Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О $\varkappa$-МЕТРИЗУЕМЫХ ХАУСДОРФОВЫХ БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ $\varkappa$-МЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ

ГЕОРГИ Д. ДИМОВ

В работе найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данное $\varkappa$-метризуемое (совершенно $\varkappa$-нормальное) пространство имело $\varkappa$-метризуемое (совершенно $\varkappa$-нормальное) хаусдорфовое бикомпактное расширение. Дано описание семейства всех хаусдорфовых $\varkappa$-метризуемых (совершенно $\varkappa$-нормальных) бикомпактных расширений данного пространства на языке близостей и $\varkappa$-метрик ($o\varkappa$-метрик).

В [6] Е. В. Щепин ввел в рассмотрение новый класс пространств — класс $\varkappa$-метризуемых пространств, и в работах [6, 7, 8, 9] изучил свойства пространств этого класса. Особенно замечательными оказались $\varkappa$-метризуемые бикомпакты. Поэтому естественно возник вопрос, поставленный В. Выловым, о том, какие пространства обладают $\varkappa$-метризуемыми хаусдорфовыми бикомпактными расширениями. В этой работе, большинство результатов которой были анонсированы (без доказательств) в [13 и 14], отвечается полностью на вопрос В. Вылова, а также описываются все близости данного вполне регулярного пространства X, которым отвечают (при соответствии Ю. М. Смирнова [3]) $\varkappa$-метризуемые хаусдорфовые бикомпактные расширения пространства X. К выделенным классом E пространств, обладающии хаусдорфовыми $\varkappa$-метризуемыми бикомпактными расширениямн, можно применять результаты Е. Щепина, полученные для $\varkappa$-метризуемых бикомпактов. Таким образом получается, что класс E — мультипликативен, замкнут относительно взятия экспоненты, относительно взятия всюду плотных либо $\varkappa$-замкнутых подпространств, все его элементы обладают свойством Суслина, в нем кардинальнозначные инварианты: вес, характер, π-вес, π-характер совпадают и т. д. (Тем, самым теоремы Е. Щепина, полученные для $\varkappa$-метризуемых бикомпактов, распространяются на более широком классе пространств.) Кроме того, очевидно все сепарабельные метризуемые пространства входят в класс E. Элементами класса E являются также и все псевдокомпактные $\varkappa$-метризуемые пространства (так как для них, как доказал А. Чигогидзе в [5], Стоун — Чеховское расширение βX — $\varkappa$-метризуемо). Как следствие получены новые необходимые и достаточные условия для того, чтобы одно пространство X было одновременно метризуемым и сепарабельным. Аналогичные вопросы рассматриваются также и относительно другого класса пространств — класса $w\varkappa$-метризуемых пространств (который определяется ниже), более широкого, чем класс $\varkappa$-метризуемых пространств, а также относительно класса совершенно $\varkappa$-нормальных (см. [6]), или, что то же самое, класса Oz-пространств (см. [11]). Получено внутреннее описание класса пространств, обладающих хаусдорфовым совершенно $\varkappa$-нормальным ($w\varkappa$-метризуемым) бикомпактным расширением, а также охарактеризованы все близости, которые отвечают совершенно $\varkappa$-нормальным ($w\varkappa$-метризуемым) хаусдорфовым бикомпактным расширениям данного совершенно $\varkappa$-нормального ($w\varkappa$-метризуемого) пространства. Обобщена теорема Е. Щепина из [6] о том, что метризуемые пространства обладают совершенно $\varkappa$-нормальными хаусдорфовыми бикомпактными расширениями. При помощи полученных результатов легко находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы Стоун — Чеховское бикомпактное расширение βX данного пространства X было совершенно $\varkappa$-нормальным ($w\varkappa$-метризуемым, $\varkappa$-метризуемым) пространством (тем самым получено новое доказательство одной теоремы Т. Терадаиз [21]). Наконец, результаты Д. Рудда из [19] перенесены на любое бикомпактное хаусдорфовое расширение с X данного пространства X.

1. Предварительные сведения, определения, замечания.

1.1. Все понятия и обозначения, которые не определяются в этой работе, можно найти в [1, 15, 7].

Семейство всех канонически замкнутых (или, коротко, $\varkappa$-замкнутых) подмножеств топологического пространства X будем обозначать через $K(X)$, замыкание подмножества A пространства X в X — через $cl_X\ A$, или $\bar{A}$, пустое множество — через $\emptyset$. Как обычно, чрез R будем обозначать пространство действительных чисел со своей естественной топологией, через R^+ — подпространство неотрицательных действительных чисел, а через N — подпространство натуральных чисел. Если X — топологическое пространство, а $f: X \to \mathsf{R}$ — непрерывная функция, то через $Z_X(f)$ будем обозначать нулевое множество функции f в X (т. е. $Z_X(f)=\{x\in X: f(x)=0\}$). Множество всех (ограниченных) непрерывных функций $f: X\to \mathsf{R}$ пространства X обозначаем, как обычно, через $C(X)$ ($C^*(X)$).

Напомним, что отображение $\rho: X\times K(X)\to \mathsf{R}^+$ называется $\varkappa$-метрикой на топологическом пространстве X (см. [7]), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(K1) Для любого $C\in K(X)$, отображение $\rho_C: X\to \mathsf{R}^+$, где $\rho_C(x)=\rho(x, C)$, для любого $x\in X$, непрерывно;

(K2) $\rho(x, C)=0$ тогда и только тогда, когда $x\in C$ (для любого $C\in K(X)$ и $x\in X$);

(K3) Если $C\subset C'$, то $\rho(x, C)\geqq\rho(x, C')$, для любого $x\in X$ (где $C, C'\in K(X)$);

(K4) $\rho(x, cl_X \bigcup \{C_\alpha: \alpha<\alpha_0\})=\inf f\{\rho(x_1\ C_\alpha): \alpha<\alpha_0\}$, для любого $x\in X$ и для любой неубывающей трансфинитной последовательности $\{C_\alpha: \alpha<\alpha_0\}$ элементов $K(X)$.

Пара (X, ρ), где X — топологическое пространство, а ρ — $\varkappa$-метрика на нем, называется $\varkappa$-метрическим пространством (см. [7]). Топологическое пространство X называется $\varkappa$-метризуемым [7], если существует $\varkappa$-метрика на нем, $\varkappa$-метрика ρ на пространстве X называется нормированной [7], если она удовлетворяет следующему условию:

(НК) $\rho(x, \emptyset)=1$, для любого $x\in X$.

В [7] показано, что на всяком $\varkappa$-метризуемом пространстве существует нормированная $\varkappa$-метрика.

1.2. Определение. *Отображение* $\rho: X\times K(X)\to \mathsf{R}^+$ *называется* $o\varkappa$-*метрикой на топологическом пространстве* X, *если оно удовлетворяет условиям* (K1, K2). $o\varkappa$-*метрика называется* $w\varkappa$-*метрикой на топологическом пространстве* X, *если она удовлетворяет условию* (K3). *Очевидным образом вводятся понятия* $o\varkappa$-*метрического и* $w\varkappa$-*метрического пространства, а также понятия* $o\varkappa$-*метризуемого и* $w\varkappa$-*метризуемого простран-*

ства, нормированной wϰ-метрикой и ограниченной oϰ-метрикой. Из доказательства предложения 1, гл. 2 работы [7] *видно, что на всяком oϰ-метризуемом (wϰ-метризуемом) пространстве существует ограниченная нормированная oϰ-метрика (wϰ-метрика).*

1.3. Замечание. Используя рассуждения К. Боржеса, проведенные им в работе [12] при функциональной характеризации кружевных пространств, можно показать, что одно пространство X является oϰ-метризуемым тогда и только тогда, когда любому $C\in K(X)$ можно сопоставить последовательность $\{C_n : n\in \mathsf{N}\}$ ϰ-замкнутых (или, что эквивалентно, замкнутых) подмножеств таким образом, что: (S1) $C=\cap\{C_n : n\in\mathsf{N}\}$ и (S2) $C\subset \operatorname{Int} C_n$, для любого $n\in\mathsf{N}$. Так как, очевидно, класс oϰ-метризуемых пространств совпадает с классом совершенно ϰ-нормальных пространств, то тем самым получена характеристика класса совершенно ϰ-нормальных пространств. Если мы потребуем, чтобы при этом сопоставлении выполнялось еще следующее условие: „(S3) Если $C'\subset C''$, где $C', C''\in K(X)$, то $C'_n\subset C''_n$, для любого $n\in\mathsf{N}$", то, очевидно, получим внутреннюю характеристику класса wϰ-метризуемых пространств. (На этом пути можно получить, но гораздо сложнее, внутреннюю характеристику ϰ-метризуемых пространств — это было сделано А. Чигогидзе в [5].)

Отметим также, что свойство быть wϰ-метризуемым пространством наследуется по ϰ-замкнутым и повсюду плотным подмножествам (и, следовательно, и по открытым подмножествам). Доказательства этих утверждений такие же, как и в случае ϰ-метризуемых пространств (которые приведены в [7]). Для класса $O z$-пространств такие же утверждения были доказаны в [11].

1.4. Определение. *Нормированную wϰ-метрику* $\rho : X\times K(X)\to \mathsf{R}^+$ *будем называть sϰ-метрикой на топологическом пространстве X, если она удовлетворяет следующему условию (аналогичному условию* (K4)):

$$\text{(SK4)}\qquad \bar\rho(E, cl_X(\cup\{C_\alpha : \alpha<\alpha_0\}))=\inf\{\bar\rho(E, C_\alpha) : \alpha<\alpha_0\}$$

для любого подмножества E пространства X и для любой неубывающей трансфинитной последовательности $\{C_\alpha : \alpha<\alpha_0\}$ *элементов* $K(X)$ *(как и в* [7], $\bar\rho(A, C)=\sup\{\rho(a, C) : a\in A\}$, *для* $A\subset X$ *и* $C\in K(X)$).

Если ρ *является метрикой и* ρ *удовлетворяет условию* (SK4), *то* ρ *будем называть s-метрикой. Очевидным образом определяются понятия s-метрического (sϰ-метрического) и s-метризуемого (sϰ-метризуемого) пространства.*

1.5. Обозначения. Пусть X — топологическое пространство и $\rho : X\times K(X)\to\mathsf{R}^+$ — произвольная функция, $a\in\mathsf{R}^+$ и $C\in K(X)$. Положим $L_a(C)=cl_X(\{x\in X : \rho(x, C)<a\})$, $U_a(C)=cl_X(\{x\in X : \rho(x, C)>a\})$. Иногда будем писать также $L^\rho_a(C)$ и $U^\rho_a(C)$ вместо, соответственно, $L_a(C)$ и $U_a(C)$.

1.6. Определение. *sϰ-метрику (wϰ-метрику, oϰ-метрику)* $\rho : X\times K(X)\to\mathsf{R}^+$ *будем называть csϰ-метрикой (cwϰ-метрикой, coϰ-метрикой) на топологическом пространстве X, если она удовлетворяет следующему условию:*

(CK5) $\rho(L_a(C), U_{a+\varepsilon}(C))>0$ *и* $\rho(U_{a+\varepsilon}(C), L_a(C))>0$, *для любого* $C\in K(X)$, *любого* $a\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$ *и любого* $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$ *(здесь, как обычно,* $\rho(A, C)=\inf\{\rho(a, C) : a\in A\}$, *для любых* $A\subset X$ *и* $C\in K(X)$).

Очевидным образом определяются понятия csϰ-метризуемого (cwϰ-метризуемого, coϰ-метризуемого) и csϰ-метрического (cwϰ-метрического, coϰ-метрического) пространства.

1.7. Замечание. Очевидно, что любое метрическое пространство является $cw\varkappa$-метрическим пространством и любое s-метрическое пространство является $cs\varkappa$-метрическим пространством.

1.8. Определение. *$s\varkappa$-метрику ($w\varkappa$-метрику, $o\varkappa$-метрику) $\rho: X \times K(X) \to \mathbb{R}^+$ будем называть $\beta s\varkappa$-метрикой ($\beta w\varkappa$-метрикой, $\beta o\varkappa$-метрикой) на топологическом пространстве X, если она удовлетворяет следующему условию: (βK5) $\rho(A, C) > 0$, для любых $C \in K(X)$ и $A \subset X$, которые вполне отделимы в X.*

Будем говорить также о $\beta s\varkappa$-метрических ($\beta w\varkappa$-метрических, $\beta o\varkappa$-метрических) и $\beta s\varkappa$-метризуемых ($\beta w\varkappa$-метризуемых, $\beta o\varkappa$-метризуемых) пространствах.

1.9. Определение. *Если (X, δ) — близостное пространство, то топологию на множестве X, порожденную близостью δ, будем обозначать через τ_δ. Кроме того, будем писать, как обычно, что $A\delta B$ ($A\bar{\delta}B$), где A и B — подмножества множества X, если множества A и B близки (далеки).*

Близость δ на множестве X называется $co\varkappa$-метризуемой ($cw\varkappa$-метризуемой, $cs\varkappa$-метризуемой), если существует ограниченная и нормированная $co\varkappa$-метрика (нормированная $cw\varkappa$-метрика, нормированная $cs\varkappa$-метрика) ρ на топологическом пространстве (X, τ_δ), такая, что выполняется следующее условие: (КР) $A\delta C$ тогда и только тогда, когда $\rho(A, C) = 0$, для любых $C \in K(X)$ и $A \subset X$.

1.10. Замечание. Отметим, что если (X, δ) — близостное пространство и функция $\rho: X \times K(X) \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию (КР), то ρ удовлетворяет и условию (К2) относительно топологического пространства (X, τ_δ). Действительно, так как $C \in K(X)$ — замкнуто в топологическом пространстве (X, τ_δ), то $x \in C$ тогда и только тогда, когда $\{x\} \delta C$, т. е. по (КС), тогда и только тогда, когда $\rho(x, C) = 0$.

1.11. Обозначение. Упорядоченное множество всех $co\varkappa$-метризуемых ($cw\varkappa$-метризуемых, $cs\varkappa$-метризуемых) близостей на топологическом пространстве X будем обозначать через $(o\varkappa P(X), \leq)$ ($(w\varkappa P(X), \leq)$, $(\varkappa P(X), \leq)$). (Порядок в этих множествах индуцируется естественным порядком во множестве всех близостей на топологическом пространстве X (см. [3]).)

1.12. Следующая лемма хорошо известна:

Лемма. *Пусть X_0 — всюду плотное подпространство пространства X. Тогда: а) для любого $C' \in K(X)$ существует $C \in K(X_0)$, такое, что $C' = cl_X C$. Кроме того, для любого $C \in K(X_0)$, множество $cl_X C$ является элементом множества $K(X)$.*

б) для любого $C \in K(X_0)$ существует $C' \in K(X)$, такое, что $C = C' \cap X_0$. Кроме того, для любого $C' \in K(X)$, множество $C' \cap X_0$ является элементом множества $K(X_0)$ и $C' = cl_X(C' \cap X_0)$.

1.13. Пусть X_0 — всюду плотное подмножество топологического пространства X, и пусть ρ' — $o\varkappa$-метрика ($w\varkappa$-метрика, $\varkappa$-метрика) на пространстве X. Функция $\rho: X_0 \times K(X_0) \to \mathbb{R}^+$, определенная формулой $\rho(x, C) = \rho'(x, cl_X C)$, где $C \in K(X_0)$, $x \in X_0$, называется ограничением функции ρ' на X_0. Тогда, как показано в [7], ρ является $o\varkappa$-метрикой ($w\varkappa$-метрикой, $\varkappa$-метрикой) на пространстве X_0. Будем писать: $\rho = \rho' | X_0$. Наоборот, если для $o\varkappa$-метрики ($w\varkappa$-метрики, $\varkappa$-метрики) ρ на пространстве X_0 существует $o\varkappa$-метрика ($w\varkappa$-метрика, $\varkappa$-метрика) ρ' на пространстве X, такая, что $\rho = /\rho' | X_0$, то ρ' называется продолжением функции ρ.

2. Теоремы

В дальнейшем все рассматриваемые пространства будут вполне регулярными и хаусдорфовыми. Стоун—Чеховское бикомпактное расширение пространства X будем обозначать через βX. Если $f \in C^*(X)$, то ее продолжение на βX будем обозначать через f^β.

2.1. В [19] Д. Рудд доказал такую теорему:

Теорема (Д. Рудд). *Пусть $f \in C(X)$. Множество $cl_{\beta X} Z_X(f)$ является нуль-множеством в пространстве βX тогда и только тогда, когда существует $g \in C^*(X)$, такая, что:* а) $Z_X(g) = Z_X(f)$ *и* б) *если подмножество A пространства X вполне отделимо в X от подмножества $Z_X(g)$, то $\inf\{|g(a)| : a \in A\} > 0$. В этом случае $cl_{\beta X} Z_X(f) = Z_{\beta X}(g^\beta)$. Обратно, если $g \in C^*(X)$, то множество $Z_{\beta X}(g^\beta)$ можно представить в виде $cl_{\beta X} Z_X(f)$ для некоторой функции $f \in C(X)$ тогда и только тогда, когда для любого подмножества A пространства X, вполне отделимого в X от множества $Z_X(g)$, $\inf\{|g(a)| : a \in A\} > 0$. Тогда $cl_{\beta X} Z_X(g) = Z_{\beta X}(g^\beta)$.*

2.2. Пусть (X, δ) — близостное пространство. Бикомпактное расширение Смирнова, соответствующее близости δ, будем обозначать через $c_\delta X$. Если $f : (X, \delta) \to [a, b] \subset \mathrm{R}$ — близостно непрерывная функция, то ее непрерывное продолжение на $c_\delta X$ будем обозначать через f^δ, т. е. $f^\delta : c_\delta X \to [a, b]$.

Следующую теорему можно доказать также как и цитированную выше теорему 2.1 Д. Рудда, делая только незначительные изменения, пользуясь известными фактами теории близостных пространств:

Теорема. *Пусть (X, δ) — близостное пространство и $Y = c_\delta X$. Тогда:* а) *Если $f \in C(X)$, то $cl_Y Z_X(f)$ является нуль-множеством в Y тогда и только тогда, когда существует близостно непрерывная функция g: $(X, \delta) \to [a, b] \subset \mathrm{R}$, такая, что:* 1) $Z_X(f) = Z_X(g)$, *и* 2) *если $A \subset X$ и $A \bar{\delta} Z_X(g)$, то $\inf\{|g(a)| : a \in A\} > 0$. В этом случае $cl_Y Z_X(f) = Z_Y(g^\delta)$.* б) *Если g: $(X, \delta) \to [a, b] \subset \mathrm{R}$ — близостно непрерывная функция, то множество $Z_Y(g^\delta)$ можно представить в виде $cl_Y Z_X(f)$ для некоторой функции $f \in C(X)$ тогда и только тогда, когда для любого подмножества A пространства X, такого, что $A \bar{\delta} Z_X(g)$, имеем $\inf\{|g(a)| : a \in A\} > 0$. Тогда $Z_Y(g^\delta) = cl_Y Z_X(g)$.*

2.3. Пусть (X, δ) — близостное пространство, и δ_α — близость на пространстве R, соответствующая Александровскому бикомпактному расширению $\alpha\mathrm{R}$ пространства R. Тогда, если f: $(X, \delta) \to (\mathrm{R}, \delta_\alpha)$ близостно непрерывная функция, то существует непрерывное продолжение функции f на пространстве $c_\delta X$. Это продолжение будем обозначать через f_δ^*, т. е. $f_\delta^* : c_\delta X \to \alpha\mathrm{R}$. Доказательство теоремы 2.2 основывается на следующей теореме, которая аналогична соответствующей теореме Д. Рудда ([19], теор. 1.2):

Теорема. *Пусть (X, δ) — близостное пространство, f: $(X, \delta) \to (\mathrm{R}, \delta_\alpha)$ — близостно непрерывная функция, и $Y = c_\delta X$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $Z_Y(f_\delta^*) \neq cl_Y Z_X(f)$;

б) *Существует подмножество A пространства X, такое, что $A \bar{\delta} Z_X(f)$ и $\inf\{|f(a)| : a \in A\} = 0$.*

Доказательство этой теоремы также получается, следуя рассуждения Д. Рудда при показательстве теоремы 1.2 работы [19] и делая только незначительные изменения.

2.4. Лемма. *Пусть* (X, δ) — *близостное пространство. Пространство* $c_\delta X$ *является совершенно* $\varkappa$*-нормальным* ($w\varkappa$*-метризуемым*) *пространством тогда и только тогда, когда существует ограниченная* $o\varkappa$*-метрика* (*нормированная* $w\varkappa$*-метрика*) ρ *на топологическом пространстве* (X, τ_δ), *такая, что*: а) *функции* $\rho_c:(X, \delta)\to[0, M]$ — *близостно непрерывны, для любого* $C\in K(X)$, *и* б) $\rho(A, C)<0$, *для любого* $C\in K(X)$ *и любого* $A\subset X$, *таких, что* $A\bar{\delta}C$.

Доказательство. Обозначим через δ_c единственную близость, совместимую с топологией пространства $c_\delta X$. Тогда (X, δ) является близостным подпространством близостного пространства $(c_\delta X, \delta_c)$. Следовательно, ограничение на X любой непрерывной функции на бикомпактном пространстве $c_\delta X$ является близостно непрерывной функцией на пространстве (X, δ).

Пусть теперь ρ' — ограниченная константой 1 $o\varkappa$-метрика (нормированная $w\varkappa$-метрика) на пространстве $Y=c_\delta X$ и $\rho=\rho'|_X$. Тогда ρ является ограниченной константой 1 $o\varkappa$-метрикой (нормированной $w\varkappa$-метрикой) на пространстве (X, τ_δ) и функция $\rho_c:(X, \delta)\to[0, 1]$ близостно непрерывна, для любого $C\in K(X)$. Если $C\in K(X)$ и $A\subset X$ таковы, что $A\bar{\delta}C$, то $\bar{A}^Y\cap\bar{C}^Y=\varnothing$. Следовательно, $\inf\{\rho'_{\bar{C}^Y}(a): a\in\bar{A}^Y\}>0$. Так как $\rho_C(a)=\rho'_{cl_Y C}(a)$, для любого $a\in A$, то получаем, что $\inf\{\rho_C(a): a\in A\}>0$.

Обратно, пусть ρ — $o\varkappa$-метрика на пространстве (X, τ_δ) со свойствами а) и б). Пусть ρ — ограничена константой 1, и пусть $C\in K(X)$. Так как функция $\rho_C:(X, \delta)\to[0, 1]$ — близостно непрерывна, то ее можно продолжить до непрерывной функции $\rho'_C: c_\delta X\to[0, 1]$. Так как $C=Z_X(\rho_C)$ и $\inf\{\rho_C(a): a\in A\}=\rho(A, C)>0$, для любого $A\subset X$, такого, что $A\bar{\delta}C$, то из теоремы 2.2а) получаем, что $cl_Y C=Z_Y(\rho'_C)$. Поэтому положим $\rho''_{cl_Y C}=\rho'_C$. Теперь Лемма 1.12а) показывает, что пространство $c_\delta X$ совершенно $\varkappa$-нормально. Положив $\rho''(x, \bar{C}^Y)=\rho''_{cl_Y C}(x)$, для любого $C\in K(X)$, получим, что $\rho=\rho''|_X$, т. е ρ'' является продолжением функции ρ.

Если ρ — нормированная $w\varkappa$-метрика на пространстве (X, τ_δ), то и функция ρ'', определенная выше, будет $w\varkappa$-метрикой на пространстве $c_\delta X$. Действительно, пусть $C, C'\in K(X)$ и $\bar{C}^Y\subset cl_Y C'$ (см. 1.12а). Тогда $C\subset C'$ и, следовательно, $\rho_C\geqq\rho_{C'}$, откуда сразу следует, что $\rho''_{cl_Y C}\geqq\rho''_{cl_Y C'}$.

2.5. Нам будет нужна следующая теорема С. Мрувки:

Теорема (С. Мрувка, [17], теор. 4.11). *Пусть* X_0 — *подпространство топологического пространства* X, *и пусть* $f\in C^*(X_0)$. *Функцию* $f: X_0\to\mathbb{R}$ *можно продолжить до непрерывной ограниченной функции на пространстве* X *тогда и только тогда, когда для любых* $a, b\in\mathbb{R}$, *где* $a<b$, *существует непрерывная функция* $g: X\to[0, 1]$, *такая, что если* $A=\{x\in X_0: f(x)\leq a\}$ *и* $B=\{x\in X_0: f(x)\geq b\}$, *то* $g(A)=0$ *и* $g(B)=1$.

2.6. Теорема. *Пусть* (X, δ) — *близостное пространство. Пространство* $c_\delta X$ *совершенно* $\varkappa$*-нормально* ($w\varkappa$*-метризуемо*) *тогда и только тогда, когда близость* δ $co\varkappa$*-метризуема* ($cw\varkappa$*-метризуема*).

Доказательство. Пусть δ — $co\varkappa$-метризуемая ($cw\varkappa$-метризуемая) близость, т. е. существует ограниченная константой 1 $co\varkappa$-метрика (нормированная $cw\varkappa$-метрика) ρ на топологическом пространстве (X, τ_δ), такая, что $A\delta C$ тогда и только тогда, когда $\rho(A, C)=0$, где $C\in K(X)$ и $A\subset X$. Пусть $C\in K(X)$. Тогда функция $\rho_C: X\to[0, 1]$ непрерывна. Пусть $a, b\in\mathbb{R}$, где $a<b$

и пусть $A=\{x\in X:\rho_C\ (x)\leqq a\}$, $B=\{x\in X:\rho_C\ (x)\geqq b\}$. Пусть $\lambda=\frac{b-a}{3}\cdot$ Тогда $A\subset L_{a+\lambda}(C)$ и $B\subset U_{b-\lambda}(C)$. Теперь из (СК5) получаем, что $\rho\,(L_{a+\lambda}(C), U_{b-\lambda}(C))>0$, а тогда из (КР) следует, что $A\bar{\delta}B$. Следовательно, существует близостно непрерывная функция $g:(X,\delta)\to[0,1]$, такая, что $g(A)=0$ и $g(B)=1$ (см., напр. [18]). Функцию g можно продолжить до непрерывной функции $g^\delta: c_\delta X\to[0,1]$ и тогда $g^\delta(A)=0$, $g^\delta(B)=1$. Теперь из теоремы 2.5 С. Мрувки вытекает, что функцию $\rho_C: X\to[0,1]$ можно продолжить до непрерывной функции $\rho'_C: c_\delta X\to[0,1]$. Следовательно, функция ρ_C — близостно непрерывна. Так как это верно для любого $C\in K(X)$, то все условия леммы 2.4 выполнены. Следовательно, пространство $c_\delta X$ совершенно $\varkappa$-нормально ($w\varkappa$-метризуемо).

Обратно, пусть $Y=c_\delta X$ — совершенно $\varkappa$-нормально ($w\varkappa$-метризуемо), т. е. существует $o\varkappa$-метрика ($w\varkappa$-метрика) ρ' на пространстве $c_\delta X$. Очевидно, можно считать, что функция ρ' ограничена константой 1. Если $\rho=\rho'|_X$, то из леммы 2.4 получаем, что ρ является ограниченной константой 1 $o\varkappa$-метрикой (нормированной $w\varkappa$-метрикой) на пространстве X и $\rho\,(A,C)>0$, если $A\bar{\delta}C$, где $A\subset X$ и $C\in K(X)$. Пусть $A\subset X$, $C\in K(X)$ и $\rho(A,C)>0$. Тогда $\rho'\,(A, cl_Y C)>0$. Но, очевидно, $\rho'\,(A, cl_Y C)=\rho'\,(cl_Y A, cl_Y C)$. Следовательно, $cl_Y A\cap cl_Y C=\varnothing$, т. е. $A\bar{\delta}C$. Итак, ρ удовлетворяет условию (КР). Покажем, что ρ удовлетворяет и условию (СК5). Пусть $C\in K(X)$, $a\in\mathsf{R}^+$ и $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$. Тогда $\rho(L_a^\rho(C), U^\rho_{a+\varepsilon}(C))=\rho'\,(L_a^\rho(C), cl_Y U^\rho_{a+\varepsilon}(C))=\rho'\,(cl_Y L_a^\rho(C), cl_Y U^\rho_{a+\varepsilon}(C))$. Но, очевидно, $X\cap L_a^{\rho'}(cl_Y C)=L_a^\rho(C)$ и $X\cap U^{\rho'}_{a+\varepsilon}(cl_Y C)=U^\rho_{a+\varepsilon}(C)$, и так как $\rho'\,(L_a^{\rho'}(cl_Y C), U^{\rho'}_{a+\varepsilon}(cl_Y C))>0$, то получаем, что $\rho\,(L_a^\rho(C), U^\rho_{a+\varepsilon}(C))>0$. Аналогично устанавливаем, что $\rho\,(U^\rho_{a+\varepsilon}(C), L_a^\rho(C))>0$. Следовательно, близость δ — $co\varkappa$-метризуема ($cw\varkappa$-метризуема).

2.7. Замечание. Теорему 2.6 можно доказать и не пользуясь теоремой 2.5 С. Мрувки и аналога теоремы 2.1 Д. Рудда, а опираясь только на конструкцию Ю. М. Смирнова при построении бикомпактного расширения $c_\delta X$ близостного пространства (X,δ) [3]. Может быть стоит привести схему этого доказательства, так как в нем продолжение ρ' $co\varkappa$-метрики ($cw\varkappa$-метрики) ρ выписывается в каком-то смысле явно.

Итак, пусть (X,δ) — близостное пространство. Для любого $C\in K((X,\tau_\delta))$ и для любого $E\subset X$, положим $d_C(E)=\sup\{|\rho(x,C)-\rho(y,C)|: x,y\in E\}$, и $d_C(\varnothing)=0$ ($d_C(E)$ естественно назвать C-диаметром множества E относительно ρ). Тогда $d_C(E)=\bar{\rho}(E,C)-\rho(E,C)$. Пусть $\rho: X\times K(X)\to[0,1]\subset\mathsf{R}$ — произвольная функция. Показываем сначала, что имеют место импликации а)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$в)$\Leftrightarrow$г), где:

а) $L_a^\rho(C)\,\bar{\delta}\,U^\rho_{a+\varepsilon}(C)$, для любого $C\in K(X)$ и для любых $a\in\mathsf{R}^+$, $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$;

б) Для любого $C\in K(X)$ и любого $E\subset X$, существуют $A\subset X$ и $B\subset X$, такие, что:

1) $A\,\bar{\delta}\,(X\setminus B)$,

2) $\max\{d_C(E\setminus A), d_C(B\cap E)\}\leq 3/4\, d_C(E)$;

в) $\inf\{d_C(E): E\in\xi\}=0$, для любого δ-конца $\xi\in c_\delta X$ и любого $C\in K(X)$;

г) $\sup\{\rho(E,C): E\in\xi\}=\inf\{\bar{\rho}(E,C): E\in\xi\}$, для любого δ-конца $\xi\in c_\delta X$ и любого $C\in K(X)$.

Положим теперь, имея ввиду лемму 1.12, $\rho'(\xi, cl_Y C)=\sup\{\rho(E,C): E\in\xi\}$, где ξ — δ-конец в (X,δ) (т. е. ξ — произвольная точка пространства $Y=c_\delta X$) и $C\in K(X)$. Тогда, если ρ удовлетворяет условия (К1) и (СК5) и еще ρ такова что из $\rho(A, C)>0$ следует $A\bar{\delta}C$ (где $A\subset X$ и $C\in K(X)$,), то имеет место а) а тогда и г), т. е. получаем, что

(*) $\rho'(\xi, cl_Y C)=\sup\{\rho(E, C): E\in\xi\}=\inf\{\bar{\rho}(E, C): E\in\xi\}$.

Используя этот факт, доказываем, что $\rho(x, C)=\rho'(\xi_x, cl_Y C)$, для любого $x\in X$ и любого $C\in K(X)$, где $\xi_x=c_\delta(x)=\{E\subset X:\{x\}\bar{\delta}(X\setminus E)\}$ (т. е. показываем, что ρ' является продолжением ρ). Далее, доказываем, что если ξ — δ-конец в (X, δ), то для любой функции $\rho: X\times K(X)\to[0, 1]$, удовлетворяющей условию б) леммы 2.4, и такой, что $\rho(x, C)=0$, если $x\in C$ (где $x\in X$, $C\in K(X)$), следующие условия эквивалентны:

д) $\rho(E, C)=0$, для любого $E\in\xi$;

е) $E\cap C\neq\emptyset$, для любого $E\in\xi$.

Теперь легко доказывается, что функция ρ' удовлетворяет условию (К2). Из равенства (*) получаем, что ρ' удовлетворяет (К1). Непосредственно видно, что если ρ удовлетворяет условию (К3), то и ρ' удовлетворяет (К3). Итак, если δ — $co\varkappa$-метризуемая ($cw\varkappa$-метризуемая) близость, то пространство $c_\delta X$ — совершенно $\varkappa$-нормально ($w\varkappa$-метризуемо).

Приведенная схема нового доказательства теоремы 2.6 показывает, ввиду замечания 1.10, что имеет место такое предложение (которое, однако, докажем независимо, для полноты изложения):

2.8. Предложение. *Пусть (X, δ) — близостное пространство. Пространство $c_\delta X$ совершенно $\varkappa$-нормально ($w\varkappa$-метризуемо) тогда и только тогда, когда существует функция $\rho: X\times K((X, \tau_\delta))\to[0, 1]\subset\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию* [а] *замечания 2.7 и условию* (КР) (*и условию* (К3)).

Доказательство. В сторону необходимости все следует из теоремы 2.6. Пусть теперь на близостном пространстве (X, δ) существует функция ρ с указанными свойствами. Покажем, что она является $co\varkappa$-метрикой ($cw\varkappa$-метрикой) на пространстве (X, τ_δ), после чего все будет следовать из теоремы 2.6. Действительно, то, что ρ удовлетворяет условию (К2), следует из 1.10. Покажем, что для любого $C\in K(X)$, функция $\rho_C: X\to[0, 1]$, где $\rho_C(x)=\rho(x, C)$, $x\in X$, непрерывна (т. е., что ρ удовлетворяет условию (К1)). Пусть $x_0\in X$ и $\rho_C(x_0)=a$. Пусть $V=(a-2\varepsilon, a+2\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Из условия а) замечания 2.7 следует, что $L_{a-\varepsilon}(C)\bar{\delta}U_{a-\varepsilon/4}(C)$ и $L_{a+\varepsilon/4}(C)\bar{\delta}U_{a+\varepsilon}(C)$. Так как $x_0\in L_{a+\varepsilon_1}(C)\cap U_{a-\varepsilon_1}(C)$, где $\varepsilon_1=\varepsilon/4$, то получаем, что $\{x_0\}\bar{\delta}L_{a-\varepsilon}(C)$ и $\{x_0\}\bar{\delta}U_{a+\varepsilon}(C)$. Но тогда $\{x_0\}\bar{\delta}(L_{a-\varepsilon}(C)\cup U_{a+\varepsilon}(C))$. Следовательно, существует открытая окрестность $0x_0$ точки x_0, такая, что $0x_0\subset\{x\in X: \rho_C(x)\in[a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, т. е. $\rho_C(0x_0)\subset V$. Следовательно, функция ρ_C непрерывна.

Наконец, из (КР) и условия а) замечания 2.7 сразу следует, что ρ удовлетворяет также и условия (СК5).

2.9. Из теоремы Ю.М. Смирнова о бикомпактных расширениях [3] и теоремы 2.6 сразу получаем следующую теорему:

Теорема. *Упорядоченное множество $(o\varkappa\mathscr{C}(X),\leq)$ $((w\varkappa\mathscr{C}(X),\leq))$ всех (с точностью до эквивалентности) совершенно $\varkappa$-нормальных ($w\varkappa$-метризуемых) бикомпактных расширений пространства X изоморфно упорядоченному множеству $(o\varkappa P(X),\leq)$ $((w\varkappa P(X),\leq))$.*

2.10. Лемма. *Пусть Y — бикомпакт, и ρ — $\varkappa$-метрика на нем. Тогда ρ является $\beta s\varkappa$-метрикой на пространстве Y.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое подмножество пространства Y, и $\{C_\alpha\in K(Y): \alpha<\alpha_0\}$ — неубывающая трансфинитная последовательность. Пусть $C=cl_Y(U\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})$. Покажем, что $\bar\rho(F,C)=\inf\{\bar\rho\ (F,\ C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}$, т. е. что:

1) $\bar\rho(F,C_\alpha)\geqq\bar\rho(F,C)$, для любого $\alpha<\alpha_0$, и

2) Для любого $\varepsilon>0$ существует $\alpha_\varepsilon<\alpha_0$, такое, что $\bar\rho(F,C_{\alpha_\varepsilon})<\bar\rho(F,C)+\varepsilon$. Так как $C_\alpha\subset C$, для любого $\alpha<\alpha_0$, то, ввиду (К3), $\rho(y,C_\alpha)\geqq\rho(y,C)$, для любого $y\in Y$ и, следовательно, $\bar\rho(F,C_\alpha)\geqq\bar\rho(F,C)$, т. е. 1) доказано.

Докажем 2). Пусть $\varepsilon>0$. Так как ρ удовлетворяет условию (К4), то $\rho(y,C)=\inf\{\rho(y,C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}$, для любого $y\in C$. Следовательно, для любого $y\in F$, существует $\alpha_y<\alpha_0$, такое, что $\rho(y,C_{\alpha_y})<\rho(y,C)+\varepsilon/2$. Фиксируем $y\in F$ и выберем соответствующее ему $\alpha_y<\alpha_0$. Тогда, согласно (К1), функция $\rho_{C_{\alpha_y}}$ — непрерывна. Следовательно, существует открытая окрестность Uy точки y в Y, такая, что $\rho(z,C_{\alpha_y})<\rho(y,C)+\varepsilon/2$, для любой точки $z\in Uy$. Выбирая таким образом окрестности U_y любой точки $y\in F$, мы получаем открытое покрытие $\omega=\{Uy:y\in F\}$ бикомпактного подпространства F пространства Y. Следовательно, существует конечное подпокрытие $\{U_{y_i}:i\in\{1,\ldots,n_\varepsilon\}\}$ покрытия ω бикомпакта F. Пусть $\alpha_\varepsilon=\max\{\alpha_{y_1},\ldots,\alpha_{y_{n_\varepsilon}}\}$. Тогда, для любого $i\in\{1,\ldots,n_\varepsilon\}$ и для любого $z\in Uy_i$ получаем (так как $C_{\alpha_{y_i}}\subset C_{\alpha_\varepsilon}$):

$$\rho(z,C_{\alpha_\varepsilon})\leqq\rho(z,C_{\alpha_{y_i}})<\rho(y_i,\ C)+\varepsilon/2\leqq\bar\rho(F,C)+\varepsilon/2. \tag{3}$$

Так как для любого $z\in F$, существует $i_z\in\{1,\ldots,n_\varepsilon\}$, такое, что $z\in U_{y_{i_z}}$, то из (3) получаем, что $\rho(z,C_{\alpha_\varepsilon})<\bar\rho(F,C)+\varepsilon/2$, для любого $z\in F$. Но тогда $\bar\rho(F,C_{\alpha_\varepsilon})\leqq\varepsilon/2+\bar\rho(F,C)<\bar\rho(F,C)+\varepsilon$, чем 2) доказано.

Итак, $\bar\rho(F,C)=\inf\{\bar\rho(F,C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}$, для любого замкнутого подмножества F пространства Y. Но так как, используя (К1), легко устанавливается, что $\bar\rho(A,K)=\bar\rho(cl_Y A,K)$, для любого $A\subset Y$ и любого $K\in K(Y)$, то тем самым доказано, что ρ удовлетворяет условию (К4).

Если $A\subset Y$ и $C\in K(Y)$ — вполне отделимы в Y, то и множества $F=cl_Y A$ и C — вполне отделимы в Y. Так как, согласно (К1), функция ρ_C — непрерывна, и так как F — бикомпактное подмножество пространства Y, а, ввиду (К2], $\rho_C(y)>0$, для любого $y\in F$, то получаем, что $\rho(F,C)>0$. Но, очевидно, $\rho(F,C)\leqq\rho(A,C)$ (на самом деле, $\rho(F,C)=\rho(A,C)$) и, следовательно, $\rho(A,C)>0$, т. е. ρ удовлетворяет условию (βК5).

Итак, ρ является $\beta s\varkappa$-метрикой на пространстве Y.

2.11. Теорема. *Пусть (X,δ) — близостное пространство. Пространство $c_\delta X$ — $\varkappa$-метризуемо тогда и только тогда, когда близость δ — $cs\varkappa$-метризуема.*

Доказательство. Пусть близость δ — $cs\varkappa$-метризуема, т. е. существует $cs\varkappa$-метрика ρ на пространстве (X,τ_δ), удовлетворяющая условию (КР). Тогда, по теореме 2.6, на пространстве $c_\delta X$ можно определить $w\varkappa$-метрику ρ', такую, что $\rho=\rho'|X$. Покажем, что ρ' будет также и $\varkappa$-метрикой на пространстве $Y=c_\delta X$. Для этого нужно проверить, что ρ' удовлетворяет условию (К4), т. е., что $\rho'(y,cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))=\inf\{\rho'(y,cl_Y C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}$, для любого $y\in Y$ и любой неубывающей трансфинитной последовательности $\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}$ элементов $K(X)$. Так как $X\cap cl_Y(\cap\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})=cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}$, то из леммы 1.12 получаем, что $cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})=cl_Y(cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))$. Следовательно, так как ρ' является продолжением ρ, $\rho'(x,cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:$

$\alpha<\alpha_0\}))=\rho(x, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))$, для любого $x\in X$. Пусть теперь $y\in Y$. Так как $cl_Y X=Y$, то существует направленность $\{x_\sigma\in X:\sigma\in\Sigma\}$, где Σ — направленное множество, сходящаяся к y. Так как $\rho_{cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})}$ — непрерывная функция, то получаем, что $\rho'(y, cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0))=\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho(x_\sigma, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))$, а так как ρ — $\varkappa$-метрика в X, то $\rho(x_\sigma, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))=\inf\{\rho(x_\sigma, C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}=\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$. Итак, $\rho'(y, cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))=\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$. С другой стороны, так как ρ' — $w\varkappa$-метрика, имеем, что $\inf\{\rho'(y, cl_Y C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}=\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\rho'(y, cl_Y C_\alpha)=\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$. Следовательно, нам нужно доказать равенство $\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\rho(x_\sigma, C_\alpha)=\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$.

Пусть $\sigma\in\Sigma$. Тогда $\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\rho(x_\sigma, C_\alpha)=\inf\{\rho(x_\sigma, C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}=\rho(x_\sigma, cl_X(\cup\{C_\alpha\ \alpha<\alpha_0\}))$, т. е. $\lim\limits_{\alpha<\alpha_0}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$ существует, для любого $\sigma\in\Sigma$. Пусть теперь $\alpha<\alpha_0$ Тогда $\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho(x_\sigma, C_\alpha)=\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho'(x_\sigma, cl_Y C_\alpha)=\rho'(y, cl_Y C_\alpha)$, т. е. $\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$ существует, для любого $\alpha<\alpha_0$. Тогда, из аналога (для направленностей) известной теоремы о повторных пределах (см., напр. [4], п. 168), получаем, что нам достаточно показать, что существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{\sigma\in\Sigma\\ \alpha<\alpha_0}}\rho(x_\sigma, C_\alpha)$, т. е. что для любого $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$ существует $\sigma_0\in\Sigma$ и существует $\beta_0<\alpha_0$, такие, что для любых $\sigma_1, \sigma_2\geqq\sigma_0$ и для любых $\alpha_1, \alpha_2\geqq\beta_0$, выполнялось $|\rho(x_{\sigma_1}, C_{\alpha_1})-\rho(x_{\sigma_2}, C_{\alpha_2})|<\varepsilon$. Итак, пусть $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$. Так как $\lim\limits_{\sigma\in\Sigma}\rho(x_\sigma, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))$ существует (и равен $\rho'(y, cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})))$, то существует $\sigma_0\in\Sigma$, такое, что $|\rho(x_{\sigma_1}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))-\rho(x_{\sigma_2}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))|<\varepsilon/10$, для любых $\sigma_1, \sigma_2\geqq\sigma_0$. Пусть $E=\{x_\sigma:\sigma\in\Sigma, \sigma\geqq\sigma_0\}$. Так как ρ удовлетворяет условию SK4), то имеет место равенство

$$\sup\{\rho(x, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})):x\in E\}=\inf_{\alpha<\alpha_0}\sup_{x\in E}\{\rho(x, C_\alpha)\}=S.$$

Следовательно, существует $\sigma'\geqq\sigma_0$, такое, что $S-\varepsilon/10<\rho(x_{\sigma'}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))$. Кроме того, существует $\beta_0<\alpha_0$, такое, что $\sup\{\rho(x, C_{\beta_0}):x\in E\}<S+\varepsilon/10$. Тогда $\rho(x_\sigma, C_\alpha)<S+\varepsilon/10$ для любого $\alpha\geqq\beta_0$, $(\alpha<\alpha_0)$ и для любого $\sigma>\sigma_0$, $(\sigma\in\Sigma)$ (так как трансфинитная последовательность $\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}$ не убывает и ρ удовлетворяет условию (K3)). Пусть $\sigma\geqq\sigma_0$. Тогда

$$-\varepsilon/10<\rho(x_{\sigma'}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))-\rho(x_\sigma, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))<\varepsilon/10$$

и, следовательно, $-\rho(x_\sigma, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))<\varepsilon/10-\rho(x_{\sigma'}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))<\varepsilon/10+\varepsilon/10-S=\varepsilon/5-S$. Теперь, для любых $\sigma_1, \sigma_2\geqq\sigma_0$ и для любых $\alpha_1, \alpha_2\geqq\beta_0$ имеем $|\rho(x_{\sigma_1}, C_{\alpha_1})-\rho(x_{\sigma_2}, C_{\alpha_2})|\leqq\rho(x_{\sigma_1}, C_{\alpha_1})-\rho(x_{\sigma_1}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))+|\rho(x_{\sigma_1}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))-\rho(x_{\sigma_2}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))|+\rho(x_{\sigma_2}, C_{\alpha_2})-\rho(x_{\sigma_2}, cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))<(S+\varepsilon/10)+(\varepsilon/5-S)+\varepsilon/10+(\varepsilon/5-S)+(S+\varepsilon/10)=7\varepsilon/10<\varepsilon$. Следовательно, ρ' является $\varkappa$-метрикой на пространстве $c_\delta X$.

Пусть пространство $Y=c_\delta X$ — $\varkappa$-метризуемо и ρ' — $\varkappa$-метрика на нем. Тогда из леммы 2.10 следует, что ρ' является $\beta s\varkappa$-метрикой на Y. В частности, ρ' является $s\varkappa$-метрикой. Пусть $\rho=\rho'|_X$. Из доказательства теоремы 2.6 следует, что ρ является $cw\varkappa$-метрикой и удовлетворяет условию (KP). Покажем, что ρ является $cs\varkappa$-метрикой на пространстве X. Для этого осталось только показать, что ρ удовлетворяет условию (SK4). Пусть $A\subset X$ и $\{C_\alpha\in K(X)$:

$\alpha<\alpha_0\}$ — неубывающая трансфинитная последовательность. Пусть $C=cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})$. Тогда $\bar\rho(A,C)=\sup\{\rho(x,C):x\in A\}=\sup\{\rho'(x,cl_Y C):x\in A\}=\bar\rho'(A,cl_Y C)=\bar\rho'(cl_Y A,cl_Y C)=\bar\rho'(cl_Y A,cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))=\inf\{\bar\rho'(cl_Y A,cl_Y C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}=\inf\{\bar\rho'(A,cl_Y C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}=\inf\{\bar\rho'(A,C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}$.

Итак, ρ является $cs\varkappa$-метрикой на пространстве X, удовлетворяющей условию (КР). Следовательно, близость δ — $cs\varkappa$-метризуема.

2.12. Замечание. Теорему 2.11 можно было бы доказать (в сторону достаточности) гораздо проще, если бы мы доказывали теорему 2.6 способом, указанным в 2.7. Действительно, имея в виду теорему 2.6, нужно только показать, что $w\varkappa$-метрика ρ' на пространстве $Y=c_\delta X$ удовлетворяет условию (К4). Пусть $\xi\in c_\delta X$ и $\{C_\alpha\in K(X):\alpha<\alpha_0\}$ — неубывающая трансфинитная последовательность. Тогда

$\rho'(\xi,cl_Y(\cup\{cl_Y C_\alpha:\alpha<\alpha_0\}))=\inf\{\bar\rho(E,cl_X(\cup\{C_\alpha:\alpha<\alpha_0\})):E\in\xi\}=\inf\limits_{E\in\xi}\{\inf\limits_{\alpha<\alpha_0}\{\bar\rho(E,C_\alpha)\}\}$, а $\inf\{\rho'(\xi,cl_Y C_\alpha):\alpha<\alpha_0\}=\inf\limits_{\alpha<\alpha_0}\{\inf\limits_{E\in\xi}\{\bar\rho(E,C_\alpha)\}\}$. Но так как $\inf\limits_{E\in\xi}\{\inf\limits_{\alpha<\alpha_0}\{\bar\rho(E,C_\alpha)\}\}=\inf\limits_{\alpha<\alpha_0}\{\inf\limits_{E\in\xi}\{\bar\rho(E,C_\alpha)\}\}$, то все доказано.

2.13. Из теоремы 2.11 и теоремы Смирнова о бикомпактных расширениях [3] сразу получаем такую теорему:

Теорема. *Упорядоченное множество* $(\varkappa\mathscr{C}(X),\leqq)$ *всех (с точностью до эквивалентности) $\varkappa$-метризуемых бикомпактных расширений пространства X — изоморфно упорядоченному множеству* $(\varkappa P(X),\leqq)$.

2.14. Определение. *$o\varkappa$ метрику* $\rho:X\times K(X)\to\mathbb{R}^+$ будем называть симметричной (или, коротко, *sym*-$o\varkappa$-метрикой), если для любых $A,B\in K(X)$ выполнено условие (*Sym*) $\rho(A,B)=0$ тогда и только тогда, когда $\rho(B,A)=0$.

2.15. Замечание. Любая $cw\varkappa$-метрика на пространстве X — симметрична.

Доказательство. Пусть $A,B\in K(X)$ и $\rho(A,B)=\varepsilon>0$. Покажем, что $\rho(B,A)>0$. Действительно, из (СК5) получаем, что $\rho(L_{\varepsilon/4}(B),U_{\varepsilon/2}(B))>0$. Так как $B\subset L_{\varepsilon/4}(B)$, то и $\rho(B,U_{\varepsilon/2}(B))>0$, а так как $A\subset U_{\varepsilon/2}(B)$, то из (К3) следует, что $\rho(B,A)\geqq\rho(B,U_{\varepsilon/2}(B))>0$.

2.16. Замечание. Если пространство X — псевдокомпактно, то всякая $o\varkappa$-метрика на нем является симметричной $\beta o\varkappa$-метрикой. Доказательство. Пусть $A,B\in K(X)$ и $\rho(A,B)=0$. Так как подпространство A — псевдокомпактно (см. [23]), то непрерывная функция $\rho_{B/A}:A\to\mathbb{R}^+$ принимает свое наименьшее значение, т. е. существует $a\in A$, такая, что $\rho_B(a)=0$. Но тогда, из (К2) следует, что $a\in B$, т. е. $A\cap B\neq\emptyset$. Следовательно, $\rho(B,A)=0$. Итак, ρ является симметричной $o\varkappa$-метрикой.

Пусть $C\in K(X)$, $A\subset X$ и A и C — вполне отделимы в X. Тогда существует $B\in K(X)$, такое, что $A\subset B\subset X\setminus C$. Теперь, рассуждая как и выше, получим, что если $\rho(B,C)=0$, то $B\cap C\neq\emptyset$, что не верно. Следовательно, $\rho(B,C)>0$, а тогда и $\rho(A,C)>0$.

2.17. Замечание. Любая $\beta o\varkappa$-метрика на пространстве X является симметричной $co\varkappa$-метрикой.

Доказательство. Пусть $A,B\in K(X)$. Если A и B — вполне отделимы в X, то, согласно (βK5), $\rho(A,B)>0$. Обратно, если $\rho(A,B)>0$, то, так как функция ρ_B — непрерывна, из (К2) получим, что A и B — вполне отделимы. Следовательно, $\rho(A,B)>0$ тогда и только тогда, когда A и B — вполне отделимы в X. Отсюда получаем, что $\rho(A,B)>0$ тогда и только тогда, когда $\rho(B, A)>0$, т. е. ρ — симметрична. Так как, ввиду (К1), множества $L_a(C)$ и $U_{a+\varepsilon}(C)$ — вполне отделимы, для любых $C\in K(X)$, $a\in \mathsf{R}^+$ и $\varepsilon\in \mathsf{R}^+\setminus\{0\}$, то из ($\beta$К5) вытекает (СК5). Следовательно, ρ является симметричной *сок*-метрикой на пространстве X.

2.18. Лемма. *Пусть ρ — симметричная сок-метрика на пространстве X. Тогда существует близость δ на пространстве X, такая, что пара* (ρ, δ) *удовлетворяет условию* (КР).

Доказательство. Пусть A и B — произвольные подмножества пространства X. Будем говорить, что множества A и B — далекие (и будем писать в этом случае $A\overline{\delta}B$), если существуют $C\in K(X)$, $a\in\mathsf{R}^+$ и $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо $A\subset L_a(C)$, $B\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, либо $A\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, $B\subset L_a(C)$. Если не верно, что $A\overline{\delta}B$, то будем писать: $A\delta B$. В этом случае будем говорить, что множества A и B — близкие. Покажем, что так определенное отношение δ на множестве всех подмножеств множества X и будет искомая близость на топологическом пространстве X, согласующаяся с *сок*-метрикой ρ.

Покажем сначала, что δ является близостью на множестве X.

Очевидно, аксиома симметрии „$A\overline{\delta}B$ тогда и только тогда, когда $B\overline{\delta}A$“ — выполнена. Проверим, что выполнена также аксиома „$(A\cup B)\overline{\delta}D$ тогда и только тогда, когда $A\overline{\delta}D$ и $B\overline{\delta}D$“. Действительно, согласно определению отношения δ, $(A\cup B)\overline{\delta}D$ тогда и только тогда, когда существуют $C\in K(X)$, $a\in\mathsf{R}^+$ и $\varepsilon\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо $A\cup B\subset L_a(C)$, $D\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, либо $A\cup B\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, $D\subset L_a(C)$. С другой стороны, имеем, что $A\overline{\delta}D$ тогда и только тогда, когда существуют $C_1\in K(X)$, $a_1\in\mathsf{R}^+$, $\varepsilon_1\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо

(*) $A\subset L_{a_1}(C_1)$, $D\subset U_{a_1+\varepsilon_1}(C_1)$, либо

(**) $A\subset U_{a_1+\varepsilon_1}(C_1)$, $D\subset L_{a_1}(C_1)$,

а $B\overline{\delta}D$ тогда и только тогда, когда существуют $C_2\in K(X)$, $a_2\in\mathsf{R}^+$, $\varepsilon_2\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо

(i) $B\subset L_{a_2}(C_2)$, $D\subset U_{a_2+\varepsilon_2}(C_2)$, либо

(ii) $D\subset L_{a_2}(C_2)$, $B\subset U_{a_2+\varepsilon_2}(C_2)$.

Очевидно, теперь, что если $(A\cup B)\overline{\delta}D$, то $A\overline{\delta}D$ и $B\overline{\delta}D$. Обратно, пусть $A\overline{\delta}D$ и $B\overline{\delta}D$. Покажем, что $(A\cup B)\overline{\delta}D$. Рассмотрим тот случай, когда выполнены (*) и (i). (Остальные случаи рассматриваются аналогично). Получаем, что $A\subset L_{a_1}(C_1)=C_1'$, $D\subset U_{a_1+\varepsilon_1}(C_1)\subset U_{a_1+3/4\varepsilon_1}(C_1)=\overline{V}_1$, $B\subset L_{a_2}(C_2)=C_2'$, $D\subset U_{a_2+\varepsilon_2}(C_2)\subset U_{a_2+3/4\varepsilon_2}(C_2)=\overline{V}_2$, где V_1 и V_2 — открытые в X множества. Пусть $C'=C_1'\cup C_2'$. Тогда $A\cup B\subset C'$, т. е. $A\cup B\subset L_\mu(C')$, для любого $\mu\in\mathsf{R}^+\setminus\{0\}$. Пусть $D'=\overline{V_1\cup V_2}$. Так как $D\subset V_1\cap V_2$, то $D\subset D'\subset\overline{V}_1\cap\overline{V}_2$ и $D'\in K(X)$. Из (СК5) следует, что $\rho(\overline{V}_1, C_1')>0$ и $\delta(\overline{V}_2, C_2')>0$. Тогда $\rho(D', C_1')>0$ и $\rho(D', C_2')>0$. Теперь из (Sym) получаем, что $\rho(C_1', D')>0$ и $\rho(C_2', D')>0$. Следовательно, $\rho(C', D')>0$, а тогда и $\rho(D', C')>0$. Пусть $\varepsilon=\rho(D', C')$. Тогда $D\subset D'\subset U_{\varepsilon/2}(C')$ и $A\cup B\subset L_{\varepsilon/4}(C')$. Следовательно, $(A\cup B)\overline{\delta}D$.

Аксиома „$\{x\}\overline{\delta}\{y\}$ тогда и только тогда, когда $x\neq y$“, выполнена, так как пространство X — регулярно (и T_1), и ρ удовлетворяет аксиому (К2). Далее, так как мы можем считать, что ρ удовлетворяет аксиому (НК), то получаем, что $\varnothing\overline{\delta}X$. Очевидно также, что $A\overline{\delta}B$ влечет $A\cap B=\varnothing$. Покажем, наконец, что выполнена аксиома „$A\overline{\delta}B$ влечет, что существует $E\subset X$, такое, что $A\overline{\delta}E$ и $(X\setminus E)\overline{\delta}B$“.

Пусть $A\overline{\delta}B$, т. е. существуют $C\in K(X)$, $a\in \mathrm{R}^+$, $\varepsilon\in \mathrm{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо $A\subset L_a(C)$, $B\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, либо $A\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, $B\subset L_a(C)$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $A\subset L_a(C)$, $B\subset U_{a+\varepsilon}(C)$. Пусть $D=U_{a+\varepsilon}(C)$, $\gamma=\rho(L_a(C), D)$. Тогда, ввиду (СК5), $\gamma>0$. Пусть $E=L_{\gamma/2}(D)$. Так как $A\subset L_a(C)$, то $\rho(A, D)\geqq\rho(L_a(C), D)=\gamma$, и, следовательно, $A\subset U_{2\gamma/3}(D)$. Получаем, что $A\overline{\delta}E$. Далее, так как $B\subset D$, то $B\subset L_{\gamma/4}(D)$. Очевидно, $X\setminus E\subset U_{\gamma/3}(D)$. Следовательно, $B\overline{\delta}(X\setminus E)$.

Итак, δ является близостью на множестве X. Покажем теперь, что топология τ_δ совпадает с топологией τ пространства X, т. е, что $cl_{(X,\tau_\delta)}A=cl_{(X,\tau)}A$, для любого $A\subset X$. Имеем, что $cl_{(X,\tau_\delta)}A=\{x\in X:\{x\}\,\delta\, A\}$, т. е. $U=X\setminus cl_{(X,\tau\delta)}A=\{x\in X:\{x\}\overline{\delta}A\}$. Пусть $V=X\setminus cl_{(X,\tau)}A$. Если $x\in U$, то $\{x\}\,\overline{\delta}\,A$, и, следовательно, существуют $C\in K(X)$, $a\in\mathrm{R}^+$, $\varepsilon\in \mathrm{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо $x\in L_a(C)$, $A\subset U_{a+\varepsilon}(C)$, либо $x\in U_{a+\varepsilon}(C)$, $A\subset L_a(C)$. Пусть, например, $x\in L_a(C)$, $A\subset U_{a+\varepsilon}(C)$. Тогда, ввиду (К1), $x\in \mathrm{Int}_{(X,\tau)}\,L_{a+\varepsilon/2}(C)=W$. Очевидно, $W\cap A=\varnothing$ и, следовательно, $x\notin cl_{(X,\tau)}A$, т. е. $x\in V$. Итак, $U\subset V$. Обратно, пусть $x\in V$, т. е. $x\notin cl_{(X,\tau)}A$. Так как X — вполне регулярно, то существует непрерывная функция $f:X\to[0, 1]$, такая, что $f(x)=0$ и $f(A)=1$. Пусть $C_1=f^{-1}([1/2, 1])$ и $C=\overline{\mathrm{Int}_{(X,\tau)}\,C_1}^{(X,\tau)}$. Тогда $C\in K(X)$, $A\subset C$ и $x\notin C$. Из (К2) получаем, что $A\subset L_{\varepsilon/4}(C)$, а $x\in U_{\varepsilon/2}(C)$, где $\varepsilon=\rho(x, C)>0$. Следовательно, $\{x\}\,\overline{\delta}\,A$, а тогда $x\notin cl_{(X,\tau_\delta)}A$, т. е. $x\in U$. Следовательно, $U=V$, т. е. $cl_{(X,\tau_\delta)}A=cl_{(X,\tau)}A$. Итак, δ является близостью на пространстве X.

Покажем, наконец, что пара (ρ, δ) удовлетворяет условию (КР), т. е. что для любого $C\in K(X)$ и любого $A\subset X$, выполнено: $A\overline{\delta}C$ тогда и только тогда, когда $\rho(A, C)>0$.

Пусть $A\overline{\delta}C$. Тогда существуют $C_1\in K(X)$, $a\in\mathrm{R}^+$, $\varepsilon\in\mathrm{R}^+\setminus\{0\}$, такие, что либо $A\subset L_a(C_1)$, $C\subset U_{a+\varepsilon}(C_1)$, либо $A\subset U_{a+\varepsilon}(C_1)$, $C\subset L_a(C_1)$. Пусть, например, $A\subset L_a(C_1)$, $C\subset U_{a+\varepsilon}(C_1)$. Обозначим: $U_{a+\varepsilon}(C_1)=C_2$ и $L_a(C_1)=C_3$. Из (СК5) получаем, что $\rho(C_2, C_3)>0$. Так как $C\subset C_2$, то и $\rho(C, C_3)>0$. Из (Sym) теперь следует, что $\rho(C_3, C)>0$, откуда получаем, что $\rho(A, C)>0$.

Обратно, пусть $\rho(A, C)=\varepsilon>0$. Тогда, очевидно, $C\subset L_{\varepsilon/4}(C)$, а $A\subset U_{\varepsilon/2}(C)$. Следовательно, $A\,\overline{\delta}\,C$. Итак, пара (ρ, δ) удовлетворяет условию (КР).

Лемма доказана.

2.19. Теорема. *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны*:

(i) *Пространство X обладает совершенно $\varkappa$-нормальным бикомпактным расширением*;

(ii) *Пространство X — sym-со$\varkappa$-метризуемо (т. е. на нем можно определить симметричную со$\varkappa$-метрику).*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть cX — совершенно $\varkappa$-нормальное бикомпактное расширение пространства X, т. е. существует нормированная о$\varkappa$-метрика $\rho':cX\times K(cX)\to[0, 1]$ на пространстве X. Пусть $\rho=\rho'|_X$ — ограничение о$\varkappa$-метрики ρ' на X. Тогда ρ является о$\varkappa$-метрикой на пространстве X. В доказательстве теоремы 2.6 мы показали, что она удовлетворяет условию (СК5). Докажем теперь, что о$\varkappa$-метрика ρ симметрична. Действительно, пусть $A, B\in K(X)$ и $\rho(A, B)>0$. Покажем, что $\rho(B, A)>0$. Но $\rho(A, B)=\rho'(cl_{cX}A, cl_{cX}B)$ и $\rho(B, A)=\rho'(cl_{cX}B, cl_{cX}A)$. Так как $cl_{cX}A$ — бикомпакт, то непрерывная функция $\rho_{cl_{cX}B}|_{cl_{cX}A}$ принимает свое наименьшее значение на

множестве $cl_{cX} A$. Следовательно, $cl_{cX} A \cap cl_{cX} B = \emptyset$, а тогда и $\rho'(cl_{cX} B, cl_{cX} A) > 0$, т. е. $\rho(B, A) > 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть ρ — *sym-coϰ*-метрика на пространстве X. Тогда, из леммы 2.18 получаем, что на пространстве X можно определить близость δ так, чтобы пара (ρ, δ) удовлетворяла условию (КР). Теперь, из теоремы 2.6 следует, что бикомпактное расширение $c_\delta X$ — совершенно $\varkappa$-нормально.

Теорема доказана.

2.20. Теорема. *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны:*
(i) *Пространство X обладает $w\varkappa$-метризуемым бикомпактным расширением:*
(ii) *Пространство X — $cw\varkappa$-метризуемо.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Доказательство этой импликации дано в доказательстве теоремы 2.6.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Ввиду замечания 2.15, мы можем рассуждать как в доказательстве импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) теоремы 2.19. То, что полученное бикомпактное расширение $c_\delta X$ не только совершенно $\varkappa$-нормально, но и $w\varkappa$-метризуемо, устанавливаем как в доказательстве леммы 2.4.

2.21. Теорема. *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны:*
(i) *Пространство X обладает $\varkappa$-метризуемым бикомпактным расширением.*
(ii) *Пространство X — $cs\varkappa$-метризуемо.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Доказательство этой импликации дано в доказательстве теоремы 2.11.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть ρ — $cs\varkappa$-метрика на пространстве X. Тогда ρ является $cw\varkappa$-метрикой, и из теоремы 2.20 получаем, что пространство X обладает $w\varkappa$-метризуемым бикомпактным расширением $c_\delta X$. Но так как ρ — $cs\varkappa$-метрика и пара (ρ, δ) удовлетворяют условию (КР) (что вытекает из доказательства теоремы 2.20), то из теоремы 2.11 получаем, что пространство $c_\delta X$ — $\varkappa$-метризуемо.

2.22. Замечание. В [6] Е. Щепин доказал такую теорему:

Теорема. (Е. Щепин). *Бикомпактное расширение метрического пространства, соответствующее метрической близости, совершенно $\varkappa$-нормально.*

Так как любая метрика является *sym-coϰ*-метрикой и так как близость δ, определенная в доказательстве леммы 2.18, в случае когда ρ является метрикой, очевидным образом совпадает с метрической близостью, то эта теорема является следствием теоремы 2.19. Теорема 2.20 усиливает заключение этой теоремы Е. Щепина, показывая что это бикомпактное расширение даже $w\varkappa$-метризуемо (но это сразу получается и из самой теоремы Е. Щепина, рассуждая как в конце доказательства леммы (2.4.).

2.23. Обозначение. В дальнейшем, через $\mathscr{E}$ будем обозначать класс всех $cs\varkappa$-метризуемых пространств.

2.24. Следующие теоремы (теоремы 2.24—2.36) являются непосредственными следствиями теоремы 2.21 и ряда теорем Е. Щепина из [7] и [8].

Теорема. *Если $X \in \mathscr{E}$ и A — либо всюду плотно в пространстве X, либо $\varkappa$-замкнуто в нем, то* и $A \in \mathscr{E}$.

Доказательство. Следует из теоремы 2.21, леммы 1.12а) и предложения 2 работы [2] Е. Щепина.

2.25. Теорема. *Если $X_\alpha \in \mathscr{E}$, для любого $\alpha \in A$, то и* $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\} \in \mathscr{E}$.

Доказательство. Следует из теоремы 2.21 и из теоремы 2 работы [8] Е. Щепина.

2.26. Теорема. *Если* $X \in \mathscr{E}$, *то и* $\exp(X) \in \mathscr{E}$, *где* $\exp(X)$ — *пространство всех непустых бикомпактных подмножеств пространства* X *с топологией Вьеториса.*

Доказательство. Очевидно, что если cX — бикомпактное расширение пространства X, то $\exp(X)$ — всюду плотно в пространстве $\exp(cX)$. Теперь все следует из теоремы 2.21, теоремы 3 работы [8] Е. Щепина и теоремы Вьеториса [22] о том, что если пространство Y — бикомпактно, то и пространство $\exp(Y)$ — бикомпактно.

2.27. Теорема. *Если* $X \in \mathscr{E}$ *и* τ — *несчетное регулярное кардинальное число, то множество* $X(\tau) = \{x \in X : \chi(x, X) < \tau\}$ *является замкнутым подмножеством пространства* X *и* $w(X(\tau)) < \tau$.

Доказательство. Так как $X \in \mathscr{E}$, то из теоремы 2.21 следует, что X обладает $\varkappa$-метризуемым бикомпактным расширением $Y = cX$. Пусть $Y(\tau) = \{y \in Y : \chi(y, Y) < \tau\}$. Из теоремы 9 работы [3] Е. Щепина имеем, что множество $Y(\tau)$ — замкнуто в бикомпакте Y, и $w(Y(\tau)) < \tau$. Так как $\chi(x, X) = \chi(x, Y)$, для любой точки $x \in X$, то $Y(\tau) \cap X = X(\tau)$ и теперь все ясно.

2.28. Обозначение. Через $\mathscr{D}\mathscr{E}$ будем обозначать класс всех пространств, имеющих $\varkappa$-адитическое бикомпактное расширение. (Напомним, что непрерывные образы $\varkappa$-метризуемых бикомпактов называются $\varkappa$-адическими бикомпактами (Е. Щепин, [8])). Очевидно, класс $\mathscr{E}$ содержится в класе $\mathscr{D}\mathscr{E}$.

2.29. Предложение. *Если* $X \in \mathscr{D}\mathscr{E}$, τ — *несчетное регулярное кардинальное число, и* $X_\pi(\tau) = \{x \in X : \pi\chi(x, X) < \tau\}$, *то* $w(cl_X X_\pi(\tau)) < \tau$.

Доказательство. Так как $X \in \mathscr{D}\mathscr{E}$, то X обладает $\varkappa$-адическим бикомпактным расширением $cX = Y$. Пусть $Y_\pi(\tau) = \{y \in Y : \pi\chi(y, Y) < \tau\}$. Тогда из теоремы 11 работы [8] Е. Щепина получаем, что $w(cl_Y Y_\pi(\tau)) < \tau$. Но нетрудно увидеть, что $\pi\chi(x, X) = \pi\chi(x, Y)$, для любой точки $x \in X$. Следовательно, $X \cap X_\pi(\tau) = X_\pi(\tau)$ и все ясно.

2.30. Предложение. *Если* $X \in \mathscr{D}\mathscr{E}$, *то* $\pi\chi(X) = \chi(X) = \pi w(X) = w(X)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству следствия 4 работы [8] Е. Щепина, но так как оно очень коротко, то мы приведем его и здесь.

Ввиду неравенств $\pi\chi(X) \leq \chi(X) \leq w(X)$ и $\pi\chi(X) \leq \pi w(X) \leq w(X)$, достаточно показать, что $\pi\chi(X) \geq w(X)$. Допустим, что $\pi\chi(X) < w(X)$. Положим: $\tau = (\pi\chi(X))^+$. Тогда τ — несчетное регулярное кардинальное число, $X_\pi(\tau) = X$ и $\tau \leq w(X)$. Но из предложения 2.29 получаем, что $w(X) < \tau$. Это противоречие показывает, что $\pi\chi(X) = w(X)$, и тем самым теорема доказана.

2.31. Теорема. *Если* $X \in \mathscr{E}$, *то* $\pi\chi(x, X) = \chi(x, X)$, *для любой точки* x *пространства* X.

Доказательство. Так как $X \in \mathscr{E}$, то X обладает, согласно теореме 2.21. $\varkappa$-метризуемое бикомпактное расширение $cX = Y$. Пусть $x \in X$. Из равенств $\chi(x, X) = \chi(x, Y)$ и $\pi\chi(x, X) = \pi\chi(x, Y)$ и теоремы 8 работы [8] Е. Щепина получаем, что $\pi\chi(x, X) = \chi(x, X)$.

2.32. Теорема. *Пусть* τ — *кардинальное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Пространство* X *обладает* $\varkappa$-*метризуемым бикомпактным расширением* cX, *таким, что* $w(cX) \leq \tau$,

(ii) $X \in \mathscr{E}$ *и* $w(X) \leq \tau$,

(iii) *$X \in \mathscr{E}$ и X содержит всюду плотное подпространство Y, такое, что $\pi\chi(Y) \leqq \tau$.*

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) ясна, ввиду теоремы 2.21, а импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна. То, что (iii) влечет (i), следует из теорем 2.21 и 2.29.

2.33. Предложение. *Если $X \in \mathscr{E} | X \in \mathscr{D}\mathscr{E} |$ и $w(X) = \aleph_1$, то X обладает бикомпактным расширением cX, которое является пространством Дугунджи (диадическим бикомпактом).*

Доказательство. Следует из теоремы 2.32 и теорем 5,10, 11 работы (8) Е. Щепина.

2.34. Предложение. *Если $X \in \mathscr{D}\mathscr{E}$, то X удовлетворяет условию Суслина.*

Доказательство. Пусть $f: cY \xrightarrow{\text{на}} cX$ — непрерывно, где cX — $\varkappa$-адическое бикомпактное расширение пространства X, а cY — бикомпактное $\varkappa$-метризуемое пространство. Тогда из теоремы 6 работы [8] Е. Щепина следует, что число Шанина $\check{s}(cY)$ пространства cY равно $\aleph_0$. Так как $c(Z) \leqq \check{s}(Z)$, для любого пространства Z, то $c(cY) = \aleph_0$. Следовательно, и $c(cX) = \aleph_0$, но тогда и $c(X) = \aleph_0$.

2.35. Теорема. *Если τ — несчетное регулярное кардинальное число, $X \in \varepsilon$ и $w(X) = \tau$, то пространство X можно непрерывно отобразить на всюду плотном подпространстве тихоновского куба I^τ, где $I = [0, 1] \subset R^+$.*

Доказательство. Следует из теоремы 2.32 и теоремы 19 работы [7] Е. Щепина.

2.36. Теорема. *Пусть $X \in \mathscr{E}$, τ — несчетное регулярное кардинальное число, и Φ — семейство бикомпактных подмножеств пространства X. Если $\chi(F, X) < \tau$, для любого $F \in \Phi$, то существует подсемейство Φ' семейства Φ, такое, что $|\Phi| < \tau$ и $cl_X(\bigcup \Phi') = cl_X(\bigcup \Phi)$.*

Доказательство. Пусть cX — $\varkappa$-метризуемое бикомпактное расширение пространства X, которое существует согласно теореме 2.21. Так как элементы семейства Φ — бикомпактны, то $\chi(F, X) = \chi(F, cX)$, для любого $F \in \Phi$. Тогда из теоремы 7 работы [8] Е. Щепина получаем, что существует подсемейство Φ' семейства Φ, такое, что $|\Phi'| < \tau$ и $cl_{cX}(\bigcup \Phi') = cl_{cX}(\bigcup \Phi)$. Но тогда $cl_X(\bigcup \Phi') = cl_X(\bigcup \Phi)$.

2.37. Теорема. *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны:*

(i) *Пространство X метризуемо и сепарабельно,*

(ii) *Пространство X — s-метризуемо,*

(iii) *$X \in \mathscr{E} | X \in \mathscr{D}\mathscr{E} |$ и содержит всюду плотное подпространство Y, такое, что $\pi X(Y) \leqq \aleph_0$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Так как пространство X — метризуемо и сепарабельно, то оно имеет метризуемое бикомпактное расширение (cX, ρ'). Но любая метрика является также и $\varkappa$-метрикой, а тогда, из леммы 2.10, следует, что ρ' — s-метрика. Пусть $\rho = \rho'|_X$ — ограничение метрики ρ' на пространстве X. В конце доказательства теоремы 2.11 было показано, что если ρ' — $s\varkappa$-метрика, то и ее ограничение ρ является $s\varkappa$-метрикой. Следовательно, ρ — s-метрика на пространстве X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть X — s-метризуемое пространство. Тогда из замечания 1.7 следует, что $X \in E$. Так как $\pi\chi(X) = \aleph_0$, то все доказано.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $E \in E$. Из импликации „(iii) $\Rightarrow$ (i)" теоремы 2.32 имеем, что пространство X обладает бикомпактным расширением cX с $w(cX) \leqq \aleph_0$. Следовательно, пространство X-метризуемо и сепарабельно. Если $X \in \mathscr{D}\mathscr{E}$, то все следует из 2.29.

2.38. Лемма. *Пусть ρ — sym-coϰ-метрика на пространстве X. Тогда существует единственная близость δ_ρ на пространстве X, такая, чтобы пара (ρ, δ_ρ) удовлетворяла условию* (КР).

Доказательство. Из леммы 2.18 имеем, что на пространстве X существует близость δ_ρ, такая, что пара (ρ, δ_ρ) удовлетворяет условию (КР). Пусть δ —другая такая близость на пространстве X. Покажем, что δ совпадает с δ_ρ.

Покажем сначала, что $\delta_\rho \leqq \delta$, т. е. что для любых $A, B \subset X$, $A\delta B$ влечет $A\,\delta_\rho\,B$, т. е., что из $A\,\bar{\delta}_\rho\,B$ следует $A\bar{\delta}B$. Пусть $A\,\bar{\delta}_\rho\,B$. Близость δ_ρ определялась так: если $A, B \subset X$, то $A\,\bar{\delta}_\rho\,B$ тогда и только тогда, когда существуют $C \in K(X)$, $a \in \mathrm{R}^+$, $\varepsilon \in \mathrm{R}^+ \setminus \{0\}$, такие, что либо $A \subset L_a(C)$, $B \subset U_{a+\varepsilon}(C)$, либо $A \subset U_{a+\varepsilon}(C)$, $B \subset L_a(C)$.

Из (СК5) следует, что тогда $\rho(L_a(C), U_{a+\varepsilon}(C)) > 0$. Теперь из (КР) получаем, что $L_a(C)\,\bar{\delta}\,U_{a+\varepsilon}(C)$. Следовательно, $A\bar{\delta}B$. Итак, $\delta_\rho \leqq \delta$. Покажем теперь, что $\delta \leqq \delta_\delta$, т. е., что из $A\,\bar{\delta}\,B$ следует, что $A\,\bar{\delta}_\rho B$. Пусть $A, B \subset X$ и $A\bar{\delta}B$, Тогда существует близостно непрерывная функция $f: (X, \delta) \to I = [0, 1]$, такая, что $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Пусть $C' = f^{-1}([1/2, 1])$, $C = cl_X(\mathrm{Int}_X C')$. Тогда $C \in K(X)$, $B \subset C$ и $A\,\bar{\delta}\,C$. Из (КР) следует, что $\rho(A, C) > 0$. Пусть $\varepsilon = \rho(A, C)$. Тогда $A \subset U_{\varepsilon/2}(C)$, $B \subset L_{\varepsilon/4}(C)$. Следовательно, $A\,\bar{\delta}_\rho\,B$. Итак, $\delta = \delta_\rho$.

2.39. Замечание. Если ρ — $\beta o\varkappa$-метрика на пространстве X и δ_β — близость, соответствующая бикомпактному расширению βX, то пара (ρ, δ_β) удовлетворяет условию (КР).

Доказательство. Если $A, B \subset X$, то $A\delta_\beta\bar{B}$ тогда и только тогда,когда A и B — вполне отделимы в X. Теперь из (βК5) получаем, что пара (ρ, δ_β) удовлетворяет условию (КР).

2.40. Теорема. *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны*:

(i) *Пространство βX — $\varkappa$-метризуемо ($w\varkappa$-метризуемо, совершенно $\varkappa$-нормально)*;

(ii) *Пространство X — $\beta s\varkappa$-метризуемо ($\beta w\varkappa$-метризуемо, $\beta o\varkappa$-метризуемо)*.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Близость δ_β, соответствующая бикомпактному расширению βX, определяется, как известно, так: $A\,\bar{\delta}_\beta\,B$ тогда и только тогда, когда A и B — вполне отделимые подмножества пространства X. Так как пространство βX — $\varkappa$-метризуемо ($w\varkappa$-метризуемо, совершенно $\varkappa$-нормально), то из теоремы 2.11 (теоремы 2.6) следует, что близость δ_β — $cs\varkappa$-метризуема ($cw\varkappa$-метризуема, $co\varkappa$-метризуема). Следовательно, существует $cs\varkappa$-метрика ($cw\varkappa$-метрика, $co\varkappa$-метрика) ρ на пространстве X, такая, что пара (ρ, δ_β) удовлетворяет условию (КР). Это означает, что если $A \subset X$ и $C \in K(X)$, то $\rho(A, C) > 0$ тогда и только тогда, когда $A\,\bar{\delta}_\beta\,C$, т. е. тогда и только тогда, когда A и C — вполне отделимы. Следовательно, ρ удовлетворяет условию (βК5). (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть пространство X — $\beta o\varkappa$-метризуемо ($\beta w\varkappa$-метризуемо, $\beta s\varkappa$-метризуемо), т. е. существует $\beta o\varkappa$-метрика ($\beta w\varkappa$-метрика, $\beta s\varkappa$-метрика) ρ на нем. Из замечания 2.17 следует, что ρ является симметричной $co\varkappa$-метрикой на пространстве X, а из замечания 2.39 — что пара (ρ, δ_β) удовлетворяет условию (КР). Теперь из леммы 2.38 следует, что если δ_ρ — близость, порожденная *sym-co*$\varkappa$-метрикой ρ (см. лемму 2.18), то $\delta_\rho = \delta_\beta$. Так как близость δ_ρ *co*$\varkappa$-метризуема (*cw*$\varkappa$-метризуема, *cs*$\varkappa$-метризуема), то теперь из теоремы 2.6 (теоремы 2.6 — скобковый вариант, теоремы 2.11) вытекает, что пространство $c_{\delta_\rho} X = \beta X$ — совершенно $\varkappa$-нормально ($w\varkappa$-метризуемо, $\varkappa$-метризуемо).

2.41. Замечание. Отметим, что, как следует из теорем 2.6 и 2.19, близость δ на пространстве X — *co*$\varkappa$-метризуема тогда и только тогда, когда она *sym-co*$\varkappa$-метризуема (т. е, когда существует симметричная *co*$\varkappa$-метрика ρ на пространстве X, такая, что пара (ρ, δ) удовлетворяет условию (КР)).

2.42. Замечание. Та часть теоремы 2.40, которая относится к совершенно $\varkappa$-нормальным пространствам, фактически совпадает со следующей теоремой Т. Терада (теор. 2 из [20]):

Теорема (Т. Терада). *Для любого пространства X следующие условия эквивалентны*:

(i) *Пространство βX — совершенно $\varkappa$-нормально*;

(ii) *Для любого $A \in K(X)$ существует последовательность $\{U_i : i \in \mathbf{N}\}$ канонически открытых подмножеств пространства X, такая, что*:

а) $A \subset U_i$, *для любого* $i \in \mathbf{N}$;

б) *для любого канонически открытого подмножества U пространства X, содержащего A, существует $i \in \mathbf{N}$, такое, что $U_i \subset U$.*

Переход из теоремы 2.40 к теореме Т. Терада можно легко сделать, пользуясь замечанием 1.3 и конструкцией К. Боржеса (см. теор. 5.2 из [12]). Как было отмечено в [20], из этой теоремы можно получить такое следствие (она является также непосредственным следствием теоремы 2.40 и большой леммы Урысона):

2.43. Следствие (Т. Терада). *Для любого нормального пространства X следующие условия эквивалентны*:

(i) *Пространство βX — совершенно $\varkappa$-нормально,*

(ii) $\chi(C, X) \leq \aleph_0$, *для любого* $C \in K(X)$.

2.44. Следующая теорема легко следует из результатов работ [10] и [11] (как будет показано в ее втором доказательстве), но ее можно также легко получить и из наших рассмотрений (что будет сделано в ее первом доказательстве). Она является обобщением одной теоремы В. Вылова из [2].

Теорема. *Пусть X — псевдокомпактное совершенно $\varkappa$-нормальное пространство. Тогда βX является единственным совершенно $\varkappa$-нормальным бикомпактным расширением пространства X.*

Доказательство первое. Пусть ρ — *o*$\varkappa$-метрика на пространстве X. Тогда из замечания 2.16 следует, что ρ является $\beta o\varkappa$-метрикой на пространстве X. Теперь из теоремы 2.40 получаем, что пространство βX — совершенно $\varkappa$-нормально.

Если cX — совершенно χ-нормальное бикомпактное расширение пространства X и δ_c — близость, соответствующая ему, то, по теореме 2.6, близость δ_c — *co*$\varkappa$-метризуема. Следовательно, существует *co*$\varkappa$-метрика ρ_1 на пространстве X, такая, что пара (ρ_1, δ_c) удовлетворяет условию (КР). Так как пространство X — псевдокомпактно, то из замечания 2.16 следует, что ρ_1 является *sym*-$\beta o\varkappa$-метрикой. Если δ_β — близость, соответствующая бикомпактному расширению βX, то из замечания 2.39 следует, что пара (ρ_1, δ_β) удовлетворяет условию (КР). Так как ρ_1 является *sym-co*$\varkappa$-метрикой (см. замечания 2.17), то из леммы 2.38 вытекает, что $\delta_c = \delta_\beta$. Следовательно, расширение cX — эквивалентно расширению βX.

Доказательство второе. Из предложения 5.4 работы [11] следует, что если X — псевдокомпактное Oz-пространство, то пространство βX — совершенно $\varkappa$-нормально. Далее, если cX — бикомпактное Oz-расширение пространства X, то из теоремы 5.1 работы [11] следует, что пространство X — z-вложено в пространстве cX. Теперь из теоремы 3.5 работы [10] следует, что пространство X — v-вложено в cX, т. е., что $vX \subset cX$, где vX — Хьюттовское расширение пространства X. Так как X — псевдокомпактно, то $vX = \beta X$. Следовательно, $cX = \beta X$.

2.45. Замечание. Как было уже отмечено во втором доказательстве теоремы 2.44, если cX — совершенно $\varkappa$-нормальное бикомпактное расширение пространства X, то $X \subset vX \subset cX$, где vX — хьюиттовское расширение пространства X.

2.46. Замечание. Отметим, в связи с теоремой 2.44, что из теоремы 11 работы [8] Е. Щепина можно получить следующее утверждение: если пространство βX — $\varkappa$-адично, то X — псевдокомпактное пространство. Действительно, из цитированной выше теоремы Е. Щепина получаем, что пространство $\beta \mathrm{R}$ не является $\varkappa$-адичным пространством. Если пространство X не псевдокомпактно, то X может быть непрерывно отображено на всюду плотном подмножестве пространства R (см. [16]), а тогда пространство $\beta \mathrm{R}$ будет непрерывным образом пространства βX. Следовательно, мы получаем, что пространство $\beta \mathrm{R}$ — $\varkappa$-адично. Это противоречие показывает, что пространство X — псевдокомпактно.

Очевидно, это утверждение обобщает теорему Р. Енгелькинга и А Пельчинского из [16] о том, что если пространство βX — диадично, то X — псевдокомпактное пространство.

2.47. Замечание. В связи с предложениями 2.29, 2.30, 2.33, 2.34 естественно возникает вопрос о внутренней характеризации пространств класса $\mathscr{D}\mathscr{E}$. Отметим, поэтому, следующие два утверждения:

1. Пусть Y — пространство. Если существует пространство X, такое, что в нем имеется $cs\varkappa$-метризуемая близость δ, а в пространстве Y — некоторая близость δ_1, так чтобы существовало близостно непрерывное отображение $f:(X, \delta) \xrightarrow{\text{на}} (Y, \delta_1)$, то $Y \in \mathscr{D}\mathscr{E}$.

Доказательство. Все получается из теоремы 2.11 и хорошо известных фактов теории близостных пространств.

2. Пусть $X \in \mathscr{E}$, а Y — Oz-пространство. Если существует непрерывное отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$, для которого $f^{-1} C \in K(X)$, для любого $C \in K(Y)$, и существуют $cs\varkappa$-метрика ρ в X и симметричная $so\varkappa$-метрика ρ_1 в Y, такие, что $\rho_{f^{-1}C}(f^{-1}(U_a^{\rho_1}(C))) > 0$, для любых $C \in K(Y)$ и $a \in \mathrm{R}^+ \setminus \{0\}$, то $Y \in \mathscr{D}\mathscr{E}$.

Доказательство. Пусть $\delta(\delta_1)$ — близости в X (в Y), порожденные функциями δ (δ_1), согласно 2.18 и 2.15. Покажем, что отображение $f:(X, \delta) \to (Y, \delta_1)$ — близостно непрерывно, т. е. что из $A \bar{\delta}_1 B$ следует $f^{-1} A \bar{\delta} f^{-1} B$, для любых $A, B \subset Y$. Из доказательства леммы 2.18 имеем, что если $A, B \subset Y$, то $A \bar{\delta}_1 B$ тогда и только тогда, когда существуют $C \in K(Y)$, $a \in \mathrm{R}^+$, $\varepsilon \in \mathrm{R}^+ \{0\}$, такие что либо $A \subset L_a^{\rho_1}(C)$, $B \subset U_{a+\varepsilon}^{\rho_1}(C)$, либо $A \subset U_{a+\varepsilon}^{\rho_1}(C)$, $B \subset L_a^{\rho_1}(C)$. Так как, согласно (СК5), $\rho_1(U_{a+\varepsilon}^{\rho_1}(C), L_a^{\rho_1}(C)) = \lambda > 0$, то если положим $C_1 = L_a^{\rho_1}(C)$, мы получим, что $U_{a+\varepsilon}^{\rho_1}(C) \subset U_{\lambda/2}^{\rho_1}(C_1)$ и значит либо $A \subset C_1$, $B \subset U_{\lambda/2}^{\rho_1}(C_1)$, либо $A \subset U_{\lambda/2}^{\rho_1}(C_1)$, $B \subset C_1$. Итак, теперь ясно, что $A \bar{\delta}_1 B$ тогда и только тогда, когда существуют $C_1 \in K(Y)$ и $\lambda_1 \in \mathrm{R}^+ \setminus \{0\}$, такие, что либо $A \subset C_1$, $B \subset U_{\lambda_1}^{\rho_1}(C_1)$, либо $B \subset C_1$, $A \subset U^{\rho_1}_{\lambda_1}(C)$. Очевидно, аналогичное утверждение верно и для тройки (X, ρ, δ). Теперь, из условия „$\rho_{f-'C}(f^{-1}(U^{\rho_1}_a(C)))>0$, для любых $C \in K(Y)$ и $a \in \mathsf{R}^+ \setminus \{0\}$ „сразу получаем, что отображение $f:(X, \delta) \to (Y, \delta_1)$ — близостно непрерывно. Так как, согласно 2.18, близость δ — $cs\varkappa$-метризуема, то из утверждения, приведенного выше $(n, 1)$, получаем, что $Y \in \mathcal{DE}$.

2.48. Определение. *Пусть X — пространство. Через $S\varkappa(X)$ ($W\varkappa(X)$, $\varkappa(X)$) будем обозначать множество всех sym-со$\varkappa$-метрик (cw$\varkappa$-метрик, cs$\varkappa$-метрик) на пространстве X. Если 2^X — множество всех подмножеств X и $\rho \in S\varkappa(X)$, то через F_ρ будем обозначать следующую функцию:*

$$F_\rho \begin{cases} 2^X \times 2^X \longrightarrow \mathsf{R}^+ \\ (A, B) \longrightarrow \max\{0, \sup\{\rho(A, C) - \bar{\rho}(B, C), \rho(B, C) - \bar{\rho}(A, C) : C \in K(X)\}\}. \end{cases}$$

Если $\rho_1 \rho_2 \in S\varkappa(X)$, то будем писать, что $\rho_1 \sim \rho_2$ в случае, когда равенство $F_{\rho_1}(A, B)=0$ влечет $F_{\rho_2}(A, B)=0$, и, наоборот, из $F_{\rho_2}(A, B)=0$ следует что $F_{\rho_1}(A, B)=0$ $(A, B \in 2^X)$. Будем писать также, что $\rho_1 \leqq \varkappa \rho_2$, если из $F_{\rho_2}(A, B)=0$ вытекает, что $F_{\rho_1}(A, B)=0$ $((A, B) \in 2^X \times 2^X)$.

Очевидно, что так определенные отношения „$\sim$“ и „$\leqq_\varkappa$“ на множестве $S\varkappa(X)$ являются соответственно отношением эквивалентности и отношением частичного порядка. Так как $S\varkappa(X) \supset W\varkappa(X) \supset \varkappa(X)$ (см. замечания 2.15), то отношения „$\sim$“ и „$\leqq_\varkappa$“ определены также и на множествах $W\varkappa(X)$ и $\varkappa(X)$. Обозначим через $ES\varkappa(X)$ ($EW\varkappa(X)$, $E\varkappa(X)$) фактор множество $S\varkappa(X)/\sim(W\varkappa(X)/\sim, \varkappa(X)/\sim)$ и пусть π_S, (π_W, π) — естественные проекции. Определим: $\pi_S(\rho_1) \leqq_1 \pi_S(\rho_2)$ тогда и только тогда, когда $\rho_1 \leqq_x \rho_2 \int /$ (где $\rho_1 \rho_2 \in S\varkappa(X)$). Очевидно, что отношение „$\leqq_1$“ является отношением частичного порядка на множестве $ES\varkappa(X)$, как и его ограничения на множествах $EW\varkappa(X)$ и $E\varkappa(X)$.

2.49. Теорема. *Для любого пространства X имеют место следующие изоморфизмы частично упорядоченных множеств:*

а) $(o\varkappa\mathscr{C}(X), \leqq) \approx (ES\varkappa(X), \leqq_1)$,

б) $(w\varkappa\mathscr{C}(X), \leqq) \approx (EW\varkappa(X), \leqq_1)$,

в) $(\varkappa\mathscr{C}(X), \leqq) \approx (E\varkappa(X), \leqq_1)$.

Доказательство. а) Покажем, что $(ES\varkappa(X), \leqq_1) \approx (o\varkappa P(X), \leqq)$, откуда, ввиду теоремы 2.9, утверждение а) будет доказано.

Пусть $\rho \in S\varkappa(X)$ и δ_ρ — та единственная близость, индуцированная ей, для которой пара (ρ, δ_ρ) удовлетворяет условию (КР) (см. леммы 2.18 и 2.38). Покажем, что если $\rho, \rho' \in S\varkappa(X)$, то $\delta_{\rho'} = \delta_\rho$ тогда и только тогда, когда $\pi_S(\rho) = \pi_S(\rho')$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что если $A, B \subset X$, то $A \delta_\rho B$ тогда и только тогда, когда $F_\rho(A, B)=0$, т. е., что $A \bar{\delta}_\rho B$ тогда и только тогда, когда $F_\rho(A, B)>0$.

Пусть $A \bar{\delta}_\rho B$. Тогда существуют $C \in K(X)$, $a \in \mathsf{R}^+$, $\varepsilon \in \mathsf{R}^+ \setminus \{0\}$, такие, что либо $A \subset L_a(C)$, $B \subset U_{a+\varepsilon}(C)$, либо $A \subset U_{a+\varepsilon}(C) B \subset L_a(C)$. В первом случае будем иметь, что $\rho(B, C) - \bar{\rho}(A, C) \geqq \varepsilon > 0$, а во втором — что $\bar{\rho}(A, C) - \bar{\rho}(B, C) \geqq \alpha > 0$. Следовательно, получаем, что $\sup\{\rho(A, C) - \bar{\rho}(B, C), \rho(B, C) - \bar{\rho}(A, C) : C \in K(X)\} \geqq \varepsilon > 0$, а тогда $F_\rho(A, B)>0$.

Обратно, пусть $F_\rho(A, B)>0$. Тогда $F_\rho(A, B) = \sup\{\rho(A, C) - \bar{\rho}(B, C), \rho(B, C) - \bar{\rho}(A, C) : C \in K(X)\} = 2\varepsilon > 0$. Следовательно, существует $C \in K(X)$, такое, что либо $\rho(A, C) - \bar{\rho}(B, C) \geqq \varepsilon$, либо $\rho(B, C) - \bar{\rho}(A, C) \geqq \varepsilon$. Пусть ρ

$(A, C) - \bar{\rho}(B, C) \geqq \varepsilon$ и пусть $\bar{\rho}(B, C) = a$. Тогда $\rho(A, C) \geqq a + \varepsilon$. Следовательно $A \subset U_{a+\varepsilon/2}(C)$, $B \subset L_{a+\varepsilon/4}(C)$. Получаем, что $A\ \bar{\delta}_\rho\ B$. Аналогично рассуждаем и во втором случае. Теперь все ясно.

б) и в) доказываются также, как и а), только со ссылкой соответственно на теорему 2.9 (скобковый вариант) и теорему 2.13.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.
2. В. М. Вылов. Диссертация. С., 1979.
3. Ю. М. Смирнов. О пространствах близости. *Матем. сб.*, **31**, 1952, 543—576.
4. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1966.
5. А. Ч. Чигогидзе. О $\varkappa$-метризуемых пространствах. *Успехи мат. наук*, **37**, 1982, 241—242.
6. Е. В. Щепин. О топологических произведениях, группах и новом классе пространств, более общих, чем метрические. *Доклады АН СССР*, **226**, 1976, 527—520.
7. Е. В. Щепин. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров. *Успехи мат. наук*, **31**, 1976, 191—226.
8. Е. В. Щепин. О $\varkappa$-метризуемых пространствах. *Изв. АН СССР*, **43**, 1979, 442—478.
9. Е. В. Щепин. Функторы и несчетные степени компактов. *Успехи мат. наук*, **36**, 1981, 3—62.
10. R. L. Blair. On v-embedded sets in topological spaces. — In: ТОПО 72—General, Topology and its Applications. *(Lecture Notes in Math.*, **378***)*, Berlin, 1974, 46—79.
11. R. L. Blair. Spaces in which special sets are z-embedded. *Can. J. Math.*, **28**. **1976**, 673—690.
12. C. J. Borges. On stratifiable spaces. *Pacific J. Math.*, **17**, 1966, 1—16.
13. G. D. Dimov. On $\varkappa$-metrizable Hausdorff compactifications of $\varkappa$-metrizable spaces and a new class of spaces, including all separable metrizable spaces. *Acad. Bulg. Sci.*, **36**, 1983, 1257—1260.
14. G. D. Dimov. On Oz-compactifications. *Ber. Math. Stath. Sekt. Forschz. Graz*, (в печати).
15. R. Engelking. General Topology. Warszawa, 1977.
16. R. Engelking, A. Pelczynski. Remarks on dyadic spaces. *Coll. Math.*, **11**, 1963, 55—63.
17. S. Mrowka. On some approximation theorems. *Nieuw Arch. Wisk.*, **16**, 1963, 94—111.
18. S. A. Naimpally, B. D. Warrack. Proximity spaces. Cambridge, 1970.
19. D. Rudd. A note on zero-sets in the Stone-Čech compactification. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **12**, 1975, 227—230.
20. T. Terada. Note on z-, C^*-, and C-embedding. *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. A*, **13**, 1975, 129—132.
21. T. Terada. On spaces whose Stone-Čech compactification is Oz. *Pacific J. Math.*, **85**, 1979, 231—237.
22. L. Vietoris. Bereiche zweiter Ordnung. *Monatsh. Math. Phys.*, **32**, 1922, 258—280.
23. J. Colmez. Sur les espaces precompacts. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **233**, 1951, 1552—1553.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Received 29. 11. 1984