Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЕМИЛ С. КЕЛЕВЕДЖИЕВ

В работе рассматривается управляемый процесс, заданный дифференциальными включениями. Для заданного функционала J решений найдены достаточные условия существования седловой точки. Результат фактически относится к теории дифференциальных игр и дает достаточные условия оптимальности программных стратегий. В сущности, имеем следующую дифференциальную игру. Игрок с номером i, $i=1, 2$ выбирает траекторию, т. е. абсолютно непрерывную функцию из совокупности

$$\{x_i(\cdot): \ I\to E^{n_i} \mid \dot{x}_i(t)\in F_i(t, x_i(t)), \quad x_i(t)\in X_i(t),$$
$$x_i(t_0)\in M_i, \quad x_i(T)\in N_i\},$$

где $I=[t_0, T]$ — фиксированный интервал времени, $F_i(\cdot, \cdot)$, $X_i(\cdot)$ — многозначные отображения, а M_i и N_i — множества из конечномерных пространств. Цель первого игрока — обеспечение минимума функционала $J(x_1, x_2)$, а цель второго игрока — максимума. Именно для этого случая найдены достаточные условия существования седловой точки функционала $J(x_1, x_2)$. Заметим, что минимаксные стратегии дают оптимальный результат для достаточно широкого класса задач из теории игр.

1. Введение. Пусть состояние заданной управляемой системы описывается в текущий момент времени t компонентами фазового вектора $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Полагаем, что имеются две стороны с противоположными интересами, называемые игроками, которые пытаются изменить значение заданного функционала $J(x)$, определенного на состояниях $x(t)$ системы. Первый игрок заинтересован в минимизации функционала $J(x)$, а второй игрок, напротив, заинтересован в его максимизации. Для этой цели игроки располагают некоторым набором управляющих воздействий, которые они могут выбирать в любой момент времени, сообразно своим желаниям и информации, поступающей о состоянии системы, а иногда и о намерениях противника. Управляющие воздействия, соответствующие первому и второму игроку, описываются компонентами векторов: $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_p(t))$ и $v(t)=(v_1(t), \ldots, v_q(t))$, соответственно. Предполагаем, что изменение во времени фазового вектора удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t), v(t)). \tag{1}$$

Рассмотренная ситуация — пример дифференциальной игры. Способ формирования управляющих воздействий со стороны каждого игрока называется стратегией. Описание возможных стратегий в общем случае можно найти во многих работах, например, в [1—5], где эты вопросы рассмотрены подробнее. Здесь укажем тип стратегий, которые определим в случае, когда отрезок времени $I=[t_0, T]$ изменения состояния системы фиксирован. Пусть в начальный момент t_0 известно начальное состояние $x_0=x(t_0)$. Предпола-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 160—164.

гаем, что в процессе управления игрокам не поступает какой-либо дополнительной информации о реализующемся движении. В этом случае естественно полагать, что каждый игрок выбирает свое управление в начальный момент времени t_0 за весь промежуток $[t_0, T]$. Эти стратегии называются программными стратегиями либо программными управлениями, и их можно отождествить с функциями, определенными на $[t_0, T]$, которые предполагаем измеримыми по Лебегу. Их множество обозначим символом L.

Пусть E^n — эвклидовое n-мерное пространство, $x=(x_1, \dots, x_n)$ и $P(E^n)$ — совокупность всех непустых подмножеств из E^n. Многозначным отображением из E^m в E^n назовем произвольное отображение $F\colon E^m \to P(E^n)$. Предположим, что $F\colon E^1 \times E^n \to P(E^n)$ — некоторое многозначное отображение, с помощью которого задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x). \tag{2}$$

Решением дифференциального включения (2) назовем любую абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, для которой почти всюду выполнено $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Считаем, что первый игрок располагает множеством программных стратегий U вида $U=\{u(\cdot) \mid u(t) \in P,\ u(\cdot) \in L\}$, где $P \subset E^p$. Для второго игрока задаем аналогично множество программных стратегий: $V=\{v(\cdot) \mid v(t) \in Q,\ v(\cdot) \in L\}$, где $Q \subset E^q$. Очевидно совокупность всех траекторий $x(\cdot)$ управляемой системы (1) удовлетворяет дифференциальному включению $\dot{x} \in F(t, x)$, в котором $F(t, x)$ — многозначное отображение, определенное формулой $F(t, x) = \{f(t, x, u, v) \mid u \in U,\ v \in V\}$.

Применение понятия дифференциального включения в задачах теории оптимального управления и дифференциальных игр является удобным в некоторых случаях. В частности, это понятие позволяет вместо об управляющих воздействиях говорить только о траекториях, выбираемых управляющей стороной. Дополнительные сведения приведены в [6; 7], где аппарат многозначных отображений и дифференциальных включений рассмотрен достаточно подробно. В работе [8] этот аппарат применяется для получения достаточных условий в задачах оптимального управления. Теорема, доказанная в данной работе, является обобщением рассмотренного в [8] на случай, когда в управляемом процессе принимают участие две стороны.

2. Постановка задачи. Предположим, что заданы два множества траекторий Z_1 и Z_2 следующим образом:

Пусть $I=[t_0, T]$ — фиксированный отрезок времени, и для каждого $t \in I$ и $x_i \in E^{n_i}$, $i=1, 2$ заданы множества $X_i(t) \subset E^{n_i}$ и $F_i(t, x_i) \subset E^{n_i}$; $i=1, 2$. Пусть M_i и N_i — фиксированные подмножества E^{n_i}. Тогда Z_i; $i=1, 2$ состоит из всех абсолютно непрерывных функций $x_i(\cdot)\colon I \to E^{n_i}$, для которых почти всюду для $t \in I$ выполняется:

1) дифференциальное включение (закон движения)

$$\dot{x}_i(t) \in F_i(t, x_i(t)); \tag{3}$$

2) фазовое ограничение

$$x_i(t) \in X_i(t); \tag{4}$$

3) граничные условия

$$x_i(t_0) \in M_i, \tag{5}$$

$$x_i(T) \in N_i. \tag{6}$$

Пару функций (x_1, x_2): $x_i(\cdot): I \to E^{n_i}$; $i = 1, 2$ назовем допустимой, если $x_1 \in Z_1$ и $x_2 \in Z_2$. Пусть $g: E^{n_1} \times E^{n_2} \to E^1$ — некоторая функция, с помощью которой на множестве всех допустимых пар (x_1, x_2) введем функционал качества терминального типа: $J(x_1, x_2) = g(x_1(T), x_2(T))$.

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой каждый игрок выбирает траекторию соответственно из множеств Z_i; $i = 1, 2$. Цель первого игрока — достижение минимума $J(x_1, x_2)$ и нахождения стратегии, минимизирующей этот показатель. Второй игрок, напротив, стремится к максимуму функционала $J(x_1, x_2)$. Как известно из теории игр, если траектории игроков x_1 и x_2 такие, что пара (x_1, x_2) является седловой точкой функционала $J(\cdot, \cdot)$, то эти траектории в известном смысле наилучшие, и в дифференциальной игре имеет место ситуация равновесия. Таким образом игра решена в программных стратегиях.

Рассмотрим задачу о нахождении такой пары допустимых траекторий (x_1, x_2), в которой функционал $J(\cdot, \cdot)$ имеет седловую точку. Это означает, что для каждой допустимой пары траектории (y_1, y_2) выполняется $J(x_1, y_2) \leq J(x_1, x_2) \leq J(y_1, x_2)$.

Чтобы сформулировать достаточное условие существования седловой точки, нам понадобится определить для каждого множества его опорную функцию: $c(M, \cdot)$, где $c(M, \psi) = \sup\{(\xi, \psi) \mid \xi \in M\}$ (здесь (ξ, ψ) — скалярное произведение векторов ξ и ψ).

3. Теорема о седловой точке. *Пусть для допустимой пары траекторий (x_1, x_2) существует такая пара сопряженных функций: $\psi_i: I \to E^{n_i}$; $i = 1, 2$, что выполнены следующие условия почти всюду для $t \in I$ и для $i = 1, 2$:*

1) *условия для сопряженных функций*

$$-c(F_i(t, x_i(t)), \psi_i(t)) + (\dot{\psi}_i, \xi_i - x_i(t)) \leq -c(F_i(t, \xi_i), \psi_i(t)) \tag{7}$$

для любого вектора $\xi_i \in X_i(t)$;

2) *условие максимума*

$$(\dot{x}_i(t), \psi_i(t)) = c(F_i(t, x_i(t)), \psi_i(t)); \tag{8}$$

3) *условие трансверсальности*

$$(x_i(t_0), \psi_i(t_0)) = c(M_i, \psi_i(t_0)); \tag{9}$$

4) *условия на конечные состояния*

$$-g(x_1(T), x_2(T)) + g(\xi, x_2(T)) \geq (-\psi_1(T), \xi - x_1(T)) \tag{10}$$

для любого вектора $\xi \in N_1 \cap X_1(T)$ и

$$-g(x_1(T), \eta) + g(x_1(T), x_2(T)) \geq (-\psi_2(T), \eta - x_2(T)) \tag{11}$$

для любого вектора $\eta \in N_2 \cap X_2(T)$.

Тогда допустимая пара траекторий (x_1, x_2) является седловой точкой функционала $J(\cdot, \cdot)$, т. е. для любых допустимых (y_1, y_2):

Проверим, удовлетворяет ли (x_1, x_2) условиям теоремы. Для этой цели отметим, что $c(F_i(t, x_i(t)), \psi_i(t)) = \sup\{(f, e_i)/f \in F_i(t, x_i(t))\} = \| e_i \|^2$. Проверка первых трех условий теоремы тривиальна, а чтобы убедиться в справедливости условия (10), надо показать, что

$$-(\| x_1(1) \| - \| x_2(1) \|) + \| \xi \| - \| x_2(1) \| \geqq (-e_1, \xi - x_1(1))$$

для всех $\xi \in N_1$. Это эквивалентно неравенствам

$\| \xi \| - 1 \geqq (-e_1, \xi - e_1)$, $\| 2e_1 + z \| - 1 \geqq (-e_1, e_1 + z)$, $\| z \| = 1$.

Обозначим компоненты вектора z буквами α и β, т. е. $z = \alpha e_1 + \beta e_2$. Теперь надо доказать, что $\sqrt{(2+\alpha)^2 + \beta^2} \geqq -\alpha$, что легко выводится из неравенств $|\alpha| \leqq 1$ и $|\beta| \leqq 1$.

Условие (11) проверяем аналогично.

Таким образом пара (x_1, x_2) удовлетворяет условиям теоремы, следовательно, эта пара — седловая точка, т. е. дифференциальная игра имеет точку равновесия.

В заключение мне приятно выразить благодарность ст. н. с Р. Иванову за постоянную помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Айзекс. Дифференциальные игры. Москва, 1967.
2. Л. С. Понтрягин. К теории дифференциальных игр. *Успехи мат. наук*, **21**, № 4, **1966**, 219—274.
3. Н. Н. Красовский. Игровые задачи о встрече движений. Москва, 1970.
4. Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. Москва, 1974.
5. А. И. Субботин, А. Г. Ченцов. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва, 1981.
6. В. И. Благодатских. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений. *Summer School on Ordinary Differential Equation*. Brno, 1974, part II, 29-67.
7. Р. Иванов, П. Кендеров, С. Недев, Г. Скордев. Многозначные отображения и некоторые их приложения. Proceedings of the Eleventh Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sunny Beach, 1982.
8. В. И. Благодатских. К теории достаточных условий оптимальности. *Труды Матем. инст. АН СССР*, **142**, 1976, 78—87.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 18. 5. 1983