Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ЯКОБИ НА ГРАНИЦАХ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ

ГЕОРГИ С. БОЙЧЕВ

В работе рассматриваются некоторые условия для равномерной сходимости рядов по многочленам Якоби на дугах границы области сходимости.

Пусть α и β — комплексные числа, такие, что $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1 \neq -1, -2, \ldots$. Многочлены Якоби определяются формулой

$$(1) \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right), \; z \in \mathbf{C}, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

а соответствующая система функций второго рода Якоби —

$$(2) \quad Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{2^{n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\,(z-1)^{n+1}}$$

$$\times F\left(n+1, n+\beta+1, 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right), \; z \in \mathbf{C}-[-1, 1], \; n=0, 1, 2, \ldots,$$

где $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Для этих систем многочленов и функций имеет место следующая формула типа Кристоффеля — Дарбу:

$$(3) \quad \frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{1}{J_n^{(\alpha,\beta)}} P_n^{(\alpha,\beta)}(z) Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta) + \frac{\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta)}{\zeta-z}$$

при $z \in \mathbf{C}$, $\zeta \in \mathbf{C}-[-1, 1]$, $z \neq \zeta$, где

$$J_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\}^{-1}$$

$$(n>0),$$

$$\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z, \zeta) = -\frac{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta}(2\nu+\alpha+\beta+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}$$

$$\times\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)Q_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(\zeta) - P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(\zeta)\}.$$

Если через $w(z)$ обозначим ту из однозначных ветвей функции обратной функции Жуковского, для которой $w(\infty)=\infty$, то для многочленов (1) и функций (2) второго рода Якоби в области $G=\mathbf{C}-[-1, 1]$ имеют место следующие асимптотические формулы ([1], [2, (8.21.9), (8.71.19)]) $(n \geq 1)$:

$$(4) \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = P^{(\alpha,\beta)}(z) n^{-\frac{1}{2}} [w(z)]^n \{1 + p_n^{(\alpha,\beta)}(z)\},$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 13—19.

(5) $$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = Q^{(\alpha,\beta)}(z) n^{-\frac{1}{2}} [w(z)]^{-n-1} \{1 + q_n^{(\alpha,\beta)}(z)\},$$

где $P^{(\alpha,\beta)}(z) \neq 0$, $Q^{(\alpha,\beta)}(z) \neq 0$, $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{q_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=1}^{+\infty}$ — аналитические функции в области G и $\lim_{n\to+\infty} p_n^{(\alpha,\beta)}(z) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = 0$ равномерно на каждом компактном подмножестве области G.

Рядом Якоби мы называем ряд вида

(6) $$a_0 P_0^{(\alpha,\beta)}(z) + a_1 P_1^{(\alpha,\beta)}(z) + \cdots + a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(z) + \cdots$$

или

(7) $$b_0 Q_0^{(\alpha,\beta)}(z) + b_1 Q_1^{(\alpha,\beta)}(z) + \cdots + b_n Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) + \cdots.$$

Область сходимости ряда (6) является внутренностью $E(r)$ эллипса $\gamma(r) = \{z \in \mathbf{C} : |z+1| + |z-1| = r + r^{-1}\}$, где $\lim_{n\to+\infty} \sup |a_n|^{1/n} = r^{-1}$ и $r > 1$.

Если аналитическая функция $f(z)$ определена интегралом типа Коши

(8) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r\gamma)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in E(r)\,(1 < r < +\infty),$$

где $\varphi(\zeta)$ — суммируема на $\gamma(r)$, тогда $f(z)$ разлагается в ряд (6) по многочленам Якоби [3], коэффициенты которого получаются из формулы

(9) $$a_n = \{2\pi i J_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-1} \int_{\gamma(r)} Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Цель настоящей работы — дать некоторые достаточные условия для равномерной сходимости ряда (6), которым представлена функция (8) в области $E(r)$, на дугах эллипса $\gamma(r)$.

В начале мы дадим следующее предложение.

Лемма 1. *$h(t)$ — комплексная суммируемая функция, определенная для $t \in [a_1, b_1]$, а $g(t, \theta)$ — комплексная функция с ограниченным изменением относительно $t \in [a, b]$ для каждого фиксированного $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, где $a \pm \theta$, $b \pm \theta \in [a_1, b_1]$ ($|a_1|$, $|b_1|$, $|\theta_j| < \infty$). Если функция g ограничена на множестве $[a, b] \times [\theta_1, \theta_2]$, тогда*

(10) $$\lim_{k\to\pm\infty} \int_{t_1}^{t_2} h(t \pm \theta) g(t, \theta) \exp ikt\, dt = 0$$

равномерно относительно $t_1, t_2 \in [a, b]$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно установить для случая, когда функции h и g действительны.

Пусть h — абсолютно непрерывная функция. Тогда [4, с. 485]

(11) $$\lim_{k\to+\infty} \int_{t_1}^{t_2} h(t \pm \theta) \exp ikt\, dt = 0$$

равномерно относительно $t_1, t_2 \in [a, b]$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

К действительной части интеграла предела (10) применяем вторую теорему о среднем

$$I(\theta)=\int_{t_1}^{t_2} h(t\pm\theta)g(t,\theta)\cos kt\,dt=g(t_1,\theta)\int_{t_1}^{\tau} h(t\pm\theta)\cos kt\,dt$$

$$+g(t_2,\theta)\int_{\tau}^{t_2} h(t\pm\theta)\cos kt\,dt,$$

где $\tau=\tau(\theta)\in[t_1, t_2]$. Пусть $K=\sup|g(t,\theta)|$ для $t\in[a, b]$ и $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$. Тогда

$$|I(\theta)|\leq K\{|\int_{t_1}^{\tau} h(t\pm\theta)\cos kt\,dt|+|\int_{\tau}^{t_2} h(t\pm\theta)\cos kt\,dt|\}.$$

Из этого неравенства и равномерности предела (11) следует, что

$$\lim_{k\to\pm\infty}\int_{t_1}^{t_2} h(t\pm\theta)g(t,\theta)\cos kt\,dt=0.$$

Аналогично доказывается равномерность предела

$$\lim_{k\to\pm\infty}\int_{t_1}^{t_2} h(t\pm\theta)g(t,\theta)\sin kt\,dt=0$$

относительно тех самых параметров.

Теперь предположим, что h — суммируемая функция и $\varepsilon>0$ произвольно. Тогда существует абсолютно непрерывная функция $h_1(t)$, определенная в $[a_1, b_1]$, и такая, что $\int_{a_1}^{b_1}|h(t)-h_1(t)|\,dt<\varepsilon K^{-1}$. Но тогда имеет место неравенство

$$|\int_{t_1}^{t_2}[h(t\pm\theta)-h_1(t\pm\theta)]g(t,\theta)\exp ikdt|<\varepsilon$$

для $t_1, t_2\in[a_1, b_1]$ и $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$.

Имея в виду это неравенство, как и доказанное утверждение леммы, в случае абсолютно непрерывной функции получаем, что и теперь предел (10) равномерен относительно t_1, t_2 и θ. Таким образом лемма 1 доказана.

Используя лемму, докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть* $1<r<+\infty$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1\neq-1, -2, \ldots$ *и аналитическая функция* $f(z)$ *представлена в области* $E(r)$ *интегралом* (8), *где* $\varphi(\zeta)$ *суммируема на* $\gamma(r)$. *Тогда для частичных сумм* $\{s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{\nu=0}^{+\infty}$ *ряда* (6), *коэффициенты которого получаются из* (9), *имеет место асимптотическое представление* $(\nu\to+\infty,\ z_0\in\gamma(r))$

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{1-[w(z_0)/w(\zeta)]^\nu}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta+o(1), \tag{12}$$

которое равномерно.

Доказательство. Из формул (3) типа Кристоффеля — Дарбу следует, что

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{1-\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\varphi(\zeta)d\zeta,\quad \nu=0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Используя асимптотические формулы (4), (5) и формулу Стирлинга, получаем

$$\Delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)=\left[\frac{w(z)}{w(\zeta)}\right]^\nu\left[D^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)+\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)\right],$$

где $D^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)$ и $\{\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)\}_{\nu=1}^{+\infty}$ — голоморфные функции в области $G\times G$ и

$$\lim_{\nu\to+\infty}\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)=0 \tag{14}$$

равномерно на каждом компактном подмножестве этой области. Нетрудно установить, что $D^{(\alpha,\beta)}(z,z)=1$ и $\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z,z)=0$ для $z\in G$ и $\nu=1,2,3,\ldots$ Тогда для $\nu\geqq 1$ и $z_0\in\gamma(r)$

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{1-[w(z_0)/w(\zeta)]^\nu}{\zeta-z_0}\,\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{D^{(\alpha,\beta)}(\zeta,\zeta)-D^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu\varphi(\zeta)d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Обозначим через $R_{\nu,1}^{(\alpha,\beta)}(z_0)$ и $R_{\nu,2}^{(\alpha,\beta)}(z_0)$ соответственно второй и третий интеграл из правой стороны этого равенства. Пусть $K(z_0,\rho)=\{z\in\mathbf{C}:\ |z-z_0|<\rho\}$ при $\rho\in(0,+\infty)$. Кроме того, пусть $\tau\in(0,+\infty)$ такое, что компактное множество $M=\bigcup_{z_0\in\gamma(r)}\bar K(z_0,\tau)$ не имеет общих точек с интервалом $[-1,1]$. Если $l_\nu=\max|\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)|$ при $\zeta\in M$ и $z_0\in\gamma(r)$, тогда для $\zeta\in\bar K(z_0,\tau)\cap\gamma(r)$ по лемме Шварца получим

$$\left|\frac{\delta_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}\right|\leqq\frac{l_\nu}{\tau}. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что это неравенство имеет место и для $\zeta\in\gamma(r)-\bar K(z_0,\tau)$. Поскольку l_ν не зависит от z_0, то (15) верно для каждого z_0 и $\zeta\in\gamma(r)$.

Используя (15), находим $2\pi\tau\,|R_{\nu,2}^{(\alpha,\beta)}(z_0)|\leqq\int_{\gamma(r)}|\varphi(\zeta)|\,ds$. Из этого неравенства и из (14) следует, что

$$R_{\nu,2}^{(\alpha,\beta)}(z_0)=o(1),\quad(\nu\to+\infty). \tag{16}$$

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение интеграла $R_{\nu,1}^{(\alpha,\beta)}(z_0)$ при $\nu\to+\infty$. Нетрудно установить, что $2^{\alpha+\beta+1}D^{(\alpha,\beta)}(z,\zeta)=P^{(\alpha,\beta)}(z)Q^{(\alpha,\beta)}(\zeta)\{w(z)\times[w(z)]^{-1}[w(\zeta)]^{-2}\}$ при z и $\zeta\in G$. Тогда

$$2^{\alpha+\beta+2}\pi i R_{\nu,1}^{(\alpha,\beta)}(z_0)=\int_{\gamma(r)}\frac{P^{(\alpha,\beta)}(\zeta)w(\zeta)-P^{(\alpha,\beta)}(z_0)w(z_0)}{\zeta-z_0}\,\frac{Q^{(\alpha,\beta)}(\zeta)}{w(\zeta)}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu\varphi(\zeta)d\zeta$$

$$-\int_{\gamma(r)}\frac{P^{(\alpha,\beta)}(\zeta)-P^{(\alpha,\beta)}(z_0)}{\zeta-z_0}\,\frac{Q^{(\alpha,\beta)}(\zeta)}{[w(\zeta)]^2}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu\varphi(\zeta)d\zeta=I_{\nu,1}(z_0)-I_{\nu,2}(z_0)$$

Дальше покажем, что $I_{\nu,j}(z_0)=o(1)\ (j=1,2)$ при $\nu\to+\infty$ равномерно относительно $z_0\in\gamma(r)$. Вводим функцию $u(\theta)=2^{-1}[r\exp i\theta+r^{-1}\exp(-i\theta)]$, $(\theta\in\mathbf{R})$, которая периодична с периодом 2π. Пусть $\psi(\theta)=\varphi[u(\theta)]$ и $z_0=u(\theta_0)$, где $\theta_0\in[-\pi,\pi]$. Функция $\psi(\theta)$ суммируема и периодична с периодом 2π.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. При подходящем выборе $\tau>0$ имеем

$$I_{\nu,1}(z_0)=\int_{\gamma(r)-\bar K(z_0,\tau)}+\int_{\gamma(r)\cap\bar K(z_0,\tau)}.$$

Здесь делаем замену $w(z_0)/w(\zeta)=\exp(-it)\,(t\in[-\pi,\pi])$. Обозначим через $\zeta_{1,\tau}(z_0)$, $\zeta_{2,\tau}(z_0)$ граничные точки дуги $d_\tau(z_0)=\gamma(r)\cap\overline{K}(z_0,\tau)$. Очевидно $\zeta_{j,\tau}(z_0)=u(t_{j,\tau}+\theta_0)$, где $t_{j,\tau}=t_{j,\tau}(\theta_0)\in[-\pi,\pi]$ определяются однозначно для каждого θ_0. Предположим, что $t_{1,\tau}<0<t_{2,\tau}$. Нетрудно установить, что

$$\lim_{\tau\to 0} t_{j,\tau}(\theta_0)=0 \tag{17}$$

равномерно относительно $\theta_0\in[-\pi,\pi]$. Тогда имеем

$$I_{\nu,1}(z_0)=\Big(\int_{-\pi}^{t_{1,\tau}}+\int_{t_{1,\tau}}^{t_{2,\tau}}+\int_{t_{2,\tau}}^{\pi}\Big)\frac{P^{(\alpha,\beta)}[u(t+\theta_0)]w[u(t+\theta_0)]-P^{(\alpha,\beta)}[u(\theta_0)]w[u(\theta_0)]}{u(t+\theta_0)-u(\theta_0)}$$

$$\times\frac{Q^{(\alpha,\beta)}[u(t+\theta_0)]}{\{w[u(t+\theta_0)]\}^2}\cdot\exp(-i\nu t)\psi(t+\theta_0)u'(t+\theta_0)dt=I^{(1)}_{\nu,1}+I^{(2)}_{\nu,1}+I^{(3)}_{\nu,1}.$$

Нетрудно показать, что при ζ и $z_0\in\gamma(r)$

$$\left|\frac{P^{(\alpha,\beta)}(\zeta)w(\zeta)-P^{(\alpha,\beta)}(z_0)w(z_0)}{\zeta-z_0}\cdot\frac{Q^{(\alpha,\beta)}(\zeta)}{[w(\zeta)]^2}\right|\leqq K_1,$$

где K_1 — константа, независящая от ζ и z_0. Следовательно,

$$|I^{(2)}_{\nu,1}|=0\Big(\int_{t_{1,\tau}}^{t_{2,\tau}}|\psi(t+\theta_0)|\,dt\Big).$$

Используя теорему об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [5, с. 296], получаем, что для достаточно малого $\tau>0$

$$|I^{(2)}_{\nu,1}|<\varepsilon/3 \tag{18}$$

при $z_0\in\gamma(r)$ и $\nu=1, 2, \ldots$.

Пусть τ фиксированно и такое, что выполнено это неравенство. Для каждого фиксированного $\theta_0\in[-\pi,\pi]$ функция

$$g(t,\theta_0)=\frac{P^{(\alpha,\beta)}[u(t+\theta_0)]w[u(t+\theta_0)]-P^{(\alpha,\beta)}[u(\theta_0)]w[u(\theta_0)]}{u(t+\theta_0)-u(\theta_0)}\cdot\frac{Q^{(\alpha,\beta)}[u(t+\theta_0)]\,u'(t+\theta_0)}{\{w[u(t+\theta_0)]\}^2}$$

с ограниченным изменением относительно t в каждом подынтервале интервала $[-\pi,\pi]$, который не содержит начала. Кроме того, она ограничена для $(t,\theta_0)\in\{[-\pi,t_{1,\tau}]\times[-\pi,\pi]\}$. Применяя лему 1, для достаточно большого ν получим, что

$$|I^{(1)}_{\nu,1}|<\varepsilon/3 \tag{19}$$

для $z_0\in\gamma(r)$. Аналогичным образом можно заключить, что $|I^{(3)}_{\nu,1}|<\varepsilon/3$ для достаточно большого ν и $z_0\in\gamma(r)$. Из этого и из неравенств (18) и (19) следует, что $|I_{\nu,1}(z_0)|<\varepsilon$. Таким образом получим, что $I_{\nu,1}(z_0)=o(1)$ равномерно на эллипсе $\gamma(r)$.

Аналогичным образом доказывается, что $I_{\nu,2}(z_0)=o(1)\,(\nu\to+\infty)$ равномерно на $\gamma(r)$. Этим установлена равномерность асимптотической формулы (12) на $\gamma(r)$. Теорема 1 доказана.

Достаточное условие для равномерной сходимости ряда (6) на дуге границы области сходимости дает следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть* $1<r<+\infty$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1\neq -1, -2, \ldots$, *аналитическая функция* $f(z)$ *представлена интегралом* (8), *где* $\varphi(\zeta)$ *суммируема на* $\gamma(r)$, *и* γ_1 — *замкнутая дуга эллипса* $\gamma(r)$. *Кроме того, пусть* φ *удовлетворяет следующие условия:*

(а) $\varphi(\zeta)$ *ограничена на* γ_1;

(б) *для каждого* $\varepsilon>0$ *существует* $\mu=\mu(\varepsilon)>0$, *такое, что для каждого* $z_0\in\gamma_1$ *имеет место неравенство*

$$\int_{d_\mu(z_0)} \left| \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-\theta_0} \right| ds<\varepsilon.$$

Тогда ряд (6), *представляющий* $f(z)$ *в области* $E(r)$, *равномерно сходится на* γ_1 *к сумме*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta+\frac{\varphi(z_0)}{2}, \quad (z_0\in\gamma_1).$$

Доказательство. Имея в виду условие (б) и теорему 1, выводим. что $(\nu\to+\infty)$

$$s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\varphi(z_0)+o(1)$$

равномерно относительно $z_0\in\gamma_1$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Для достаточно малого $\tau>0$ и каждого $z_0\in\gamma_1$ имеем

$$I_\nu(z_0)=\int_{\gamma(r)} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}\left[\frac{w(z_0)}{w(\zeta)}\right]^\nu d\zeta=\int_{\gamma(r)-d_\tau(z_0)}+\int_{d_\tau(z_0)}=I_{\nu,1}(z_0)+I_{\nu,2}(z_0).$$

Очевидно

$$|I_{\nu,2}(z_0)\leq\int_{d_\tau(z_0)}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta-z_0}\right| d\zeta.$$

Тогда, пользуясь условием (б), находим, что для достаточно малого $\tau>0$

$$|I_{\nu,2}(z_0)|<\varepsilon/2 \tag{20}$$

при $z_0\in\gamma_1$ и $\nu=1, 2, \ldots$.

Пусть τ фиксированно и такое, что выполнено это неравенство. В интеграле $I_{\nu,1}(z_0)$ делаем замену $w(z_0)/w(\zeta)=\exp(-it)$. Получаем

$$I_{\nu,1}(z_0)=\left(\int_{-\pi}^{t_{1,\tau}}+\int_{t_{2,\tau}}^{\pi}\right)\psi(t+\theta_0)g_1(t, \theta_0)\exp(-i\nu t)dt$$

$$-\varphi(z_0)\left(\int_{-\pi}^{t_{1,\tau}}+\int_{t_{2,\tau}}^{\pi}\right)g_1(t, \theta_0)\exp(-i\nu t)dt=I_{\nu,1}^{(1)}(z_0)+I_{\nu,1}^{(2)}(z_0)+I_{\nu,1}^{(3)}(z_0)+I_{\nu,1}^{(4)}(z_0),$$

где $g_1(t, \theta_0)=u'(t+\theta_0)\{u(t+\theta_0)-u(\theta_0)\}^{-1}$. Пусть при $u(\theta_0)\in\gamma_1$, $\theta_0\in[\theta_1, \theta_2]\subset[-\pi, \pi]$. Для фиксированного θ_0 функция $g_1(t, \theta_0)$ с ограниченным изменением относительно t в каждом подынтервале интервала $[-\pi, \pi]$, который не содержит нуля. Кроме того, она ограничена для $t\in[-\pi, t_{1,\tau}]\cup[t_{2,\tau}, \pi]$ и $\theta_0\in[\theta_1, \theta_2]$. Тогда, используя лемму 1 и условие (а), находим, что $|I_{\nu,1}^{(j)}(z_0)|<\varepsilon/8$ ($j=1, 2, 3, 4$)

для достаточно большого ν и $z_0 \in \gamma_1$. Из этих неравенств и из (20) следует, что для достаточно большого ν имеет место неравенство $|I_\nu(z_0)| < \varepsilon (z_0 \in \gamma_1)$. Таким образом получим, что $I_\nu(z_0) = o(1) \, (\gamma \to +\infty)$ равномерно относительно $z_0 \in \gamma_1$. Пользуясь равенством

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{\varphi(z_0)}{2},$$

выводим, что

$$\lim_{\nu \to +\infty} s_\nu^{(\alpha,\beta)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu(r)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{\varphi(z_0)}{2}$$

равномерно относительно $z_0 \in \gamma_1$.

Этим теорема 2 доказана.

Здесь отметим, что если функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условие Гелдера в каждой точке $z_0 \in \gamma_1$ с показателем $\sigma \in (0, 1]$, то для нее будет выполнено условие (б) теоремы 2. Имея в виду это замечание, а также и теорему 2, получаем

Теорема 3. *Пусть* $1 < r < +\infty$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1 \neq -1, -2, \ldots$, $f(z)$ — *аналитическая функция в* $E(r)$, *непрерывна на* $\bar{E}(r)$ *и на эллипсе* $\gamma(r)$ *удовлетворяет условию Гелдера. Тогда ряд* (6), *которым представлена* f *в области* $E(r)$, *равномерно сходится на* $\bar{E}(r)$ *к сумме* $f(z)$.

Наконец, для полноты формулируем аналогичное утверждение для рядов Якоби вида (7).

Теорема 4. *Пусть* $1 < r < +\infty$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1 \neq -1, -2, \ldots$, $f(z)$ — *аналитическая функция в* $\mathbb{C} - \bar{E}(r)$, *непрерывна на* $\mathbb{C} - E(r)$, $f(\infty) = 0$, *и на* $\gamma(r)$ *удовлетворяет условию Гелдера. Тогда ряд Якоби вида* (7), *которым представлена* f *в* $\mathbb{C} - \bar{E}(r)$, *равномерно сходится на* $\gamma(r)$ *к сумме* $f(z)$.

Пользуюсь случаем выразить благодарность П. Русеву за помощь при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Байчев. Върху полиномите на Якоби. *Изв. Матем. инст. БАН*, **7**, 1963, 75—88.
2. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
3. П. Русев. Сходимост на редове по полиномите на Якоби и Бесел върху границите на областите на сходимост. *Изв. Матем. инст. БАН*, **9**, 1966, 73—83.
4. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. III. Москва, 1966.
5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. Москва, 1968.

Высший институт зоотехники и ветеринарной медицины
6000 Стара Загора, Болгария

Поступила 25. 08. 1982