Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЛАБОСОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ПЕТЪР Й. ШОПОВ

Для равнинных и осесимметрических задач получены изопараметрические конечные элементы, которые удовлетворяют тождественно дискретизации уравнения непрерывности. В системе уравнений, которую они генерируют, не участвует давление. Эта система вычислительно эквивалентна системе, которую генерируют конечные элементы со смешанной интерполяцией классического типа.

Для равнинного случая доказаны оценки ошибки в энергетической и L_2-норме.

1. Введение. Дискретизации ряда задач механики несжимаемых жидкостей в переменных скорость — давление имеют вид

$$\begin{cases} A(U)V+B^{\mathrm{T}}P=F, \\ BV \qquad\qquad =G, \end{cases} \tag{1.1}$$

где U, V — векторы параметров для скорости, P — для давления. В практике используются разные выборы вектора скорости конвекции U. Физически естественно выбрать $U=V$, но чаще используются линеаризации за счет скорости $\breve{V}$ в предыдущий момент дискретного времени.

Допустим, что из системы (1.1) мы выключили методом Гаусса давление и сопряженные ему V параметры (см. [10]).

$$\tilde{A}(\tilde{U})\tilde{V}=\tilde{F}. \tag{1.2}$$

Замечательно, что для некоторого естественного класса конечных элементов (КЭ) существуют способы директного ассамблирования системы (1.2) или некоторой эквивалентной ей системы [10].

$$\bar{A}(\bar{U})\bar{V}=\bar{F}. \tag{1.3}$$

Формулы для вычисления выключенных V и P параметров по $\bar{V}$ известны [10]. Обе системы (1.2) и (1.3) положительно определены и включают существенно меньше неизвестных, чем система (1.1) — порядка 30—67%. Для равнинных и осесимметрических задач наиболее эффективным выглядит использование специальных КЭ для получения системы (1.3). Эти КЭ удовлетворяют тождественно дискретизации уравнения непрерывности и называются слабосоленоидальными на триангуляции $\mathcal{T}_h$. Для случая равнины и фигур с прямолинейными сторонами такие КЭ были введены в [2; 6; 4; 5].

В настоящей работе даны треугольные и четырехугольные изопараметрические равнинные и осесимметрические слабосоленоидальные КЭ. В частности получаются осесимметрические треугольные и четырехугольные КЭ этого типа. В п. 5 даны и слабосоленоидальные КЭ первого порядка точности, полученные на основе исходных КЭ неполного типа. Этим мы получаем полный набор слабосоленоидальных КЭ для решения двумерных задач.

2. Исходные фамилии конечных элементов. Пусть $\widehat{K}$ — стандартный треугольник или прямоугольник, K — конечный элемент треугольного или четырехугольного типа

$$K=\mathbf{F}(\widehat{K}). \tag{2.1}$$

Преобразование $\mathbf{F}$ реализуется полиномами минимальной степени, таких, что $\mathbf{F}(\widehat{P}_i)=P_i$, $\mathbf{F}(\widehat{P}_{i,i+1})=P_{i,i+1}$, где $\widehat{P}_i$, P_i — вершины $\widehat{K}$, K, $\widehat{P}_{i,i+1}$ — середины сторон $\widehat{K}$, $P_{i,i+1}$ — некоторые точки на сторонах K [1].

Будем строить изопараметрические КЭ на основе стандартных КЭ для уравнений Навье — Стокса [3] с точностью $m=1$ и 2 в норме $\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}+\|p\|_{0,\Omega}$. Сделаем замену переменных

$$g_i=a_i^{-1}\int\limits_{\mathbf{a}_i}\mathbf{v}_{h,\tau}ds\,;\quad q_i=a_i^{-1}\int\limits_{\mathbf{a}_i}\mathbf{v}_{h,n}ds\,;\quad \mathbf{g}_i=(g_i,\ q_i). \tag{2.2}$$

Величины g_i и q_i — соответственно нормированная циркуляция C_i и поток Q_i через сторону $\mathbf{a}_i$ конечного элемента, τ_i — касательная к стороне $\mathbf{a}_i$, $n_i=\tau_i^{\perp}$ — образ вращения вектора τ_i на угол $-\pi/2$, $\mathbf{v}_{h,\tau}=(\mathbf{v}_h,\tau_i)/\|\tau_i\|$:

$$\mathbf{v}_h=-\Sigma u_i\mathbf{N}_i+\Sigma v_i\mathbf{N}_i^{\perp}+\Sigma g_i\mathbf{N}_{i,i+1}+\Sigma q_i\mathbf{N}_{i,+1}^{\perp}-u_0\mathbf{N}_0+v_0\mathbf{N}_0^{\perp}, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases}\mathbf{N}_i=\mathbf{E}\bar{N}_i+\mathbf{C}_i^{(1)}N_{i,i+1}+\mathbf{C}_i^{(2)}N_{i-1,i}\,; & \mathbf{N}_0=\mathbf{E}N_0\\ \mathbf{N}_{i,i+1}=3b_i\mathbf{T}_iN_{i,i+1} & ;\ \bar{N}_i=N_i-0{,}25N_{i,i+1}-0{,}25N_{i-1,i},\end{cases} \tag{2.4}$$

где N_i, $N_{i,i+1}$ — функции формы стандартного КЭ, $\mathbf{E}=(-1,\ 0)^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{C}_i^{(s)}=3a_i^{-2}\gamma_{i,s}^{(\tau)}\begin{pmatrix}(\bar{\tau}_i,\ \mathbf{T}_i)\\ \\ (\bar{\tau}_i,\ \mathbf{T}_i^{\perp})\end{pmatrix}+3a_i^{-2}\gamma_{i,s}^{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}(\varepsilon_i,\ \mathbf{T}_i)\\ \\ (\varepsilon_i,\ \mathbf{T}_i^{\perp})\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $a_i=|\mathbf{T}_i|$, $\bar{\tau}_i=0{,}5P_iP_{i+1}$, $\varepsilon_i=0{,}5(P_i+P_{i+1})-P_{i,i+1}$, $b_i=a_i^{-1}$.

Величины $\mathbf{T}_i$, $\gamma_{i,s}^{(\tau)}$, $\gamma_{i,s}^{(\varepsilon)}$ зависят от координатной системы. Первый ряд в формулах (2.6) относится к декартовому случаю, а второй — к осесимметрическому:

$$\begin{cases}\mathbf{T}_i=\begin{cases}\bar{\tau}_i\\ \bar{\tau}_i r_{i,i+1}+1/5\,(2\bar{\tau}_{i,1}\varepsilon_i+\bar{\varepsilon}_{i,1}\bar{\tau}_i)\end{cases}\\ \gamma_{i,s}^{(\tau)}=\begin{cases}0\\ 2/15\,\varepsilon_{i,1}+(-1)^s/3\bar{\tau}_{i,1},\end{cases}\\ \gamma_{i,s}^{(\varepsilon)}=\begin{cases}(-1)^s 2/3\\ 4/15\bar{\tau}_{i,1}+(-1)^s(2/3r_{i,i+1}+2/5\varepsilon_{i,1}),\end{cases}\end{cases} \tag{2.6}$$

Интерполяционные функционалы (2.7) соответствуют КЭ (2.3):

$$\text{(2.7)}\qquad \begin{cases} \mathbf{L}_i^{(2)}(\mathbf{v})=\mathbf{v}(P_i), \\ \mathbf{L}_{i,1}^{(1)}(\mathbf{v})=\int\limits_{\mathbf{a}_i}\mathbf{v}_\tau ds\,; \quad \mathbf{L}_{i,2}^{(1)}(\mathbf{v})=\int\limits_{\mathbf{a}_i}\mathbf{v}_n ds. \end{cases}$$

Через $\mathbf{b}_{i,s}$ будем всегда обозначать s-тую координату вектора $\mathbf{b}_i$.

3. **Оценка ошибки исходных семейств КЭ.** В основном существующая теория для оценки ошибки метода конечных элементов (МКЭ) для уравнений Навье — Стокса в декартовых координатах [3] приложима и для изопараметрического случая. Поэтому мы только наметим доказательства.

Некоторые трудности связаны с тем, что даже для КЭ с $m=1$ изопараметрическое семейство не аффинно. Оказывается, что это требование классической теории можно заменить на более слабое $\|(\widehat{\Pi}_k-I)\widehat{\mathbf{v}}\|_{1,\widehat{k}}\leqq C\|\widehat{\mathbf{v}}\|_{m+1,\widehat{k}}$, $\widehat{\Pi}_k\widehat{\mathbf{v}}=(\Pi_k\mathbf{v})\widehat{\ }$. $\widehat{\Pi}_k$ дефинирован для функций над $\widehat{K}$ и зависит от формы K.

После этого замечания нетрудно проверить гипотезы H1, H2, H3 из [3]. Для конструирования r_h используем функционалы (2.7).

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{T}_h$ является m регулярной триангуляцией, m — порядок точности КЭ.*

Тогда для всех декартовых КЭ, рассмотренных в п. 2, в силе гипотезы H1, H2, H3.

Отсюда следует приложимость общей теории для изопараметрических равнинных КЭ. Из ряда оценок, которые она дает, приведем для иллюстрации только оценку в стационарном случае.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v},\ p)-(\mathbf{v}_h,\ p_h)\| &\leqq Ch^m(\|\mathbf{v}\|_{m+1,\Omega}+\|p\|_{m,\Omega}), \\ \|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_0 &\leqq Ch^{m+1}(\|\mathbf{v}\|_{m+1,\Omega}+\|p\|_{m,\Omega}). \end{aligned}$$

Так как слабосоленоидальные конечные элементы генерируют то же самое решение, что и исходные, то эти оценки в силе и для них.

Замечание 3.1. Оценки ошибки имеют место для не очень обычного для механики вида оператора конвективной части [3; 7]. Скажем несколько слов о физическом смысле этого оператора.

Известно, что конвекция не совершает механическую работу, а только переносит энергию с места на место. Рассматриваемый выбор этого оператора генерирует дискретные модели, для которых это свойство сохраняется. Это качество численного метода можно назвать консервативностью конвективной части по энергии.

4. **Слабосоленоидальные изопараметрические КЭ.** Дискретизация уравнения непрерывности имеет вид (4.1) для КЭ с $m=1$ и (4.1), (4.2) для случая $m=2$ [3].

$$\text{(4.1)}\qquad \int\limits_e \operatorname{div}\mathbf{v}_h d\mathbf{x}=0,$$

$$\text{(4.2)}\qquad \int(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\operatorname{div}\mathbf{v}_h d\mathbf{x}=0.$$

Для КЭ с $m=2$ выключим $\mathbf{v}_0$ при помощи внутренней конденсации [8]:

$$\mathbf{v}_{0,l}=\Sigma(\mathbf{C}_i^{1,l},\ \mathbf{v}_i)+\Sigma(\mathbf{C}_i^{2,l},\ \mathbf{g}_i),$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_i^{1,1}=A^{-1}(\mathbf{I}_i^{1,1}+\mathbf{J}_i^{(1)})\,; & \mathbf{C}_i^{2,1}=A^{-1}(\mathbf{I}_i^{2,1}-\mathbf{J}_i^{(2)}), \\ \mathbf{C}_i^{1,2}=A^{-1}(\mathbf{I}_i^{1,2}-\mathbf{J}_i^{(1)\perp})\,; & \mathbf{C}_i^{2,2}=A^{-1}(\mathbf{I}_i^{2,2}-\mathbf{J}^{(2)\perp}), \end{cases}$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{J}_i^{(1)}=\int_{\widehat{k}}\mathbf{N}_i\mathscr{D}Jd\mathbf{x}\,;\quad \mathbf{J}_i^{(2)}=\int_{\widehat{k}}\mathbf{N}_{i,i+1}\mathscr{D}Jd\mathbf{x}\,;\quad A=\int_{\widehat{k}}N_0\mathscr{D}Jd\mathbf{x},\\
&\mathbf{I}_i^{1,s}=\mathbf{D}_i^{i,s}+\mathbf{D}_{i-1}^{i,s}\,;\quad \mathbf{I}_i^{2,5}=\mathbf{D}_i^{0,s}+\delta_{s,2}\bar{a}_i\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{i,i+1},
\end{aligned}\right. \tag{4.3}
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{D}_i^{i+s,1}=\int_{-1}^{1}\mathbf{b}_i(\mathbf{N}_{i+s}^{\perp}|_{\mathbf{a}_i},\ \tau_i)dt\,;\quad \mathbf{D}_i^{i+s,2}=\int_{-1}^{1}\mathbf{b}_i(\mathbf{N}_{i+s}|_{\mathbf{a}_i},\ \tau_i)dt,\\
&\mathbf{D}_i^{0,1}=-\int_{-1}^{1}\mathbf{b}_i(\mathbf{N}_{i,i+1}^{\perp}|_{\mathbf{a}_i},\ \tau_i)dt\,;\quad \mathbf{D}_i^{0,2}=\int_{-1}^{1}\mathbf{b}_i(\mathbf{N}_{i,i+1}|_{\mathbf{a}_i},\ \tau_i)dt,
\end{aligned}\right. \tag{4.4}
$$

где $\mathbf{b}_i=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(t)D(t)$, $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_i([-1,\ 1])$,$D=1(r)$ для равнинного (осесимметрического) случая, J — якобиан преобразования (2.1). Векторы в (4.3), (4.4) можно вычислить в явном виде, так как под интегралами стоят полиномы. Не будем приводить эти довольно громоздкие выражения, так как эти коефициенты можно вычислить и при помощи квадратных формул

$$
\mathbf{v}_{h,t}=\Sigma\mathbf{v}_{i,s}\bar{N}_{i,s}^{1,t}+\Sigma\mathbf{g}_{i,s}\bar{N}_{i,s}^{2,t},\quad \bar{N}_{i,s}^{1,t}=N_{i,s}^{1,t}=\mathbf{C}_{i,s}^{1,t}N_0\,;\quad \bar{N}_{i,s}^{2,t}=N_{i,s}^{2,t}+\mathbf{C}_{i,s}^{2,t}N_0,
$$

где $N_{i,s}^{1,t}(N_{i,s}^{2,t})$ — функция формы перед $\mathbf{v}_{i,s}(\mathbf{g}_{i,s})$ в аппроксимации (2.3) для $\mathbf{v}_{h,t}$.

Чтобы получить КЭ, которые удовлетворяют тождественно и уравнениям баланса массы (4.1), надо сделать еще одну замену переменных [10]. Будем предполагать, что каждому отрезку из $\mathscr{T}_h$ присвоено единственным образом направление касательной $\tau_i^{(g)}$, $n_i^{(g)}=(\tau_i^{(g)})^{\perp}$:

$$
Q_i=a_iq_i=k_i(\psi_{i+1}-\psi_i),
$$

где k_i выбирается равным 1, если $\tau_i^{(q)}$ однонаправленная с P_iP_{i+1} (локальные означения) и -1 в противном случае.

$$
\mathbf{v}_{h,t}=\Sigma\mathbf{v}_{i,s}\bar{N}_{i,s}^{1,t}+\Sigma\mathbf{g}_{i,1}\bar{N}_{i,1}^{2,t}+\Sigma\Psi_i(k_{i-1}a_{i-1}^{-1}\bar{N}_{i-1,2}^{2,t}-k_ia_i^{-1}\bar{N}_{i,2}^{2,t}).
$$

Слабосоленоидальные КЭ второго порядка точности могут быть рекомендованы для решения задач динамики несжимаемых жидкостей. Они имеют существенно меньше параметров, чем исходные КЭ и генерируют то же самое решение [10].

5. Слабосоленоидальные КЭ неполного типа. Использованная в п. 4 конструкция получения слабосоленоидальных КЭ не зависит от координатной системы и применима к любым КЭ, которые удовлетворяют тесту грубых триангуляций [10] и генерируют консервативные по массе схемы. Применим ее к еще одному важному случаю — КЭ первого порядка точности.

Известно [3], что директное использование треугольных трехузловых КЭ для уравнений Навье — Стокса дает неудовлетворительные результаты. Это привело к использованию треугольных 6-узловых КЭ первого порядка точности и неконформных треугольных КЭ [7]. Первые имеют слишком много узлов для достижения этой точности, а вторые не проходят кусочное тестирование в осесимметрическом случае. Поэтому интерес представляют конформные КЭ неполного типа, идея построения которых принадлежит М. Фортену (см. [5]). К простейшей аппроксимации скорости на треугольнике и четырехугольнике добавляем еще по одному параметру C_i в середине каждой стороны при помощи билб-функции. Это позволяет удовлетворить тест грубых триангуляций $\mathbf{v}_h=\Sigma\,\mathbf{v}_iN_i+\Sigma n_ic_iN_{i,i+1}$.

Выражаем этот параметр через поток и скорость:

$$c_i = B^i_{i,i+1} Q_i - B^i_i(\mathbf{v}_i, n_i) - B^i_{i+1}(\mathbf{v}_{i+1}, n_i),$$

$$B^i_{i,i+1} + \begin{cases} 6/\| n_i \|^2 \\ 12/(\| n_i \|^2 (r_i + r_{i+1})), \end{cases} \quad B^i_j = \begin{cases} 3/\| n_i \|^2 \\ 2(2r_j + r_i)/(\| n_i \|^2 (r_i + r_j)), \end{cases}$$

где первый ряд относится к декартовому, второй к осесимметрическому случаю. Отсюда получаем слабосоленоидальные конформные КЭ первого порядка точности.

$$\mathbf{v}_{h,t} = \Sigma\, \mathbf{v}_{i\ s} N^s_{i,t} + \Sigma\, \psi_i N^{(\psi)}_{i,t},$$

$$\begin{cases} N^s_{i,t} = \delta_{i,t} N_i - n_{i,t} u_{i,s} B^i_i N_{i,i+1} - n_{i-1,t} n_{i-1,s} B^{i-1}_i N_{i-1,i}, \\ N^{(\psi)}_{i,t} = k_{i-1} n_{i-1,t} B^{i-1}_{i-1,i} N_{i-1,i} - k_i n_{i,t} B^i_{i,i+1} N_{i,i+1}. \end{cases}$$

В равнинном случае Теорема 3.1 снова имеет место.

Отметим, что слабосоленоидальные КЭ, полученные из КЭ неполного типа, имеют одинаковое число неизвестных параметров в каждом узле, что не так для других КЭ этого типа. На регулярных сетках они генерируют u, v, ψ диференчные схемы, и теорема о внутренней кооденсации дает их эквивалентность с u, v, p „схемами" метода КЭ.

В заключение выражаю благодарность Р. Д. Лазарову за оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва, 1980.
2. M. Crouzeix. Résolution Numérique des Equations de Stokes et Navier—Stokes—Stationnaires. Séminaire d'Analyse Numérique, Université de Paris IV, 1971—1972.
3. M. Crouzeix, P. A. Raviart. Finite Element Approximation of the Navier—Stokes equations. *Lect. Not. Math.* **749**, 1979.
4. D. F. Griffiths. Finite Element for Incompressible Flow. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, **1**, 1979, 16-39.
5. D. F. Griffiths. An approximately divergence-free 9-node velocity element (with variations) for incompressible flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **1**, 1981, 323-346.
6. R. Temam, F. Tomasset. Numerical solution of Navier—Stokes equations by a finite element method, In: Gallagher et al., 1976, 17-30.
7. Р. Темам. Уравнения Навье—Стокса. Москва, 1981.
8. П. Й. Шопов. Вътрешна кондензация на крайни елементи за уравненията на Навие — Стокс. *Математика и математическо образование*, **11**, 307—313. София, 1982.
9. П. Й. Шопов. Изопараметрические четырехугольные конечные элементы с внутренней конденсацией (в печати).
10. П. Й. Шопов. Методы конденсационного типа для уравнений Навье—Стокса (в процессе подготовки).

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 7. 5. 1982.