Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КРИТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА—ВАТСОНА С УБЫВАЮЩЕЙ ИММИГРАЦИЕЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА

КОСТО В. МИТОВ, ВЛАДИМИР А. ВАТУТИН, НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ

Для критических процессов Гальтона—Ватсона, допускающих иммиграцию частиц только в нуле, получены предельные теоремы в зависимости от скорости стремления среднего числа иммигрантов к нулю при неограниченном возрастании номера поколения.

Введение. Процессы Гальтона—Ватсона с зависящей от состояния процесса иммиграцией рассматривались впервые Фостером [2] и Пейксом [7—10]. Далее модель Фостера—Пейкса обобщалась Ямазато [12] на случай марковских процессов с непрерывным временем и Митовым [16] на случай процессов Беллман—Харриса. Многомерный аналог исследован в работах [14, 15].

В настоящей работе рассматривается процесс Гальтона—Ватсона с зависящей от состояния процесса иммиграцией, причем интенсивность иммиграции убывает с временем. Полученные здесь результаты обобщают некоторые результаты Митова и Янева [4, 5].

Непрерывный аналог этой же модели исследован в работах [6, 17]. Отметим, что некоторые модели ветвящихся процессов с зависящей от времени иммиграцией рассматривали Фостер и Вилямсон [3], а также Бадалбаев и Рахимов [13].

1. Описание модели. Рассматривается популяция частиц, формирующих процесс Гальтона—Ватсона, модифицированный таким образом, что если в некотором поколении число частиц равняется нулю, то в следующем поколении иммигрируют случайное число частиц того же типа, с которыми процесс снова начинается. Вместе с тем, предполагается, что интенсивность иммиграции в нуле убывает, стремясь к нулю, когда номер поколений неограниченно возрастает. Дадим строгое определение процесса.

Пусть на вероятностном пространстве (в. п.) (Ω, A, P) заданы:

а) множество $X=\{X_{in};\ i=1, 2, \ldots, n=0, 1, \ldots\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин (сл. в.) с вероятностной производящей функцией (в. п. ф.) $f(s)=\mathsf{E}\{s^{X_{in}}\}=\Sigma_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, $|s|\leq 1$;

б) независимое от X множество $Y=\{Y_n;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ независимых сл. в. с в. п. ф. $g_n(s)=\mathsf{E}\{s^{Y_n}\}=\Sigma_{k=0}^{\infty} q_k(n)s^k$, $|s|\leq 1$.

Определим процесс $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$Z_0=0,\ \text{п. н.},\ Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n} X_{in}+Y_n I_{\{Z_n=0\}}, \tag{1.1}$$

где $\Sigma_{i=1}^{0}\cdot=0$, а $I_{\{Z_n=0\}}$, как обычно обозначают индикатор события $\{Z_n=0\}$

Обозначим $P_k(n) = \mathsf{P}\{Z_n = k \mid Z_0 = 0\}$ и

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(n) s^k = \mathsf{E}\{s^{Z_n} \mid Z_0 = 0\}, \quad |s| \leq 1. \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2), используя независимость сл. в. X_{in}, Y_n, нетрудно получить, что

$$H_{n+1}(s) = H_n(f(s)) - (1 - g_n(s)) H_n(0). \tag{1.3}$$

Применяя этот результат несколько раз, получаем выражение

$$H_{n+1}(s) = 1 - \sum_{k=0}^{n} (1 - g_{n-k}(f_k(s))) H_{n-k}(0), \tag{1.4}$$

где $f_k(s)$ обозначает k-ю итерацию функции $f(s)$ (т. е. $f_0(s) = s$, $f_1(s) = f(s)$, $f_{n+1}(s) = f(f_n(s))$).

Введем следующие обозначения:

$$A_n = \mathsf{E}\{Z_n\} = H_n'(1), \qquad B_n = \mathsf{E}\{Z_n(Z_n - 1)\} = H_n''(1),$$
$$m_n = \mathsf{E}\{Y_n\} = g_n'(1), \quad c_n = \mathsf{E}\{Y_n(Y_n - 1)\} = g_n''(1),$$
$$R_n = 1 - P_0(n) = 1 - H_n(0).$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемый нами процесс критический, т. е. $f'(1) = 1$, $0 < f''(1) = 2b < \infty$. Теперь дифференцируя (1.4) по s и полагая $s = 1$, получаем следующие уравнения для моментов процесса:

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} m_k P_0(k), \tag{1.5}$$

$$B_{n+1} = 2b \sum_{k=0}^{n} m_k P_0(k)(n-k) + \sum_{k=0}^{n} c_k P_0(k). \tag{1.6}$$

2. **Формулировка результатов**. Уравнения (1.4)—(1.6) являются основным объектом дальнейшего изучения при следуюших основных предположениях:

$$f'(1) = 1, \quad 0 < 2b = f''(1) < \infty, \tag{2.1}$$

$$d_1 = \sup_n m_n < \infty, \quad d_2 = \sup_n c_n < \infty, \tag{2.2}$$

$$0 < m_n \to 0, \quad c_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

В зависимости от скорости сходимостн в (2.3) получены разные асимптотические результаты.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$m_n \sim n^{-r} L(n), \quad c_n = o(m_n \log n), \quad n \to \infty, \tag{2.4}$$

где $0 \leq r < 1$ *и* $L(n)$—*медленно меняющаяся на бесконечности функция (м. м. ф.).*

При выполнении условий (2.1)—(2.3):

а) *Если* $r = 0$, $b^{-1} L(n) \log n \to \theta$ *и* $0 < \theta < 1$, *то*

$$\lim R_n = \theta/(1+\theta) = \beta, \tag{2.5}$$

(2.6) $$A_n \sim \beta bn/\log n, \quad B_n \sim \beta b^2 n^2/\log n;$$

б) *Если* $0<r<1$ *или* $r=0$ *и* $L(n)\log n \to 0$, *то*

(2.7) $$R_n \sim b^{-1} m_n \log n,$$

(2.8) $$A_n \sim n m_n (1-r), \quad B_n \sim 2bn^2 m_n/(1-r)(2-r).$$

В обоих случаях а) и б)

(2.9) $$\lim \mathsf{P}\{\log Z_n)/(\log n) \leq x \mid Z_n>0\} = x, \quad 0<x<1.$$

Пусть теперь

(2.10) $$m_n \sim n^{-1} L(n), \quad n \to \infty,$$

где $L(n)$ м. м. ф.

Хорошо известно (см. [19, гл. VIII, § 9]), что

(2.11) $$L^*(n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \backsim \sum_{k=1}^{n} \frac{L(k)}{k}, \quad n \to \infty,$$

есть функция, медленно меняющаяся на бесконечности.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (2.1)—(2.3), (2.10), (2.11)
(2.11) *и* $c_n = o(m_n \log n)$. *Если* $L^*(n) \to \infty$, $n \to \infty$, *то*

(2.12) $$R_n \backsim (bn)^{-1}[L^*(n) + L(n)\log n]$$

и

(2.13) $$A_n \backsim L^*(n), \quad B_n \backsim 2bnL^*(n).$$

Если, кроме того, существует

(2.14) $$\lim \frac{L(n)\log n}{L^*(n)} = a, \quad 0 \leq a \leq \infty,$$

тогда

а) *для* $0<x<1$

(2.15) $$\lim \{(\log Z_n)/(\log n) \leq x \mid Z_n>0\} = ax/(1+a) \equiv G_1(x);$$

б) *для* $x \geq 0$

(2.16) $$\lim \mathsf{P}\{Z_n/bn \leq x \mid Z_n>0\} = \frac{a}{1+a} + \frac{1-e^{-x}}{1+a} \equiv G_2(x).$$

Замечание. 1) Ввиду того, что $\lim_{x\uparrow 1} G_1(x) = \lim_{x\downarrow 0} G_2(x)$, нетрудно заметить, что эти два случая охватывают все „существенные“ невыражающиеся траектории процесса $\{Z_n\}$.

2) Процессы $\{Z_n\}$, где m_n имеет такое поведение, что $a=0$, $0<a<\infty$, и $a=\infty$, можно построить аналогично, как в работе [6].

Теорема 2.3. *Если* $\Sigma_{n=0}^{\infty} m_n < \infty$, $c_n = o(1/n)$ *и выполняются* (2.1)—(2.3), *то при* $n \to \infty$:

(2.17) $$R_n \sim M/bn,$$

(2.18) $$A_n \to M, \quad B_n \backsim 2bMn,$$

где $0<M=\Sigma_{n=0}^{\infty} m_n P_0(n) < \infty$ *и для каждого* $x \geq 0$

(2.19) $$\lim \mathsf{P}\{Z_n/bn \leq x \mid Z_n>0\} = 1-e^{-x}.$$

3. Вспомогательные результаты. В дальнейшем часто будем пользоваться следующими известными результатами для критических процессов Гальтона–Ватсона (см. [1, 18]):

$$Q_n = 1 - f_n(0) \backsim (bn)^{-1}; \tag{3.1}$$

$$Q_n(s) = 1 - f_n(s) = \frac{1-s}{1+bn(1-s)}\,(1+\alpha_n(s)), \tag{3.2}$$

где $\alpha_n(s) \to 0$, $n \to \infty$, равномерно для $0 \leqq s \leqq 1$;

$$0 < f_n(0) \leqq f_n(s) \leqq 1, \quad s \leqq f_n(s) \uparrow 1, \quad n \to \infty, \tag{3.3}$$

равномерно для $0 \leqq s \leqq 1$;

$$1 - g_n(s) = m_n(1-s) - \frac{\bar{c}_n(s)}{2}\,(1-s)^2, \tag{3.4}$$

где

$$0 \leqq \bar{c}_n(s) \leqq c_n, \quad \bar{c}_n(s) \to c_n, \quad 0 \leqq s \uparrow 1; \tag{3.5}$$

$$m_n(1-s) - \frac{c_n}{2}(1-s)^2 \leqq 1 - g_n(s) \leqq m_n(1-s). \tag{3.6}$$

Кроме того, нам понадобятся следующие аналитические результаты.

Лемма 3.1. *Если выполняется* (2.1) *и* $m_n = 0(1/\log n)$, *то*

$$R_n = 1 - P_0(n) \to 0, \ n \to \infty. \tag{3.7}$$

Доказательство. Из уравнения (1.4) при $s=0$ получаем

$$R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (1 - g_k(f_{n-k}(0)))P_0(k). \tag{3.8}$$

Из (3.8) и (3.6) получаем $0 \leqq R_{n+1} \leqq \Sigma_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k}$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что $m_n \leqq \varepsilon/\log n$ для $n \geqq N$. Следовательно, при $n \geqq 2N$ получаем

$$0 \leqq R_{n+1} \leqq \frac{\varepsilon}{\log n/2} \sum_{k \leqq k/2} Q_k + Q_{[n/2]} \sum_{k \leqq n/2} m_k.$$

Теперь из (3.1) и условия леммы вытекает (3.7).

Лемма 3.2. *Пусть* $R_n \to \beta \geqq 0$ *и* $s = s(n)$ *такое, что*

$$\lim \{n \sum_{k=0}^{n} (1 - g_k(f_{n-k}(s)))\} = \infty. \tag{3.9}$$

Тогда

$$R_n(s) = 1 - H_n(s) \backsim (1-\beta) \sum_{k=0}^{n} (1 - g_k(f_{n-k}(s))), \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

Доказательство. Из (1.4) получаем

$$R_{n+1}(s) = (1-\beta) \sum_{k=1}^{n} (1 - g_k(f_{n-k}(s))) - \sum_{k=0}^{n} (R_k - \beta)(1 - g_k(f_{n-k}(s))). \tag{3.11}$$

В силу условия леммы, для каждого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)>0$ такое, что $|R_n-\beta|<\varepsilon$, $n\geq N$. С другой стороны, из (3.1) и (3.3) следует, что для некоторого $C\in(0,\infty)$

$$Q_n\leq C/(n+1),\quad n\geq 0. \tag{3.12}$$

Используя теперь (3.6), (3.12) и (3.3) при $n\geq N$, получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(R_{n-k}-\beta)(1-g_{n-k}(f_k(s)))\right|\leq\sum_{k=0}^{n}|R_{n-k}-\beta|(1-g_{n-k}(f(s)))$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n-N}|R_{n-k}-\beta|(1-g_{n-k}(f_k(s)))+\sum_{k=n-N+1}^{n}|R_{n-k}-\beta|(1-g_{n-k}(f_k(s)))$$

$$\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{n-N}(1-g_{n-k}(f_k(s)))+2\sum_{k=n-N+1}^{n}m_{n-k}Q_k(s)$$

$$\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{n-N}(1-g_{n-k}(f_k(s)))+2Q_{n-N+1}\sum_{k=0}^{N-1}m_k$$

$$\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{n}(1-g_{n-k}(f_k(s)))+\frac{2C}{n-N+2}\sum_{k=0}^{N-1}m_k.$$

Отсюда ввиду (3.9) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n}(R_{n-k}-\beta)(1-g_{n-k}(f_k(s)))=(o)\sum_{k=0}^{n}(1-g_{n-k}(f_k(s)))).$$

Из этого соотношения и (3.11) сразу вытекает (3.10).

Лемма 3.3. *Пусть выполняются* (2.1)—(2.3). *Если* $m_n\backsim n^{-r}L(n)$, $0\leq r\leq 1$, $L(n)$ *м. м. ф. и* $c_n=o(m_n\log n)$, *то*

$$\Sigma c_kQ_{n-k}^2=o(m_n\log n)+O(1/n). \tag{3.13}$$

Доказательство. Хорошо известно (см. [11, с. 2]), что если $L(u)$ медленно меняется на бесконечности, то

$$L(ux)/L(u)\to 1,\quad u\to\infty, \tag{3.14}$$

равномерно в каждом конечном интервале $0<\gamma_1\leq x\leq\gamma_2<\infty$.

Следовательно, для каждого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)>0$ такое, что для $n\geq N$, $(1-\varepsilon)L(n)\leq L(nx)\leq(1+\varepsilon)L(n)$ для всех $x\in[1/2,1]$, $c_n\leq\varepsilon m_n\log n$ и $(1-\varepsilon)n^{-r}L(n)\leq m_n\leq(1+\varepsilon)^{-r}L(n)$. Отсюда, ввиду (3.12) и (2.2), при $n\geq 2N$ находим, что

$$\sum_{k=0}^{n}c_kQ_{n-k}^2=\sum_{k\leq n/2}c_kQ_{n-k}^2+\sum_{n/2<k\leq n}c_kQ_{n-k}^2$$

$$\leq d_2\sum_{n/2<k\leq n}Q_k^2+\varepsilon\sum_{n/2<k\leq n}(m_k\log k)Q_{n-k}^2$$

$$\leq d_2\sum_{n/2<k\leq n}\frac{c^2}{(k+1)^2}+\varepsilon(1+\varepsilon)\log n\sum_{n/2<k\leq n}k^{-r}L(k)Q_{n-k}^2$$

$$\leq\frac{d^2C^2}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}\,\frac{n}{2}+\varepsilon(1+\varepsilon)^2(\log n)\left(\frac{n}{2}\right)^{-r}L(n)\sum_{k\leq n/2}Q_k^2$$

$$\leqq O(n^{-1})+\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2^{-r}(1-\varepsilon)}(m_n \log n)\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^2.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольное, это доказывает (3.13).

4. Доказательство теоремы 2.1. a) В этом случае $c_n=0(1)$ и $m_n\backsim K/\log n$, где $0<\theta=K/b<1$. Следовательно, для каждого $\varepsilon>0$, существует $N=N(\varepsilon)>0$ такое, что

(4.1) $$(K-\varepsilon)/\log n\leqq m_n\leqq(K+\varepsilon)/\log n,\quad n\geqq N.$$

Из уравнения (3.8) и соотношений (3.6), (3.1) и (3.4) вытекает

(4.2) $$P_0(n)=1-\sum_{k=0}^{n}P_0(n-k)(1-g_{n-k}(1-Q_k))$$

$$\geqq 1-\sum_{k=0}^{n}P_0(n-k)m_{n-k}Q_k\geqq 1-(\sup_{k\geqq n/2}P_0(k))I_1(n)-I_2(n),$$

где для $n\geqq 2N$

$$I_1(n)=\sum_{k\leqq n/2}m_{n-k}Q_k\leqq\sum_{k\leqq n/2}\frac{K+\varepsilon}{\log(n-k)}Q_k\leqq\frac{K+\varepsilon}{\log n/2}\sum_{k\leqq n/2}\to\frac{K+\varepsilon}{b}.$$

$$I_1(n)\geqq\sum_{k\leqq n/2}\frac{K-\varepsilon}{\log(n-k)}Q_k\geqq\frac{K-\varepsilon}{\log n}\sum_{k\leqq n}Q_k\underset{2/}{\to}\frac{K-\varepsilon}{b},$$

$$I_2(n)=\sum_{n/2<k\leqq n}m_{n-k}Q_k\leqq Q_{[n/2]}\sum_{k\leqq n/2}m_k\sim\frac{\theta}{\log n}=o(1),\quad n\to\infty.$$

Теперь из (4.2) сразу вытекает

(4.3) $$\liminf P_0(n)\geqq 1-\theta\limsup P_0(n).$$

Аналогичным образом из (4.2) и (3.6) находим

(4.4) $$P_0(n)\leqq 1-\sum_{k=0}^{n}P_0(n-k)m_{n-k}Q_k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}P_0(n-k)c_{n-k}Q_k^2$$

$$\leqq 1-(\inf_{k\geqq n/2}P_0(k))J_1(n)+\sum_{k=0}^{n}c_{n-k}Q_k^2.$$

В силу леммы 3.3 $\Sigma_{k=0}^{n}c_{n-k}Q_k^2=o(1)$. Теперь из (4.4) вытекает, что

(4.5) $$\limsup P_0(n)\leqq 1-\theta\liminf P_0(n).$$

Из неравенств (4.3) и (4.5) нетрудно найти, что $(1-\theta)\limsup P_0(n)\leqq(1-\theta)\liminf P_0(n)$ и, ввиду, того, что $0<\theta<1$, получаем, $\lim P_0(n)=(1+\theta)^{-1}=1-\beta$.

Поскольку $P_0(n)m_n\backsim K/(1+\theta)\log n$ и $P_0(n)c_n=0(1)$, используя хорошо известные свойства медленно меняющихся функций (см. [19 гл. VIII, § 9]), находим, что

$$\sum_{k=0}^{n}P_0(k)m_k\backsim Kn/(1+\theta)\log n,\quad \sum_{k=0}^{n}kP_0(k)m_k\backsim Kn^2/2(1+\theta)\log n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_0(k)c_k = o(n), \quad n\to\infty.$$

Отсюда и из уравнений (1.6) и (1.7) немедленно вытекает (2.6).

б) Пусть для некоторого $0<\delta<1$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k} = \sum_{k=0}^{[n(1-\delta)]} + \sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n} = J_1(n)+J_2(n). \tag{4.6}$$

Из (2.4) в силу известных свойств м. м. ф. [19, гл. VIII, § 9] находим, что

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \backsim \frac{nm_n}{1-r}. \tag{4.7}$$

Следовательно,

$$J_1(n)\leq Q_{[n\delta]}\sum_{k=0}^{[n(1-\delta)]} m_k = o(m_n \log n). \tag{4.8}$$

С другой стороны, в силу (3.14), для каждого $\varepsilon>0$ и $n\geq N(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\frac{(1-\varepsilon)^2 L(n)}{n^r}\sum_{k=0}^{[n\delta]} Q_k \leq J_2(n) \leq \frac{(1+\varepsilon)^2 L(n)}{(1-\delta)^r n^r}\sum_{k=0}^{[n\delta]} Q_k. \tag{4.9}$$

Из (3.1) имеем, что $\Sigma_{k=0}^{[n\delta]} Q_k \backsim b^{-1}\log n$, $n\to\infty$.

Отсюда и из (4.6)—(4.9) получаем

$$\sum_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k} \backsim b^{-1} m_n \log n. \tag{4.10}$$

Используя (3.5) и лемму 3.3, нетрудно показать, что

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k(Q_{n-k})Q_{n-k}^2 \leq \sum_{k=0}^{n} c_k Q_{n-k}^2 = o(m_n \log n).$$

Теперь из (3.4) и (4.10) получаем

$$\sum_{k=0}^{n} (1-g_k(f_{n-k}(0))) = \sum_{k=0}^{n} m_n Q_{n-k} - \frac{1}{2}U_n \backsim \frac{1}{b} m_n \log n, \tag{4.11}$$

т. е. выполняется (3.9) с $s(n)\equiv 0$.

Поскольку в этом случае выполняются условия леммы 3.1, то $R_n\to 0$. Отсюда и из (4.11), в силу леммы 3.2, сразу получаем (2.7).

Уравнение (1.6), лемма 3.1 и (4.7) показывают, что $A_n \backsim n^{1-r}L(n)/(1-r)$. Используя (2.4) и Теорему 1 [19, гл. VIII, § 9], нетрудно показать, что

$$2b\sum_{k=0}^{n}(n-k)P_0(k)m_k \backsim 2b\left(\frac{n^2 m_n}{1-r} - \frac{n^2 m_n}{2-r}\right) = \frac{2bn^2 m_n}{(1-r)(2-r)}.$$

Кроме того, $\Sigma P_0(k)c_k = o(nm_n \log n)$, $n\to\infty$. Из этих соотношений и уравнения (1.6) следует второе утверждение в (2.8).

Докажем теперь (2.9). Пусть для $0<\delta<1$, $u>0$, $0<x<1$, (4.12) $$W(n,u,x)=\sum_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k}(e^{-un^{-x}})=\sum_{k=0}^{[n(1-\delta)]}+\sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n}=I_1(n,\ u,\ x)+I_2(n,\ u,\ x).$$

Аналогичным образом, как в (4.9), находим, что для $\varepsilon>0$ и $\delta\in(0,\ 1)$

(4.13) $$\frac{(1-\varepsilon)^2L(n)}{n^r}\sum_{k=0}^{[n\delta[} Q_k(e^{-un^{-x}})\leqq I_2(n,\ u,\ x)\leqq\frac{(1+\varepsilon)^2L(n)}{(1-\delta)^r n^r}\sum_{k=0}^{[n\delta]} Q_k(e^{-un^{-x}}),\quad n\geqq N$$

Из (3.2) получаем, что

$$Q_k(e^{-un^{-x}})=\frac{1+\alpha(k,\ e^{-un^{-x}})}{bk+(1-e^{-un^{-x}})^{-1}},\quad k\to\infty,\quad n\geqq k,$$

где $\lim_{n\to\infty}\alpha(n,\ s)=0$, равномерно для $s\in[0,\ 1]$.

Нетрудно показать, что

(4.14) $$\sum_{k=0}^{[n\delta]}\frac{1}{bk+(1-e^{-un^{-x}})^{-1}}\backsim\frac{(1-x)\log n}{b},\quad n\to\infty.$$

Следовательно,

(4.15) $$\sum_{k=0}^{[n\delta]}\frac{\alpha(k,\ e^{-un^{-x}})}{bk+(1-e^{-un^{-x}})^{-1}}=o(\log n).$$

Ввиду того, что $Q_n(s)\leqq Q_n$, находим

(4.16) $$I_1(n,\ u,\ x)\leqq J_1(n)=o(m_n\log n),\quad n\to\infty.$$

Теперь из (4.12)—(4.16), (2.4) и (2.5) (или (2.7)) получаем, что

(4.17) $$W(n,\ u,\ x)\backsim\frac{(1-x)R_n}{1-\beta},\quad n\to\infty,$$

где $\beta=0$ в случае б).

С другой стороны, в силу (3.3) и (3.5),

$$U(n,\ u,\ x)=\sum_{k=0}^{n}\bar{c}_k(Q_{n-k}(e^{-un^{-x}}))Q_k^2(e^{-u^{-x}})\leqq U_n=o(m_n\log n).$$

Отсюда, ввиду (4.17) и (3.4), заключаем, что для $s(n)=e^{-un^{-x}}$.

(4.18) $$\sum_{k=0}^{n}(1-g_{n-k}(f_k(e^{-un^{-x}}_{n})))\backsim W(n,\ u,\ x),$$

т. е. выполняется (3.9).

Из (4.18) и (4.17), в силу леммы 3.2, вытекает, что для $u>0$ и $0<x,$ <1, $\lim_{n\to\infty}\{R_n(e^{-un^{-x}})/R_n\}=1-x$.

Поскольку $\lim E\{e^{-uZ_n n^{-x}}\mid Z_n>0\}=1-\lim R_n(e^{-un^{-x}})/R_n=x$, то по теореме непрерывности для преобразований Лапласа—Стильтеса [19, стр. 492] находим, что

$$\lim \mathsf{P}\{Z_n/n^x\leqq y\mid Z_n>0\}=x,\quad 0<x<1,$$

для каждого $y>0$. Это эквивалентно утверждению (2.9).

5. Доказательство теоремы 2.2. Из (3.2) и (2.10) следует, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $N_0=N_0(\varepsilon)>0$ такое, что для $n\geqq N_0$

$$\text{(5.1)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1-\varepsilon}{(1-s)^{-1}+bn} \leq Q_n(s) \leq \dfrac{1+\varepsilon}{(1-s)^{-1}+bn}, \quad 0 \leq s \leq 1, \\ (1-\varepsilon)n^{-1}L(n) \leq m_n \leq (1+\varepsilon)n^{-1}L(n). \end{cases}$$

Следовательно, для фиксированного $N_0 \leq N \leq n-N_0$ имеем

$$\text{(5.2)}\qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k} = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n),$$

где

$$\text{(5.3)}\qquad I_1(n) = \sum_{k=0}^{N-1} m_k Q_{n-k} \leq \frac{1+\varepsilon}{b(n-N-1)} \sum_{k=0}^{N-1} m_k = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\text{(5.4)}\qquad I_3(n) = \sum_{k=n-N+1}^{n} m_k Q_{n-k} \leq \frac{(1+\varepsilon)L(n)}{n-N+1} \sum_{k=0}^{N-1} Q_k = O\left(\frac{L(n)}{n}\right),$$

$$\text{(5.5)}\qquad \frac{(1-\varepsilon)^2}{b} J(n) \leq I_2(n) = \sum_{k=n-N}^{n-N} m_k Q_{n-k} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{b} J(n)$$

и

$$\text{(5.6)}\quad J(n) = \sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{k(h-k)} = n^{-1} \sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{k} + n^{-1} \sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{n-k} \backsim n^{-1}(L^*(n) + L(n)\log n).$$

Последнее соотношение вытекает из представления

$$\sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{n-k} = \sum_{k=N}^{[n(1-\delta)]} + \sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n-N}, \quad 0<\delta<1,$$

где

$$\sum_{k=N}^{[n(1-\delta)]} \frac{L(k)}{n-k} \leq [\delta n]^{-1} \sum_{k=N}^{[n(1-\delta)]} L(k) = O(L(n)), \quad n \to \infty,$$

и

$$\sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n-N} \frac{(L(k)}{n-k} \backsim L(n) \log n, \quad n \to \infty,$$

в силу (3.14).

Теперь из (5.2)—(5.6) находим

$$\text{(5.7)}\qquad V_n \backsim (L^*(n) + L(n)\log n)/n, \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, из (4.13) в силу леммы 3.3 получаем

$$\text{(5.8)}\qquad \sum_{k=0}^{n} (1 - g_{n-k}(f_k(0)) \backsim V_n, \quad n \to \infty,$$

которое показывает, что (3.9) выполняется для $s(n) \equiv 0$.

Следовательно, по лемме 3.2, (5.7) и (5.8) находим (2.12).

Поскольку $P_0(n) \to 1$, из (1.6) следует, что

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} P_0(k) m_k \backsim \sum_{k=0}^{n} m_k \backsim L^*(n).$$

С другой стороны, $\Sigma_{k=0}^{n} P_0(k) c_k \leq C \Sigma_{k=0}^{n} m_k \log k = L_1(n)$, где $L_1(n)$ медленно меняется на бесконечности (см. [19, гл. VIII, § 9]).

Из теоремы 1 [19, гл. VIII, § 9] легко следует, что

$$\lim L(n)/L^*(n) = 0, \quad n \to \infty. \tag{5.9}$$

Из этих соотношений и уравнения (1.7) получаем, что

$$B_n = O(L_1(n)) + 2bnL^*(n)\,(1+0(1)) - 2bnL(n)\,(1+(1)) \backsim 2bnL^*(n), \quad n \to \infty.$$

Этим доказано (2.13).

Для доказательства (2.15) воспользуемся функцией $W(n, u, x)$, определенной в (4.12).

Из (2.12), (5.1), (5.3) и (5.4) нетрудно заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для фиксированного N, $N_1 \leq N \leq n - N_1$

$$(1-\varepsilon)^2 R_n^{-1}\, S(n, u, x) \leq \frac{W(n, u, x)}{R_n} \leq (1+\varepsilon)^2 R_n^{-1}\, S(n, u, x) + \varepsilon, \tag{5.10}$$

где

$$S(n, u, x) = \sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{k[b(n-k)+u^{-1}n^x]} \tag{5.11}$$

$$= (bn+u^{-1}n^x)^{-1}\left\{\sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{k} + b\sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{b(n-k)+u^{-1}n^x}\right\}$$

$$\backsim (bn)^{-1}\{L^*(n) + (1-x)L(n)\log n\},$$

ибо

$$\sum_{k=0}^{n-N} \frac{bL(k)}{b(n-k)+u^{-1}n^x} = \sum_{k=N}^{[n(1-\delta)]} + \sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n-N} = bL(n) \sum_{k=n(1-\delta)+1}^{n-N} (b(n-k)+u^{-1}n^x)^{-1}$$

$$+ O(n^{-1}\sum_{k=1}^{[n(1-\delta)]} L(k) = (1-x)L(n)\log n + O(L(n)).$$

Теперь из (5.10), (5.11), (2.12) и (2.14) получаем, что для $u > 0$ и $0 < x < 1$

$$\lim R_n^{-1} W(n, u, x) = [1+(1-x)a]/(1-a). \tag{5.12}$$

Аналогичным образом (как это сделано в доказательстве (5.8), находим, что

$$\sum_{k=0}^{n} (1 - g_k(f_{n-k}(e^{-un^{-x}}))) \backsim W(n, u, x). \tag{5.13}$$

Последнее доказывает (3.9) для $s(n) \equiv e^{-un^{-x}}$.

Из (5.12) и (5.13), в силу леммы 3.2, следует, что

$$\lim R_n^{-1} R_n(e^{un^{-x}}) = (1+(1-x)a)/(1+a). \tag{5.14}$$

Следовательно

$$\lim \mathsf{E}\{e^{-uZ_n n^{-x}} \mid Z_n > 0\} = 1 - \lim R_n^{-1} R_n(e^{-un^{-x}}) = ax/(1+a), \tag{5.15}$$

что доказывает (2.15) в силу теоремы непрерывности для преобразований Лапласа—Стильтеса (см. [19, стр. 492]).

Докажем теперь (2.16). Пользуясь теми же выкладками как в доказательстве (2.15), нетрудно показать, что

$$\sum_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k}(e^{-u/bn}) \backsim \frac{uL^*(n)}{b(1+u)n} + \frac{u}{b(1+u)n} \sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{(1+u^{-1})n-k} \quad (5.16)$$

Поскольку

$$\sum_{k=N}^{n-N} \frac{L(k)}{(1+u^{-1})n-k} \leq \frac{u}{n} \sum_{k=N}^{n-N} L(k) = O(L(n)),$$

то из (5.9), (5.16), (2.12) и (214) заключаем, что

$$\lim R_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} m_k Q_{n-k}(e^{-u/bn}) = \frac{u}{(1+u)\ (1+a)}.$$

Это является аналогом (5.12).

Аналогичным образом, как в доказательстве (5.13)—(5.15), показывается, что для $u>0$

$$\lim \mathsf{E}\{e^{-uZ_n/bn} \mid Z_n>0\} = a(1+a)^{-1} + (1+u)^{-1}(1+a)^{-1}.$$

Отсюда по теореме непрерывности для преобразований Лапласа—Стильтеса вытекает (2.16).

Доказательство теоремы 2.3. Из (3.8) и (3.4) следует, что

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} m_k P_0(k) Q_{n-k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} P_0(k) \bar{c}_k(f_{n-k}(0)) Q_{n-k}^2. \quad (6.1)$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k P_0(k) < \infty \quad (6.2)$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} P_0(k) m_k Q_{n-k} \backsim M/bn. \quad (6.3)$$

С другой стороны, из (3.5), (3.12) и условия теоремы следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} P_0(k)\, \bar{c}_k\, f_{n-k}(0)) Q_{n-k}^2 \leq \sum_{k=0}^{n} c_k Q_{n-k}^2 \quad (6.4)$$

$$\leq \frac{c^2}{((n/2)+1)^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k + (\max_{n/2 \leq k \leq n} c_k) \sum_{j=0}^{[n/2]} Q_j^2 = o(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Теперь, соотношения (6.1)—(6.4) доказывают (2.17).

Поскольку $c_n = o(n^{-1})$, нетрудно заметить, что

$$\sum_{k=0}^{n} P_0(k) c_k = o(\log n), \quad n \to \infty. \quad (6.5)$$

С другой стороны, из представления

$$\sum_{k=0}^{n} k P_0(k) m_k = -n \sum_{k=n+1}^{\infty} P_0(k) m_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} P_0(j) m_j,$$

вытекает, что

(6.6) $$\sum_{k=0}^{n} kP_0(k)m_k = o(n), \quad n \to \infty.$$

Теперь из (1.6) и (1.7), используя (6.2), (6.5) и (6.6), получаем (2.18).

Для доказательства (2.19) рассмотрим равенство

(6.7) $$R_n(s) = \sum_{k=0}^{n} P_0(k)m_k Q_{n-k}(s)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} P_0(k)\,\bar{c}_k(f_{n-k}(s)Q^2_{n-k}(s) = I_n(s) - \frac{1}{2} J_n(s),$$

которое получается из (1.4) и (3.4).

Из (3.3), (3.5) и (6.4) следует, что

(6.8) $$J_n(s) \leqq \sum_{k=0}^{n} P_0(k)c_k Q^2_{n-k} = o(n^{-1}).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что

(6.9) $$\sum_{k=N+1}^{\infty} P_0(k)m_k < M_\varepsilon.$$

Используя (3.3), для $n \geqq N$ находим

(6.10) $$Q_n(s) \sum_{k=0}^{N} P_0(k)m_k \leqq I_n(s) \leqq Q_{n-N}(s) \sum_{k=0}^{N} P_0(k)m_k + (1-s) \sum_{k=N+1}^{N} P_0(k)m_k.$$

Если в (6.10) $s = e^{-u/bn}$, $u > 0$, то при $n \to \infty$, используя (2.17), (3.2) и (6.9), получаем, что

(6.11) $$(1-\varepsilon)\frac{u}{1+u} \leq \liminf \frac{I_n(e^{-u/bn})}{R_n} \leq \limsup \frac{I_n(e^{-u/bn})}{R_n} \leq (1+\varepsilon)\frac{u}{1+u} + \varepsilon u,$$

Соотношения (6.7), (6.8) и (6.11), ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, показывают, что для $u > 0$ $\lim\{R_n(e^{-u/bn})/R_n\} = u(1+u)^{-1}$.

Следовательно,

$$\lim \mathsf{E}\{e^{-uZ_n/bn} / Z_n > 0\} = 1 - \lim R_n(e^{-u/bn})/R_n = 1/((1+u)), \quad u > 0,$$

что эквивалентно (2.19).

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Athreya, P. Ney. Branching Processes. Berlin, 1972.
2. J. Foster. A Limit Theorem for a Branching Process with State-dependent Immigration. *Ann. Math. Stat.*, **42**, 1971, 1773-1776.
3. J. Foster, J. Williamson. Limit Theorems for the Galton-Watson Process with Time-dependent Immigration. *Z. Wahrs*, 20, 1971, 227-235.
4. K. Mitov, N. Yanev. Critical Branching Processes with Decreasing State—dependent Immigration. *C. R. del' Acad. Bul. Sci.*, **36**, 1983, 193-196.
5. K. Mitov, N. Yanev. Critical Galton-Watson Processes with Decreasing State-dependent Immigration. *J. Appl. Prob.* **21**, 1984, 22-39.

6. K. Mitov, V. Vatutin, N. Yanev. Continuous Time Branching Processes with Decreasing State-dependent Immigration. *Adv. Appl. Prob.* 11, No 4, 1984.
7. A. Pakes. A Branching Processes with a State-dependent Immigration Component. *Adv. Appl. Prob.*, **3**, 1971, 301-314.
8. A. Pakes. On Supercritical Galton-Watson Processes Allowing Immigration. *J. Appl. Prob.*, **11**, 1974, 814-817.
9. A. Pakes. Some Results for Non-supercritical Galton-Watson Processes with Immigration. *Math. Biosci.*, **24**, 1975, 71-92.
10. A. Pakes. On the Age Distribution of a Markov Chain. **15**, 1978, 65-77.
11. E. Seneta. Regularly Varying Functions. *Lecture Notes Math.*, **508**, 1976.
12. M. Yamazato. Some Results on Continuous Time Branching Processes with State-dependent Immigration. *J. Math. Soc. Japan.*, **27**, 1975, 479-496.
13. И. С. Бадалаев, И. Рахимов. Критические ветвящиеся процессы с иммиграцей убывающей интенсивности. *Теория вероятн. примен.*, **23**, 1978, 275-283.
14. К. Митов. Предельные теоремы для ветвящихся просессов с иммиграцией, зависящей от состояния процесса. *Доклады БАН.*, **36**, 1983, 189—192.
15. К. Митов. Ветвящийся процесс с несколькими типами частиц и иммиграцией в нуле. *Математика и матем. образование*, 202-210. София. 1983.
16. К. Митов. Процесс Белмана—Харриса с гибким экраном в нуле. *Плиска*, **7**, 1984, 134-145.
17. К. Митов, Н. Янев. Ветвящиеся процессы с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния процесса. *Сердика* (в печати).
18. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. Москва, 1971.
19. У. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. II. Москва, 1967.

Единый центр математики и механики
София 1090 П.Я. 373

Поступила 1. 7. 1983

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР
Москва СССР

Единый центр математики и механики
София 1090 П.Я. 373