Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О СЕМЕЙСТВАХ КРИВЫХ, НАКРЫВАЕМЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ, 1

Г. Б. ШАБАТ

Семейством кривых будет называться неособая комплексная алгебраическая поверхность X, снабженная морфизмом $p: X \to S$, где S — неособая комплексная алгебраическая кривая; требуется, чтобы этот морфизм был локально-тривиальным расслоением в категории дифференциальных многообразий.

Если база и слои семейства $p: X \to S$ гиперболичны, то универсальная накрывающая $\widetilde{X}$ поверхности X биголоморфно эквивалентна ограниченной области в $\mathbf{C}^2$ (Гриффитс [1], Шабат [2]). В работах [2; 3] исследовались группы биголоморфных автоморфизмов таких универсальных накрывающих; было показано, что, за исключением случая симметрической универсальной накрывающей, эти группы счетны. Однако вопрос о существовании семейств, накрываемых симметрическими областями, помимо изотривиальных (очевидным образом накрываемых бикругом), оставался открытым.

В настоящей работе приводится пример неизотривиального семейства кривых, накрываемого бикругом. Оно имеет арифметическую природу и относится к классу поверхностей, изучавшихся ван дер Гиром [4].

Пусть K — вещественное квадратичное расширение поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$; обозначим $x \mapsto \bar{x}$ инволюцию K над $\mathbf{Q}$. Вместо бикруга будем рассматривать биголоморфно эквивалентное ему произведение верхних полуплоскостей $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Группа $SL_2(K)$ действует на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ следующим образом при $\gamma \in SL_2(K)$ и $(z_1, z_2) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$, по определению $\gamma(z_1, z_2) = (\gamma z_1, \bar{\gamma} z_2)$, где $SL_2(K) \subset SL_2(\mathbf{R})$, действует на $\mathscr{H}$ дробно-линейными преобразованиями, а под $\gamma \to \bar{\gamma}$ понимается покомпонентное применение инволюции.

Обозначим $\mathfrak{o}$ кольцо целых чисел в K; пусть $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{o}$ — такой идеал, что фактор-кольцо $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ конечно. Рассмотрим, далее, группу $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \ker(SL_2(\mathfrak{o}) \to SL_2(\mathfrak{o}/\mathfrak{a}))$; поскольку $\Gamma_{\mathfrak{a}} \subset SL_2(\mathfrak{o}) \subset SL_2(K)$, определено действие $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$.

Теорема. *При* $K = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathfrak{a} = (3+\sqrt{3})$ *группа* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ *действует на* $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ *без неподвижных точек; фактор* $(\mathscr{H} \times \mathscr{H})/\Gamma_{\mathfrak{a}}$ *является неизотривиальным семейством кривых.*

Доказательство. Несложное вычисление показывает, что преобразования из группы $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ не содержат эллиптических элементов; отсюда вытекает первое утверждение теоремы.

Для применения результатов работы [4] следует иметь в виду, что дискриминант поля K равен 12 (см. Боревич — Шафаревич [6], стр. 154), а норма $N(\mathfrak{a}) = (3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = 6$.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 11, 1985, p. 185—188.

Обозначим $X=(\mathscr{H}\times\mathscr{H})/\Gamma_{\mathfrak{a}}$; теорема 5.2 работы [4] утверждает, что некоторая ее каноническая компактификация является поверхностью с пучком эллиптических кривых. Пусть $\overline{p}:\overline{X}\to\overline{S}$ — соответствующий морфизм; обозначим $p=\overline{p}|_X$, $S=p(X)$.

П р е д л о ж е н и е. *Морфизм $p:X\to S$ не содержит особых слоев.*

Л е м м а 1. *Диагональ $\triangle$ произведения $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ проектируется в слой морфизма p.*

Как показано в [4], стр. 36, на $\overline{X}$ имеется эффективный дивизор F_1, одна из компонент которого — замыкание проекции диагонали $\triangle$. Это пересечение с каноническим классом $(F_1 . K_{\overline{X}})=0$, [4, стр. 53], откуда лемма вытекает в силу того, что $K_{\overline{X}}$ может быть реализован как сумма слоев морфизма $\overline{p}$.

Л е м м а 2. *Пусть $D=\{z\in\mathbf{C}|\,|z|<1\}$, $p:Y\to D$ — голоморфное семейство кривых, дифференцируемо локально-тривиальное над $D^*=D\setminus\{0\}$; обозначим $Y_{1/2}=p^{-1}(1/2)$, $\alpha:Y_{1/2}\to Y$. Тогда $\alpha_*:\pi_1(Y_{1/2})$ — $\pi_1(Y)$—эпиморфизмы.*

Обозначим $Y^*=p^{-1}D^*$, $i:Y^*\to Y$, $\beta:Y_{1/2}\to Y^*$. Имеем диаграмму, где горизонтальная последовательность представляет собой точную последовательность расслоения $Y^*\xrightarrow{p}D^*$. По теореме, приведенной в работе Фултона — Лазарфельда [5, стр. 33] i_* эпиморфен. Фиксируем такой элемент $c\in\pi_1(Y^*)$, что $p_*(c)=1$. Теперь для произвольного $a\in\pi_1(Y)$ выберем сначала такой $b\in\pi_1(Y^*)$, что $a=i_*(b)$; тогда $p_*(bc^{-p_*(b)})=0$, поэтому $bc^{-p_*(b)}\in\operatorname{im}\beta_*=\ker p_*$. Пусть $bc^{-p_*(b)}=\beta_*(a_1)$; тогда, очевидно, $a=\alpha_*(a_1)$.

Вернемся к морфизму $p:X\to S$. Рассмотрим в $\pi_1(X)\cong\Gamma_{\mathfrak{a}}$ подгруппу $\Gamma_0=\{\gamma\in\Gamma_{\mathfrak{a}}|\gamma\triangle\subset\triangle\}$.

Л е м м а 3. $\ker p_*\subset\Gamma_0$.

Обозначим X_0 слой морфизма $p:X\to S$, в который, согласно лемме 1 проектируется диагональ $\triangle\subset\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ (поскольку, очевидно, $X_0\simeq\triangle/\Gamma_0$, этот слой неособ). Фиксировав $x_0\in X_0$, мы можем реализовать произвольный элемент $\gamma\in\ker p_*$ петлей $\widehat{c}:[0,1]\to X$, $\widehat{c}(0)=\widehat{c}(1)=x_0$; по предположению, $c=p_0\widehat{c}:[0,1]\to S$ — стягиваемая петля. Очевидно, $\widehat{c}$ можно выбрать так, чтобы c не проходила через проекции особых слоев. Вне особых слоев утверждение является свойством накрывающей гомотопии, а в окрестностях особых слоев вытекает из леммы 2.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(Y_{1/2}) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[dr, "\alpha_*"] & \pi_1(Y^*) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(D^*)\cong Z \arrow[r] & 0 \\
 & & \pi_1(Y) & \text{жил.} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

В дальнейшем для связного многообразия $\widetilde{M}$ через $u_M:\widetilde{M}\to M$ будем обозначать отображение универсального накрытия; для морфизма $f:M\to N$ через $\widetilde{f}:\widetilde{M}\to\widetilde{N}$ — его подъем на универсальные накрывающие.

Перейдем к комплексно-аналитической поверхности $\widehat{x}=x\times_S\widetilde{S}=\{x,\widetilde{s})\in X\times\widetilde{S}|p(x)=u_S(\widetilde{s})\}$; проекция на второй сомножитель определяет на ней структуру голоморфного семейства кривых $\widehat{p}:\widehat{X}\to\widetilde{S}$. Это семейство обладает свойством $\widehat{p}^{-1}\widetilde{s}\cong p^{-1}(u_S(\widetilde{s}))$ для любой $\widetilde{s}\in\widetilde{S}$, поэтому для доказательства предложения достаточно установить, что семейство $\widehat{p}:\widehat{X}\to\widetilde{S}$ не содержит особых слоев.

Лемма 4. $\widetilde{X}/\Gamma_0\simeq\widehat{X}$.

Этот изоморфизм определяется отображением $\alpha:\widetilde{X}/\Gamma_0\to\widehat{X}:[\widetilde{x}]_{\Gamma_0}\to u_X(\widetilde{z}), \widetilde{p}(x))$.

Его сюръективность: рассмотрим произвольный $(x, \widetilde{s})\in\widehat{X}$; обозначим $s=p(x)=u_S(\widetilde{s})$. Выберем какой-нибудь $\widetilde{x}_1\in u_x^{-1}(x)$; поскольку $u_S\circ\widetilde{p}(\widetilde{x}_1)=p(x)=s$, найдется такой элемент $\delta\in\pi_1(S)$, что $s=\delta\widetilde{p}(\widetilde{x}_1)$. Возьмем произвольный $\gamma\in p_*^{-1}(\delta)$; тогда $\alpha[\delta\widetilde{x}_1]_{\Gamma_0}=(u_x(\gamma\widetilde{x}_1), \widetilde{p}(\gamma\widetilde{x}_1))=(u_x(\widetilde{x}_1), p_*(\gamma)\widetilde{x}_1)=(x, \delta\widetilde{p}(\widetilde{x}_1))=(x, \widetilde{s})$.

Его инъективность: пусть $\alpha([z]_{\Gamma_0})=\alpha([w]_{\Gamma_0})$; это означает $u_x(z)=u_x(w)$ и $p(\widetilde{z})=p(\widetilde{w})$. Из первого условия следует, что найдется такой элемент $\gamma\in\pi_1(x)$, что $w=\gamma_z$.

Из второго имеем $\widetilde{p}(z)=\widetilde{p}(\gamma z)=p_*(\gamma)\widetilde{p}(z)$, т. е. $p_*(\gamma)=1$ (поскольку $\pi_1(S)$ действует на $\widetilde{S}$ без неподвижных точек). Отсюда по лемме 3 $\gamma\in\Gamma_0$, т. е. $[z]_{\Gamma_0}=[w]_{\Gamma_0}$.

Из доказанной леммы вытекает, что $\Gamma_0\simeq\pi_1(\widehat{x})$; это доказывает предложение, поскольку очевидно, что фундаментальная группа голоморфного семейства кривых над диском при наличии особых слоев не может быть изоморфна фундаментальной группе неособого слоя.

Для доказательства теоремы осталось установить, что семейство $p:X\to S$ неизотривиально. Это следует из леммы 1: прообразы в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ слоев изотривиальных семейств имеют вид $\{z\}\times\mathscr{H}$ или $\mathscr{H}\times\{w\}$ и не переводятся в диагональ никакими автоморфизмами бикруга.

Автор признателен Р.-П. Хольцапфелю, высказавшему предположение о существовании среди факторов $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ неизотривиальных семейств кривых без особых слоев и познакомившему автора с результатами ван дер Гира и Е. А. Орфановой, независимо проведшей основные вычисления данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Griffiths. Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties. Ann. Math., 94 (1971), 21—51.
2. Г. Б. Шабат. О комплексной структуре областей, накрывающих алгебраические поверхности. Функ. ан. и его прилож., 11 : 2 (1977), 67—75.
3. Г. Б. Шабат. Локальное восстановление комплексных алгебраических поверхностей по универсальным накрывающим. Функ. ан. и его прилож., 17 : 2 (1983), 90—91.
4. Van der Geer. Hilbert modular surfaces of principal congruence subgroups. Thesis, Leiden, 1977.
5. W. Fulton, R. Lazarfeld, Connectivity and its applications in Algebraic Geometry. — In: Algebraic Geometry (Proc. Midwest Conference, 1980), Lect. Notes, 862.
6. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел. М., Наука, 1972.

СССР, Москва
Математический институт
АН СССР „В. А. Стеклова“

Поступила 5. 3. 1984