# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# GLEICHVERTEILUNGSEIGENSCHAFTEN VON FALTUNGEN VON VERTEILUNGSGESETZEN MIT KONTINUIERLICHEM MARKENRAUM

GEORGI S. ČOBANOV

Es werden Gleichverteilungseigenschaften von Verteilungsgesetzen einer zufälligen markierten Irrfahrt mit kontinuierlichem Markenraum untersucht.

Wir bezeichnen mit $G$ eine lokalkompakte Abelsche Hausdorffsche topologische Gruppe. $\mathcal{G}$ sei die $\sigma$ — Algebra aller Borelmengen von $G$ und $\mu$ das Haarsche Maß auf $\mathcal{G}$. Es bezeichne weiterhin $R^1_+=[0, \infty)$. $\mathcal{R}^1_+$ — die $\sigma$ — Algebra der Borelmengen von $R^1_+$ und $\mu_+$ — das Lebesgue Maß auf $\mathcal{R}^1_+$. Es sei $(A, \mathcal{A})$ das Produkt der meßbaren Räume $(G, \mathcal{G})$ und $(R^1_+, \mathcal{R}^1_+)$ und $\mathsf{P}$ sei die Menge aller regulären Verteilungsgesetze auf $\mathcal{A}$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathcal{L}$ die Menge aller meßbaren Abbildungen $\lambda_{(.)}$ von $R^1_+$ in $\mathsf{P}$.

Jedem $\lambda$ aus $\mathcal{L}$ ordnen wir vermöge

$$\lambda_{(x,t)}\,(X\times T)=(\lambda_t * \delta_{(x,0)})\,(X\times T)=\lambda_t((X-x)\times T) \tag{1}$$

mit $X\in\mathcal{G}$, $T\in\mathcal{R}^1_+$, für alle $x\in G$, $t\in R^1_+$ eine räumlich homogene markierte Verschiebung zu.

Für alle $\alpha$, $\beta$ aus $\mathcal{L}$ definieren wir die Operation

$$(\alpha\circ\beta)_{(t)}\,(X\times T)=\int_{G\times R^1_+}\beta_{(u)}((X-x)\times T)\alpha_{(t)}((dx)\times(du)),\ X\in\mathcal{G},\ T\in\mathcal{R}^1_+, \tag{2}$$

$\lambda^{(n)}$ bezeichne die $n$-te Potenz von $\lambda$ aus $\mathcal{L}$ bezüglich der Operation $\circ$.

Wie in der Arbeit [4] von U. Prehn können wir mit Hilfe dieser Operation eine zufällige Irrfahrt auf dem markierten Raum beschreiben. Im Unterschied zu [4] betrachten wir einen kontinuierlichen anstatt einen abzählbaren Markenraum. Wir deuten $\lambda^{(n)}_{(t)}(X\times T)$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine im Nullelement 0 aus $G$ mit Marke $t\in R^1_+$ beginnende zufällige Irrfahrt auf $G\times R^1_+$ nach $n$ zufälligen Verschiebungen in die Menge $X\in\mathcal{G}$ gelangt und eine Marke aus $T\in\mathcal{R}^1_+$ bekommt. Zu jedem $\lambda$ aus $\mathcal{L}$ gehört auf dieser Art und Weise eine zufällige Irrfahrt $\{\lambda^{(n)}\}$.

Wir bezeichnen im folgenden durch $\mathrm{Var}(\nu)$ die Totalvariation eines signierten Maßes $\nu$ und durch $\mathsf{P}_s$ die Menge aller bezüglich des Haarschen Maßes auf $\mathcal{G}$ absolut stetigen Verteilungsgesetze.

**Definition.** *Die zu $\lambda$ aus $\mathcal{L}$ gehörende zufällige Irrfahrt $\lambda^{(n)}$ heißt schwach asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle $\sigma\in\mathsf{P}_s$, alle $t\in R^1_+$, $\alpha\in\mathcal{L}$ die Konvergenz*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\,(\sigma * \lambda^{(n)}_{(t)}-\sigma * (\alpha\circ\lambda^{(n)})_{(t)})=0 \tag{3}$$

*erfüllt ist. Wir bezeichnen hier und im folgenden*

$$(\sigma * \lambda^{(n)}_{(t)})\,(X\times T)=\int_G\sigma(X-x)\lambda^{(n)}_{(t)}((dx)\times T) \tag{4}$$

$$X\in\mathcal{G},\quad T\in\mathcal{R}^1_+$$

Ferner bezeichnen wir mit $\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})$ die Menge aller $\lambda$ aus $\mathscr{L}$, die der Konvergenz (3) genügen. Die Notwendigkeit für die Untersuchung der Struktur dieser Menge entsteht in der Theorie der Punktprozesse (vgl. [1, 2, 3, 4]). Unser Ziel ist die Struktur von $\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})$ zu bestimmen.

Vermöge $p(t, T)=\lambda_{(t)}(G\times T)$, $t\in R^1_+$, $T\in\mathscr{R}^1_+$ ordnen wir jedem $\lambda$ aus $\mathscr{L}$ einen Markoffschen Kern $p(t, T)$ aus $(R^1_+, \mathscr{R}^1_+)$ in $(R^1_+, \mathscr{R}^1_+)$ zu und vermöge

$$\beta_t(X)=\lambda_{(t)}(X\times R^1_+),\quad X\in\mathscr{G}$$

eine Familie $\{\beta_t(\cdot), t\in R^1_+\}$ von Verteilungsgesetzen $\beta_t$ auf $\mathscr{G}$. Wir machen folgende Einschränkungen an $p(\cdot, \cdot)$ und $\beta_{(\cdot)}(\cdot)$, die wir im folgenden stets voraussetzen werden.

E1. Die Familie $\{\beta_t(\cdot), t\in R^1_+\}$ ist stetig bezüglich $t$ und der schwachen Konvergenz von Verteilungsgesetzen auf $\mathscr{G}$.

E2. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p(t, T)$, $t\in R^1_+$, $T\in\mathscr{R}^1_+$ besitzen Dichte $p_0(t, u)$; $t, u\in R^1_+$ d. h.

$$p(t, T)=\int_T p_0(t, u)\,\mu_+(du).$$

E3. Der Grenzwert $p_0(u)=\lim_{n\to\infty} p_0^{(n)}(t, u)$ existiert und ist für $\mu_+$ — fast alle $u\in R^1_+$ streng positiv mit

$$\int_{R^1_+} p_0(u)\mu_+(du)=1.$$

Wir setzen

$$p(\Delta)=\int_\Delta p_0(u)\mu_+(du),\quad \Delta\in\mathscr{B}^1_+.$$

E4. Der zu $p(t,T)$; $t\in R^1_+$, $T\in\mathscr{R}^1_+$ gehörende Markoffsche Prozeß besitzt eine einzige ergodische Klasse $\mathscr{E}$. Die Menge aller $\lambda$ aus $\mathscr{L}$, die den Einschränkungen E1—E4 genügen, bezeichnen wir mit $\mathscr{L}_0$.

D e f i n i t i o n. *Gittergruppe $G(\nu)$ eines Verteilungsgesetzes $\nu$ auf $\mathscr{G}$ nennen wir den Durchschnitt aller abgeschlossenen Untergruppen $H$ von $G$, zu denen ein $x_H$ aus $G$ existiert, so daß $\nu(x_H+H)=1$ ist.*

Wir bezeichnen mit $\lambda_{t,u,n}(\cdot)$ die Dichte des Verteilungsgesetzes $\lambda^{(n)}(X\times T)$, $X\in\mathscr{G}$, $T\in\mathscr{R}^1_+$ bezüglich $\mu_+$, d. h.

$$\lambda^{(n)}_{(t)}(X\times T)=\int_T \lambda_{t,u,n}(X)\mu_+(du).$$

Mit $G([t, u], n)$ bezeichnen wir die Gittergruppe des Verteilungsgesetzes $\lambda_{t,u,n}(\cdot)/\lambda_{t,u,n}(G)$.

D e f i n i t i o n. *Die abgeschlossene Hülle $G_i$ der kleinsten Untergruppe von $G$, die die Menge*

$$\bigcup_{(t,u)\in R^1_+\times R^1_+}\ \bigcup_{n:\,p_0^{(n)}(t,u)>0} G([t, u], n)$$

*enthält, nennen wir die innere Gittergruppe der Familie von Verteilungsgesetzen $\{\lambda_{t,u,n}(\cdot)/\lambda_{t,u,n}(G)\}$. Die Faktorgruppe von $G$ bezüglich $G_i$ bezeichnen wir mit $\tilde{G}=G/G_i$.* Für jedes Maß $\lambda_{t,u,n}(\cdot)$ existiert *eine Nebenklasse $H_{t,u,n}$ aus $\tilde{G}$, die den Träger von $\lambda_{t,u,n}$ enthält. Mit Hilfe von*

$$H_{t,u,n}+H_{u,v,m}=H_{t,v,n+m}$$

*schließen wir wie in der Arbeit* [5] *auf die Existenz eines Systems* $\{H_{t,u};\ (t, u)\in R^1_+ \times R^1_+\}$ *von Nebenklassen und einer bestimmten Nebenklasse* $E$ *aus* $\tilde{G}$ *mit*

$$H_{t,u,n}=H_{t,u}+nE, \qquad H_{t,t}=G,$$
$$H_{t,u}+H_{u,v}=H_{t,v}, \qquad H_{t,u}=-H_{u,t}.$$

Definition. *Verschiebungshalbgruppe* $\mathscr{B}(\{\lambda_n\})$ *einer Folge von Elementen* $\lambda_n$ *aus* $\mathscr{L}$ *heißt die Menge aller* $\nu$ *aus* $\mathscr{L}$ *mit* $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}(\sigma*(\lambda_n)_{(t)}-\sigma*(\nu\circ\lambda_n)_{(t)})=0$ *für alle* $t$ *aus* $R^1_+$ *und* $\sigma$ *aus* $\mathsf{P}_s$.

Definition. Gitterhalbgruppe $\gamma(\{\lambda^{(n)}\})$ der Potenzenfolge $\{\lambda^{(n)}\}$ eines $\lambda$ aus $\mathscr{L}_0$ heißt die Menge aller $\nu$ aus $\mathscr{L}$, die der Bedingung $\nu_{t,u}(H_{t,u})=\nu_{t,u}(G)$ für alle $(t, u)\in R^1_+ \times R^1_+$ genügen.

Die Halbgruppeneigenschaften in den beiden letzten Definitionen werden unmittelbar verifiziert.

Satz. *Für jedes* $\lambda$ *aus* $\mathscr{L}_0$ *ist* $\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})=\gamma(\{\lambda^{(n)}\})$.

Beweis. I. Wir greifen uns ein $\nu$ aus $\gamma(\{\lambda^{(n)}\})$ heraus. Definitionsgemäß gilt $\nu_{t,u}(H_{t,u})=\nu_{t,u}(G)$ für alle $t$, $u$ aus $R^1_+$.

$$\operatorname{Var}((\sigma*\lambda_{t,u,n})(\cdot)-\sigma*\int_{R^1_+}(\nu_{t,v}*\lambda_{v,u,n})(\cdot)\,\mu_+(dv)$$

$$=\operatorname{Var}(\int_{R^1_+}\int_G(\sigma*\lambda_{t,u,n}-\delta_x*\sigma*\lambda_{v,u,n})\,\nu_{t,v}(dx)\mu_+(dv)$$

$$\leq\int_{R^1_+}\int_G\operatorname{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}-\delta_x*\sigma*\lambda_{v,u,n})\nu_{t,v}(dx)\mu_+(dv)$$

$$=\int_{R^1_+}\int_{H_{t,v}}\operatorname{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}-\delta_x*\sigma*\lambda_{v,n,n})\nu_{t,v}(dx)\mu_+(dv).$$

Aus der letzten Ungleichungskette und mit Hilfe der Dreiecksungleichung und Satz 2.6. aus der Arbeit [5] erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}((\sigma*\lambda_{t,u,n})(\cdot)-\sigma*\int_{R^1_+}\nu_{t,v}*\lambda_{v,u,n})(\cdot)\,\mu_+(dv))=0$$

für alle $t$, $u$ aus $R^1_+$. Auf Grund der Ungleichung

$$\operatorname{Var}(\sigma*\lambda^{(n)}_{(t)}-\sigma*(\nu\circ\lambda^{(n)})_{(t)})\leq\int_{R^1_+}\operatorname{Var}((\sigma*\lambda_{t,u,n})(\cdot)-\sigma*\int_{R^1_+}(\nu_{t,v}*\lambda_{t,u,n})(\cdot)\mu_+(dv))\,\mu_+(du)$$

und mit Hilfe von E3 and E4, kommen wir zu $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}(\sigma*\lambda^{(n)}_{(t)}-\sigma*((\nu\circ\lambda^{(n)})_{(t)})=0$. Somit ist $\nu$ aus $\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})$ und es gilt $\gamma(\{\lambda^{(n)}\})\subset\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})$. II. Nun sei $\nu$ aus $\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})$. Wir nehmen an, daß $\nu$ nicht zu $\gamma(\{\lambda^{(n)}\})$ gehört. Das bedeutet $\nu_{t,v}(H_{t,v})<\nu_{t,v}(G)$ für wenigstens ein Paar $(t_0, v_0)$ aus $R^1_+\times R^1_+$ und somit für alle Paare $(t_0, v)$ mit $v$ aus einer kompakten Untermenge $K$ von $R^1_+$. Wegen der Abschätzung

$$\lim_{n\to\infty}\inf\operatorname{Var}(\sigma*\lambda_{t_0,u,n}-\sigma*(\nu\circ\lambda_{t_0,u,n}))\geq p_0(u)\int_{R^1_+}(\nu_{t_0,v}(G)-\nu_{t_0,v}(H_{t_0,v}))\mu_+(dv)$$

$$>p_0(u)\int_K(\nu_{t_0,v}(G)-\nu_{t_0,v}(H_{t_0,v}))\mu_+(dv)>0$$

kommen wir aber zum Widerspruch $\nu\,\bar{\in}\,\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})$. Daraus folgt $\mathscr{B}(\{\lambda^{(n)}\})\subset\gamma(\{\lambda^{(n)}\})$.

## LITERATUR

1. J. Kerstan, K. Matthes. Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen Gruppen I. *Math. Nachr.*, **37**, 1968, Nr. 5/6, 267—312.
2. J, Kerstan, K. Matthes. Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen aus lokalkompakten abelschen Gruppen II. *Math. Nachr.*, **41**, 1969, 121—132.
3. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке. Безгранично делимые точечные процессы. М., 1982.
4. U. Prehn. Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen Gruppen III. *Math. Nachr.*, **68**, 1975, 279—288.
5. G. Tschobanow. Gleichverteilungseigenschaften zufälliger Summen, die von einem Markoffschen Prozeβ abhängen. *Serdica*, **12**, 1986.

*Fakultät für Mathematik und Mechanik der Univ. Sofia*
*P. O. Box 373 Bulgarien*

*Eingegangen am 5. 1. 1984*