашов, Н. Г. Хаджииванов. О числе монохроматических р-клик в двуцветных раскрасках ребер некоторых полных графов. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 439—442.
6. Н. Д. Ненов, И. Ж. Пашов, Н. Г. Хаджииванов. О некоторых экстремальных двуцветных раскрасках ребер полного графа с тринадцатью вершинами. *Годишник на ВПИ в Шумен*, **7Б**, 1983, 53—65.
7. F. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, **30**, 1930, 246—286.
8. F. Harary, G. Prins. Generalized Ramsey theory for graphs. IV. *Networks*, **4**, 1974, 163—173.
9. A. Goodman. On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly*, **66**, 1959, 778—783.
10. M. Jacobson. A note on Ramsey multiplicity. *Discrete Math.*, **29**, 1980, 201—203.
11. G. Kèry. Ramsey egy gráfelméleti tételéröl. Mat. Lapok, **15**, 1964, 204—224.

Природоматематический факультет
Высший педагогический институт
Шумен 9700 Болгария

Поступила 23. 4. 1982