Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

GROSSE ABWEICHUNGEN DER WARTEZEIT BEIM GI/GI/I BEDIENUNGSSYSTEM MIT NICHT REKURRENTEM EINGANG

ELISAWETA I. PANTSCHEWA

Einige frühere Ergebnisse des Autors aus der Theorie der grossen Abweichungen finden ihre Anwendung bei der Abschätzung des asymptotischen Verhaltens der Wartezeitverteilungsfunktion $W_n(x)$ für das Bedienungssystem $GI/GI/I$ mit nicht rekurrentem Eingang.

Es sei t_n der Eintreffenzeitpunkt der n-ten Forderung im Bedienungssystem (BS), η_n — die notwendige Bedienungszeit, und w_n — die entsprechende Wartezeit. Wir setzen $\tau_n \doteq t_n - t_{n-1}$, $\tau_n > 0$ und nehmen an, daß die Schlangendisziplin sei FIFO. Einfachkeitshalber nehmen wir noch an, daß die erste Forderung im Zeitpunkt $t_1=0$ eintrifft, so daß ihre Wartezeit $w_1=0$ ist. Dann wird $\tau_1=0$, $\tau_2=t_2$, $t_3-t_2=\tau_3$ u. s. w. Offensichtlich läßt die Wartezeit der n-ten Forderung die folgende Iterationsdarstellung zu:

$$w_n=\begin{cases} w_{n-1}+\eta_{n-1}-\tau_n, & \text{falls } w_{n-1}+\eta_{n-1}>\tau_n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Bezeichnen wir mit ξ_n die Zufallsgröße (z. G.) $\xi_n \doteq \eta_{n-1}-\tau_n$. Es sind $\xi_1 \doteq 0$ $\xi_2=\eta_1-t_2$, $\xi_3=\eta_2-\tau_3$ u. s. w. So nimmt (1) folgende Form an:

$$w_n=\begin{cases} w_{n-1}+\xi_n & \text{falls } w_{n-1}+\xi_n>0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1'}$$

Wir können weiter im (1′) w_{n-1} durch $\max(0, w_{n-2}+\xi_{n-1})$ ersetzen und dieselbe Prozedur $(n-1)$-mal wiederholen, und so kommen wir zu einer Darstellung der Wartezeit w_n durch die z. G. $\xi_1, \ldots, \xi_n$, und zwar zu:

$$w_n=\max(0,\ \xi_n,\ \xi_n+\xi_{n-1}, \ldots, \xi_n+\ldots+\xi_1).$$

Daraus folgt sofort:

$$W_n(x) \doteq \mathsf{P}(w_n<x)=\mathsf{P}(\xi_n<x,\ \xi_n+\xi_{n-1}<x, \ldots, \xi_n+\ldots+\xi_1<x).$$

Die zufällige Folge (z. F.) $\{\xi_n\}_n$ nennen wir weiter Eingang des BS. Unser Ziel ist: die Bedingungen zu finden, unter denen man das asymptotische Verhalten der Wartezeit w_n durch dieses des Eingangs ξ_n ausdrücken kann. Für den Fall des rekurrenten Eingangs, d. h. ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, sind u. i. v. z. G., ist dieses Problem in [1] gelöst.

Zuerst wollen wir an einigen Definitionen und Ergebnisse aus [3] bezüglich der Wahrscheinlichkeit der grossen Abweichungen der Summen von z. G. erinnern. Es seien: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $R_n(t)$ — die momentenerzeugende Funktion von S_n, $R_n(t)=\mathsf{E}e^{tS_n}$, $m_n=\mathsf{E}S_n$, $\rho_n(x)$ — die Chernoffsche Funktion von S_n, $\rho_n(x)$

$=\inf_t e^{-tx} R_n(t)$, Supp S_n — die kleinste abgeschlossene Menge $C \in \mathsf{R}_1$ mit $\mathsf{P}(S_n \in C) = 1$. Wir nennen die z. F. $\{\xi_n\}$ H-regulär, falls sie die Hypothesen $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$ erfüllt:

H_1: $R_n(t) < \infty, \ \forall n, \ \forall t \geq 0,$

H_2: $\sqrt[n]{R_n(t)} \xrightarrow[n]{} r(t), \ \forall t \geq 0,$

H_3: $\mathrm{int}\,(\liminf_n (\mathrm{Supp}\ S_n/n)) \neq \emptyset$.

Aus H_2 folgt, daß die folgende Grenze existiert:

$$m \doteq \lim_n \frac{1}{n} \mathsf{E} S_n = (\log\, r(t))'_{t=0}\,,$$

und aus H_3 folgt: $r(t) > 0, \ \forall\, t \geq 0$.

Satz 1. *Die z. F.* $\{\xi_n\}$ *sei H-regulär. Dann gilt für jedes* $x \geqq m$

$$\lim_n \sqrt[n]{P(S_n \geqq nx)} = \inf\,\{e^{-tx}.\ r(t): t \geqq 0\}. \tag{2}$$

Die rechte Seite von (2) definiert die s. g. erweiterte Chernoffsche Funktion $\rho(x)$, der Analyse [4] gewidmet ist.

Wir kehren zum BS $GI/GI/I$ zurück. Für den Eingang des BS werden wir die folgenden Bedingungen voraussetzen:

B_1: Die z. G. ξ_n seien unabhängig, nicht identisch verteilt.

B_2: Die z. F. $\{\xi_n\}_n$ sei H-regulär.

B_3: Konstanten $\delta > 0$, $\alpha < 0$, und n_0 existieren, so daß für jedes $n > n_0$ die Ungleichungen gelten

$$\mathsf{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} > \delta\right) > \frac{1}{n}\,, \quad \frac{1}{n}\,\mathsf{E}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \leqq \alpha.$$

Definition. *Zensierte Chernoffsche Funktion nennen wir die Funktion*

$$\rho^*(x) = \inf\,\{e^{-tx}\,.\,r(t): t \geq t_0\},$$

wobei $t_0 > 0$ *aus der Gleichung* $r(t) = 1$, $t \neq 0$, *bestimmt wird.*

So eine t_0 existiert unter den gemachten Vorausstzungen immer, was im Lemma 1 gezeigt wird. Offensichtlich

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{für} \quad x > (\log r(t))'_{t=t_0} \\ e^{-t_0 x}, & \text{für} \quad 0 \leq x \leq (\log r(t))'_{t=t_0} \end{cases}$$

Satz 2. *Unter den Bedingungen* $\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_3$ *gilt es für* $x \geq 0$:

$$\lim_n \sqrt[n]{1 - W_n(nx)} = \rho^*(x). \tag{3}$$

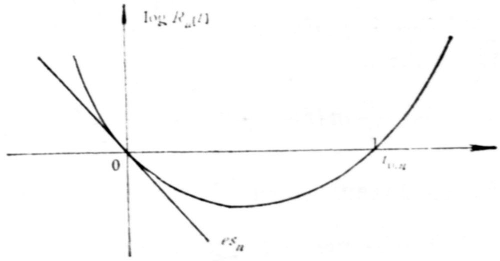
Für den Beweis benötigen wir einige Hilfsergebnisse, die mit Lemmas 1 und 2 gegeben werden.

Lemma 1. *Es seien* B_2 *und* B_3 *erfüllt. Dann existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen* $t_{0,n} > 0$, $t_0 > 0$, *so daß*

$$R_n(t_{0,n})=1,\ r(t_0)=1 \ \textit{und} \ \lim_n t_{0,n}=t_0.$$

B e w e i s. Aus B_3 folgt, daß $n\delta \in \operatorname{int} \operatorname{Supp} S_n$, d. h. $\rho_n(n\delta)>0$. Folglich ist

$$R_n(t)=\sup\{\rho_n(x)\,e^{tx}:\ x\in \operatorname{conv} \operatorname{Supp} S_n\}\geqq \rho_n(n\delta)\,(e^{n\delta})^t.$$



Deshalb gelten:

(3) $$\lim_{t\to\infty} R_n(t)=\infty$$

und

(4) $$\lim_{t\to\infty} r(t)=\infty$$

Von den Funktionen $\log R_n(t)$ und $\log r(t)$ wissen wir noch, daß sie:

a) convexe Funktionen sind,

b) $\log R_n(0)=0=\log r(0)$,

c) $(\log R_n(t))'_{t=0}=\mathsf{E}\,S_n<0$, $(\log r(t))'_{t=0}\leqq \alpha<0$.

Es ist leicht zu sehen (vergleiche mit Abb. 1), daß $\log R_n$ und $\log r$ fallende Funktionen in einer ε-Umgebung der Null, $U_\varepsilon(0)$, sind. Daraus und aus (3) und (4) können wir schließen, daß eindeutig bestimmte positive Zahlen $t_{0,n}$ und t_0 existieren, so daß

d) $$\log R_n(t_{0,n})=\log r(t_0)=0,$$

e) $$(\log R_n(t))'_{t=t_{0,n}}>0,\ (\log r(t))'_{t=t_0}>0$$

gelten, d, h. $\log R_n$ wächst in $U_\varepsilon(t_{0,n})$ und $\log r$ — in $U_\varepsilon(t_0)$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $t_{0,n} \xrightarrow[n]{} t_0$. Bezeichnen wir

$$m_n(t_{0,n})\doteq\frac{1}{n}(\log R_n(t))'_{t=t_{0,n}}>0,$$

$$m(t_0)\doteq(\log r(t))'_{t=t_0}>0.$$

Wir wollen zuerst den Fall betrachten:

i) $$t_0>t_{0,n}.$$

Aus der Subgradientenungleichung für convexe Funktionen, für $1/n \log R_n$ haben wir

(5) $\frac{1}{n}\log R_n(t_0) \geqq \frac{1}{n}\log R_n(t_{0,n}) + m_n(t_{0,n})(t_0 - t_{0,n}) = m_n(t_{0,n})(t_0 - t_{0,n}) > 0.$

Aus H_2 folgt: $m_n(t_0) \xrightarrow[n]{} m(t_0) > 0$ (Th. 25.7 aus 5), d. h. für genügend grosses n ist auch $m_n(t_0) > 0$. Es ist möglich solche Konstanten a und $n_0(a)$ zu finden, daß $t_0 - a < t_{0,n}$ und sogleich $t_0 - a$ in dem Interval liegt, wo $\log R_n(t)$ (für $n > n_0(a)$) und $\log r(t)$ wachsende Funktionen sind. Dann bekommt man aus der Eigenschaft „convex": $m_n(t_0 - a) < m_n(t_{0,n})$. Aber $m_n(t_0 - a) \xrightarrow[n]{} m(t_0 - a) > 0$ und für genügend großes n:

$$0 < \frac{1}{2} m(t_0 - a) < m_n(t_0 - a).$$

Wir wollen dies in (5) einsetzen. Nach Grenzübergang in n bekommen wir

$$0 \geqq \frac{1}{2} m(t_0 - a) \lim_n (t_0 - t_{0,n}),$$

was möglich ist nur wenn $t_0 = \lim_n t_{0,n}$.

ii) $$t_0 < t_{0,n}$$

In diesem Fall werden wir die Ungleichung benutzen:

(6) $$\frac{1}{n}\log R_n(t_{0,n}) \geqq \frac{1}{n}\log R_n(t_0) + m_n(t_0)(t_{0,n} - t_0).$$

Aus H_2 und hieraus bekommt man nach Grenzübergang in n

$$0 \geqq m(t_0) \lim_n (t_{0,n} - t_0), \text{ d. h. } \lim_n t_{0,n} = t_0.$$

Somit ist Lemma 1 bewiesen.

Für die Verteilungsfunktion (V. F,) $W_n(x)$ benötigen wir noch eine Art Bernsteinsche Ungleichung:

L e m m a 2. *Unter den Bedingungen* $B_1 - B_3$ *gilt es für* $x \geqq 0$ *und* $t \geqq t_{0,n}$:

(7) $$1 - W_n(x) \leqq R_n(t) e^{-tx}.$$

B e w e i s. Die V. F. von ξ_n sei $V_n(x)$. Aus B_1 und aus der Darstellung (1') läßt sich schließen (wie z. B. in [2]), daß für $W_n(x)$ die Lindleysche Integralgleichung gilt:

$$W_n(x) = P(w_{n-1} + \xi_n < x) = \int_{-\infty}^{x} W_{n-1}(x-y)\, dV_n(x).$$

Wir wollen (7) induktiv beweisen:

$n=1$: $1 - \mathsf{P}(w_1 < x) = 0$, und gleichzeitig $e^{-tx}.\, \mathsf{E}e^{t\xi_1} > 0$, da $w_1 = \xi_1 = 0$ ist, d. h. (7) gilt.

$n=2$: $\forall x \geqq 0$ $W_1(x) = 1$, deshalb

$$1 - W_2(x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} W_1(x-y)\, dV_2(y) = 1 - V_2(x).$$

Auf Grund der Markoffsche Ungleichung bekommt man $1-V_2(x) \leqq e^{-tx} \mathsf{E} e^{t\xi_2}$, d. h. (7) gilt wieder. Nehmen wir jetzt an, daß (7) für ein fixiertes n gilt. Wir zeigen, daβ dasselbe auch für $n+1$ erfüllt wird:

$$1-W_{n+1}(x)=1-\int_{-\infty}^{x} W_n(x-y)\,dV_{n+1}(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{x} [1-W_n(x-y)]\,dV_{n+1}(y)+(1-V_{n+1}(x))$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{x} R_n(t)\,e^{-t(x-y)}\,dV_{n+1}(y)+(1-V_{n+1}(x))$$

$$=R_{n+1}(t)\,e^{-tx}+(1-V_{n+1}(x))-R_n(t)\int_{x}^{\infty} e^{-t(x-y)}\,dV_{n+1}(y)$$

$$\leqq R_{n+1}(t)\,e^{-tx}+(1-V_{n+1}(x))(1-R_n(t))\leqq R_{n+1}(t)\,e^{-tx}$$

da $1-V_{n+1}(x) \geqq 0$, und $1-R_n(t) \leq 0$ für $t \geqq t_{0,n}$. Damit ist Lemma 2 bewiesen

Jetzt sind wir in der Lage, Satz 2 zu beweisen.

B e w e i s des Satzes 2. Aus der Bernsteinsche Ungleichung (7) folgt es für $x \geqq 0$, daß $\sqrt[n]{1-W_n(nx)} \leqq e^{-xt} \cdot \sqrt[n]{R_n(t)}, \forall t \geqq t_{0,n}$.

Deshalb haben wir weiter

$$\lim_n \sqrt[n]{1-W_n(nx)} \leqq e^{-xt} \cdot r(t), \quad \forall t > t_0,$$

woraus offensichtlich die Abschätzung von oben gilt

$$\lim_n \sqrt[n]{1-W_n(nx)} \tag{8}$$

$$\leqq \begin{cases} \inf\,(e^{-tx} \cdot r(t) : t > t_0) = \rho(x), & \text{für } x > m(t_0), \\ e^{-t_0 x}, & \text{für } x \leqq m(t_0). \end{cases}$$

Die rechte Seite der Ungleichung (8) ist genau gleich $\rho^*(x)$.

Andererseits haben wir die Ungleichung

$$1-W_n(nx)=\mathsf{P}(\max_{1\leqq k\leqq n} \xi_n+\ldots+\xi_k \geqq nx)$$

$$\geqq \mathsf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n \geqq nx)=1-\mathscr{S}_n(nx)$$

wo $\mathscr{S}_n(x)$ die V. F. von S_n ist. Unter Berücksichtigung von B_2, genauer — vom Satz 1, bekommen wir

$$\lim_n \sqrt[n]{1-W_n(nx)} \geqq \lim_n \sqrt[n]{1-\mathscr{S}_n(nx)}=\rho(x),$$

für jedes $x \geqq 0$, speziell auch für $x > m(t_0)$. Es bleibt noch zu zeigen:

$$\lim_n \sqrt[n]{1-W_n(nx)} \geqq e^{-xt_0}, \quad \text{für } x \leqq m(t_0).$$

Mit $t_{x,n}$ bezeichnen wir die Lösung der Differentialgleichung $(\log R_n(t))' = nx$. Da $x \geqq 0 > \mathsf{E} S_n$, folgt es aus den Eigenschaften der klassischen Chernoffschen Funktion, daß $t_{x,n} > 0$ ist. Wegen H_2 existiert $\lim_n t_{x,n} = t_x$ mit $t_x \leqq t_0$ für $x \leqq m(t_0)$. Dann gilt die Abschätzung von unten:

$$\lim_n \sqrt[n]{1 - W_n(nx)} \geqq \lim_n \sqrt[n]{e^{-nxt_{x,n}} R_n(t_{x,n})}$$

$$\geqq \lim_n \left(\int_0^\infty e^{t_{x,n}(S_n - nx)}\, dP_n\right)^{1/n} \geqq \lim_n \left(e^{-nxt_{x,n}} \mathsf{P}(S_n \geqq 0)\right)^{1/n}$$

$$\geqq \lim_n e^{-xt_{x,n}} (1/n)^{1/n} = e^{-xt_x} \geqq e^{-xt_0}.$$

Somit bekommt man

$$\lim_n \sqrt[n]{1 - W_n(nx)} \geqq \rho^*(x). \tag{9}$$

Also, aus (8) und (9) folgt schließlich das Grenzverhältnis (3), w. z. b. w.

Die Größe $1 - W_n(nx)$ drückt die Wahrscheinlichkeit der droßen Abweichungen der Wartezeit W_n aus, die eine innere Charakteristik des Bedienungsprozesses ist. Die Größe $\rho^*(x) = \inf \{ e^{-tx} \cdot r(t) : t \geqq t_0 \}$ mit $r(t) = \lim_n \sqrt[n]{\mathsf{E} e^{t \sum_{i=1}^n (\eta_i - \tau_{i+1})}}$ ist eine asymptotische Charakteristik, bestimmt durch die Folgen der Bedienungszeiten $\{\eta_i\}_i$ und der Pausenzeiten $\{\tau_i\}_i$. Deshalb drückt Satz 2 einen objektiven Zusammenhang zwischen den Bedienungs- und Eingangsprozessen aus.

LITERATUR

1. P. Bartfai. Large deviations in the queueing theory. *Periodika Math. Hungarica*, **2**, 1972, 165—172.
2. D. V. Lindley. The theory of queues with a single server. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 1952, 277—289.
3. E. Pantschewa. Rao-Bahadursches Theorem für die grossen Abweichungen bei unabhängigen und nicht identisch verteilten Zufallsgrössen. *Serdica*, **3**, 1977, 89—93.
4. Е. Панчева. Теорема за големите отклонения на суми от случайни вектори. *ММО*, 1982, 417—421.
5. Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. Москва, 1973.

Centre for Mathematics and Mechanics
Sofia 1090 P. O. Box 373

Eingegangen am 21. 11. 1983