Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА НУЛЕВОМ МНОЖЕСТВЕ ПСЕВДОПОЛИНОМА

МАРИЯ МИТРЕВА

Настоящая работа является естественным обобщением работ [5, 7, 8] о продолжении функции, голоморфной на множестве, для случая нулевого множества псевдополинома, при заданных частных производных функции до q-ого порядка — $q=1, 2, \dots$.

Пусть $P(z, w)$, $z \in \mathbf{C}^n$, $w \in \mathbf{C}'$ является псевдополиномом переменного w, т. е. имеет вид $P(z, w)=a_0(z)w^m+a_1(z)w^{m-1}+\cdots+a_m(z)$, где $a_i(z)$, $i=0, 1, \dots, m$ — целые функции. Обозначим через Λ_P нулевое множество $P(z, w)$, а через $H(\Lambda_P)$ — множество голоморфных на Λ_P функций. Для любой вещественнозначимой функции $u(z, w)$ $z \in \mathbf{C}^n$, $w \in \mathbf{C}'$, обозначим

$$u^{(\varepsilon,\eta)}(z, w)=\sup_{\substack{(z-z')\leqq\varepsilon\\(w-w')\leqq\varepsilon}} u(z', w').$$

Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Пусть набор функций* $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q \in H(\Lambda_P)$ *таков, что существует целая функция* $f(z, w)$, *для которой выполнено* $\varphi_0(z,w)=f(z, w)\big|_{\Lambda_P}\varphi_1(z,w)=\frac{\partial f}{\partial z_1}(z, w)\big|_{\Lambda_P}, \dots, \varphi_q(z, w)=\frac{\partial^q f}{\partial z_1^q}(z, w)\big|_{\Lambda_P}$. *Пусть* $u(z, w)$ *плюрисубгармоническая функция в* $\mathbf{C}^{n+1}$ *такая, что* $\ln|\varphi_i(z, w)|\leqq u(z, w)$, $(z, w)\in\Lambda_P$, $i=0, 1, \dots, q$. *Тогда для любых* $z^0\in\mathbf{C}^n$ *и* $\eta>0$ *существует функция* $\Phi(z, w)=\Phi_{z^0,\eta}(z, w)$ *и константы* $\delta=\delta(z^0, \eta)$, $R=R(z^0, \eta)$, *что* $\Phi(z, w)$ *голоморфна на множестве* $\Omega(\delta, R; z^0)=\{|z-z^0|<\delta, |w|>R\}$

$$\varphi_0(z, w)=\Phi(z, w)\big|_{\Lambda_P}\cap\Omega(\delta, R; z^0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_q(z, w)=\frac{\partial^q\Phi}{\partial z_1^q}(z, w)\big|_{\Lambda_P}\cap\Omega(\delta, R; z^0)$$

и на множестве $\Omega(\delta, R; z^0)$, $\Phi(z, w)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\ln|\Phi(z, w)|\leqq u^{(\eta,0)}(z, w)+N\ln|w|+C \tag{1}$$

с константами C *и* N, *зависящие только от* z^0.

Доказательство: Пусть $z^0\in\mathbf{C}^n$ фиксировано. Если $a_0(z^0)\neq 0$, то $P(z, w)$ имеет в окрестности z^0 ровно m корней относительно w, которые являются голоморфными функциями переменного z и значит, существуют числа $\delta_0>0$ к $R_0>0$, что при любом $\delta>\delta_0$, $R>R_0$ множество $\Omega(\delta, R; z^0)\cap\Lambda_P$ пусто, что делает задачу тривиальной.

Пусть $a_0(z^0)=0$. Рассмотрим функцию $a_0(z, z_2^0, \dots, z_n^0)$. По свойствам голоморфных функций одного переменного существует проколотая окрестность $0<|z-z^0|<\varepsilon$, в которой $a_0(z_1, z_2^0, \dots, z_n^0) \neq 0$. Дальше, для простоты, будем считать $z^0 = 0$. Выберем ε еще так: $0 < \varepsilon < \eta/4$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Ввиду непрерывности $a_0(z_1, 'z)$ по $'z$, при фиксированном z_1, $0 < |z_1| < \varepsilon$, существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что $a_0(z_1, 'z) \neq 0$ — $|'z| < \delta$, $0 < |z_1| < \varepsilon$ и значит, существуют $\varepsilon' < \varepsilon$ и $\varepsilon'' > \varepsilon$, что при $\varepsilon' < |z_1| < \varepsilon''$, $|'z| < \delta$ $a_0(z_1, 'z) \neq 0$. Тогда, при

$$R \geqq \Big(\sum_{\nu=1}^{m} \max_{\substack{\varepsilon' < |z_1| < \varepsilon' \\ |'z| < \delta}} |a_\nu(z)|\Big) / \min_{\substack{\varepsilon' < |z_1| < \varepsilon'' \\ |'z| < \delta}} |a_0(z)|$$

на множестве $\{(z, w);\ \varepsilon' < |z_1| < \varepsilon'', |'z| < \delta, |w| > R\}$ $P(z, w) \neq 0$. Значит, число корней функции $P(z_1, 'z, w)$ относительно z_1 в круге $|z_1| < \varepsilon''$, при фиксированных $'z, w$, $|'z| < \delta$, $|w| > R$, не зависит от z' и w. Обозначим эти корни через $z_1^{(1)}('z, w)$, $z_1^{(2)}('z, w), \dots, z_1^{(p)}('z, w)$.

Функция $P^*(z_1, 'z, w = \prod_{i=1}^{p} (z_1 - z_1^{(i)}(z', w))$ будет псевдополиномом относительно z_1 с голоморфными коэффициентами в области $\{('z, w), |'z| < \delta, |w| > R\}$, дискриминант которого $\mathcal{D}_{P^*}('z, w)$ также голоморфен там. Так как для любого полинома существует полином с теми же корнями, у которого дискриминант не тождественно равен нулю, можно считать, что $\mathcal{D}_{P^*}('z, w) \not\equiv 0$. Пусть $E = \{('z, w), |'z| < \varepsilon, |w| > R, \mathcal{D}_{P^*}('z, w) = 0\}$.

Обозначим через $\omega(z_1, 'z, w) = (P^*(z_1, 'z, w))^{q+1}$ и построим по целой функции $f(z, w)$ функцию

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \varepsilon} f(\zeta, 'z, w) \frac{\omega(\varsigma, 'z, w) - \omega(z_1, 'z, w)}{(\varsigma - z_1)\omega(\varsigma, 'z, w)} d\zeta. \tag{2}$$

Эта функция при любом $('z, w) \notin E$ является по переменной z_1 интерполяционным полиномом Эрмита функции $f(z, w)$ с узлами интерполяции в точках $z_1^{(1)}('z, w), \dots, z_1^{(p)}('z, w)$ и, следовательно, при $(z, w) \in \Lambda_P \cap \{(z, w), |z_1| < \varepsilon'', |'z| < \delta, |w| > R$ $('z, w) \notin E\}$

$$\varphi_0(z, w) = \Phi(z, w),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_q(z, w) = \frac{\partial^q \Phi}{\partial z_1^q}(z, w).$$

Кроме того она голоморфна в области $\{(z, w);\ z_1 \in \mathbf{C}, |'z < |\delta, |w| > R\}$. Покажем, что $\Phi(z, w)$ удовлетворяет неравенству (1). Пусть $(z, w) \in \{(z, w), |z_1| < \varepsilon, |'z| < \delta, |w| > R\}$. Так как $\ln|\Phi(z, w)|$ является плюрисубгармонической, то

$$\ln|\Phi(z, w)| \leqq \frac{1}{\varepsilon^2 \pi \omega_{n-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \int_{\substack{|\lambda_1 - z_1| < \varepsilon \\ |\lambda - 'z| < \delta/2}} \ln^+|\Phi(z, w)| dv(\lambda), \tag{3}$$

где $dv(\lambda)$ — элемент объема в $\mathbf{C}_\lambda^n$, а $\omega_{n-1}(\delta/2)$ — объем шара радиуса $\delta/2$ в пространстве $\mathbf{C}_\lambda^{n-1}$. Интерполяционный многочлен $\Phi(z, w)$ при $('z, w) \notin E$ имеет еще представление ([6])

$$\Phi(z, w) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0} \frac{\varphi_k(z_1^{(i)}('z, w), ('z, w)}{k!} (z_1 - z_1^{(i)}('z, w)) \tag{4}$$

$$\times \frac{\omega(z_1, 'z, w)}{(z_1 - z_1^{(i)}('z, w))^{q+1}} \cdot \frac{\partial^{q-k}}{\partial z_1^{q-k}} \Big(\frac{(z_1 - z_1^{(i)}('z, w))^{q+1}}{\omega(z_1, z, w)}\Big)_{z_1 = z_1^{(i)}('z, w)}.$$

Подсчет производных дает нам

$$\frac{\partial^{q-k}}{\partial z_1{}^{q-k}}\Big(\frac{(z_1-z_1^{(i)}('z,\ w))^{q+1}}{\omega(z_1,\ 'z,\ w)}=\sum_{\|[l]_i\|=q-k}\frac{(q-k)!}{([l]_i)!}\ \frac{(qI+[l]_i)!}{(qI)!}$$

$$\times\frac{(-1)^{q-k}}{\prod\limits_{\nu\neq i}(z_1-z_1^{(\nu)}('z,\ w))^{q+1}\prod\limits_{\nu\neq i}(z_1-z_1^{(\nu)}('z,\ w))^{l\nu}},$$

где вектор $l\in \mathrm{N}^p$, $[l]_i$ означает $p-1$-мерный вектор, полученный из l опусканием i-ой компоненты, $\|[l]_i\|=l_1+\cdots l_{i-1}+l_{i+1}+\cdots+l_p$, $I=(1,\ldots,1)\in \mathrm{N}^{p-1}$, $qI=(q,\ldots,q)\in \mathrm{N}^{p-1}$, $([l]_i)!=l_1!\ldots l_{i-1}!\ l_{i+1}!\ldots l_p!$. После подстановки $z_1=z_1^{(i)}('z,w)$, $i=1,2,\ldots,p$ получаем

(5) $$\Phi(z,\ w)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{q}\varphi_k(z_1^{(i)}('z,\ w),\ 'z,\ w)\frac{(-1)^{q-k}(q-k)!}{k!}$$

$$\times(z_1-z_1^{(i)}('z,\ w))\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{p}\Big(\frac{z_1-z_1^{(\nu)}('z,\ w)}{z_1^{(i)}('z,\ w)-z_1^{(\nu)}('z,\ w)}\Big)^{q+1}\sum_{\|[l]_i\|=q-k}$$

$$\times\frac{(qI+[l]_i)!}{(qI)!\ ([l]_i)!}\prod_{\mu\neq i}\big(z_1^{(i)}('z,\ w)-z_1^{(\mu)}('z,\ w)\big)^{l\mu}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{q}\varphi_k(z_1^{(i)}('z,\ w),\ 'z,\ w)\frac{(-1)^{q-k}(q-k)!}{k!\ (q!)^{p-1}}\ (z_1-z_1^{(i)}('z,\ w))^k$$

$$\times\prod_{\nu\neq i}(z_1-z_1^{(\nu)}('z,\ w))^{q+1}\ \frac{1}{\prod\limits_{\nu\neq i}(z_1^{(i)}('z,\ w)-z_1^{(\nu)}('z,w))^{2q-k+1}}$$

$$\times\sum_{\|[l]_i\|=q-k}\frac{(qI+[l]_i)!}{([l]_i)!}\prod_{\nu\neq i}(z_1^{(i)}('z,\ w)-z_1^{(\nu)}('z,\ w)\sum_{\substack{\mu\neq i\\ \mu\neq\nu}}l\mu.$$

Оценим интеграл от $\ln^+\Phi(z,\ w)|$. Из представления (5) следует, что

$$\ln^+|\Phi(z,\ w)|\leqq\ln^+(\max_{0\leqq k\leqq q}\sup_{\substack{|z_1|<\varepsilon\\ |'z|<\delta\\ |w|>R}}|\varphi_k(z,\ w)|)+\ln pq$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{q}\Big\{\ln^+\frac{(q-k)!}{k!(q)!)^{p-1}}+\ln^+|z_1-z_1^{(i)}|^k+\ln^+|\prod_{\nu\neq i}(z_1-z_1^{(\nu)})|^{q+1}$$

$$+\ln^+\frac{1}{\mathscr{D}_{p*}('z,\ w)|^{2q+1-k}}+\ln^+|\prod_{\substack{(s,t),\ s\neq i\\ s\neq t}}(z_1^{(s)}-z_1^{(t)})|^{2q+1-k}$$

$$+\ln^+|\sum_{\|[l]_i\|=q-k}\frac{(qI+[l]_i)!}{([l]_i)!}\prod_{\nu\neq i}(z_1^{(i)}-z_1^{(\nu)})\sum_{\mu\neq i,\ \nu}l\mu|.$$

Однако $|z_1^{(i)}('z,\ w)|<\varepsilon<1/2$, $|z_1-z_1^{(i)}('z,\ w)|\leqq1|\ z_1^{(i)}('z,\ w)-z_1^{(\nu)}('z,\ w)|\leqq1$, $i=1,\ldots,p$, $\nu=1,\ldots p$, $\nu\neq i$, и выражения на втором, третьем и пятом месте в квадратных скобках неположительны. Аналогичным способом оцениваем сверху последнее слагаемое константами $\ln s_{k,i}$, где $s_{k,i}$ — число точек пространства N^{p-1}, для которых $\|[l]_i\|=q-k$. Поэтому

$$\ln|\Phi(z,\ w)\leqq u^{(2\varepsilon,0)}(z,\ w)+p(q(2q+1)-1-\cdots-q)$$

$$\times\ln\frac{1}{|\mathcal{D}_{P^*}('z,\ w)}+p\sum_{k=0}^{q}\ln\frac{(q-k)!}{k!(q!)^{p-1}}+\ln pq$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{q}(\sum_{s\{k,i\}}\ln\frac{(qI+[l]_i)!}{([l]_i)!}+\ln s_{k,i}$$

$$=u^{(2\varepsilon,0)}(z,\ w)+\frac{pq}{2}(3q-1)\ln\frac{1}{|\mathcal{D}_{P^*}('z,\ w)|}+C.$$

Значит

$$\int\limits_{\substack{|\lambda_1-z_1|<\varepsilon\\ |'\lambda-'z|<\delta/2}}\ln^+|\Phi(z,\ w)|dv(\lambda)\leqq\pi\varepsilon^2\omega_{n-1}(\delta/2)u^{(2\varepsilon,0)}(z,\ w)\tag{6}$$

$$+\pi\varepsilon^2\omega_{n-1}(\delta/2)C+\pi\varepsilon^2\frac{pq^0}{2}({}^3q+1)\int\limits_{|'\lambda|<\delta}\ln^+\frac{1}{|\mathcal{D}_{P^*}('\lambda,\ w)|}dv('\lambda).$$

Оценим $\int\limits_{|'\lambda|<\delta}\ln^+\frac{1}{|\mathcal{D}_{P^*}('\lambda,\ w)|}dv(\lambda)$. При $|z_1|<\varepsilon$, $|'z|<\delta$, $|w|>R$ функция $\mathcal{D}_{P^*}('z,w)$ ограничена, поэтому она является по w голоморфной функцией в окрестности бесконечной точки и значит ее лорановское развитие имеет вид

$$\mathcal{D}_{P^*}('z,\ w)=\sum_{i=\nu_0}^{\infty}h_i('z)w^{-i}$$

с коэффициентами $h_i(z)$ голоморфными функциями при $|'z|<\delta$, $\nu_0\geqq0$, $h_{\nu_0}('z)\not\equiv0$. Не нарушая общности можем считать $h_{\nu_0}(0)\not\equiv0$. Таким образом в формуле Йенсена для плюрисубгармонической функции $\ln^+\mathcal{D}^{P^*}|'z,w)|$ первое слагаемое равно нулю и

$$\int\limits_{|'\lambda|<\delta}\ln^+\frac{1}{|\mathcal{D}_{P^*}('\lambda,\ w)|}dv('\lambda)\leqq\int\limits_{|'\lambda|<\delta}\ln^+|\mathcal{D}_{P^*}('\lambda,\ w)|dv('\lambda)\tag{7}$$

$$-\omega_{n-1}(\delta)\ln|\mathcal{D}_{P^*}(0,\ w)|\leqq\omega_{n-1}(\delta)\nu_0\ln(w)+\sup_{|w|>R}\ln|\sum_{i=\nu_0}^{\infty}h_i(0)w^{i^0-\nu_0}|.$$

И так как при $|z_1|<\varepsilon$, $|'z|<\delta$, $|z|<\delta$, следует, что из (3), (6) и (7) получаем

$$\ln|\Phi(z,\ w)|\leqq u^{(4\varepsilon,0)}(z,\ w)+\frac{pq}{2}(3q+1)\nu_0\ln|w|+C.$$

Это с точности до обозначений доказывает лемму.

При доказательстве основного результата будем пользоваться еще следующей леммой ([5]).

Лемма 2. *Если* ω — *область в* $\mathbf{C}^n$, *а* $\varphi(z,\ w)$ — *голоморфная функция в области* $G_{\omega,R}=\{(z,\ w),\ z\in\omega,\ |w|>R\}$, *непрерывная в замыкании* $\overline{G}_{\omega,R}$ *и такая, что* $\frac{\varphi(z,\ w)}{Q(z,\ w)}$ *голоморфна в* $G_{\omega,R}$, *где* $Q(z,\ w)$ — *псевдополином по* w, *то для любой области* ω_1, *компактно вложенной в* ω, *существует константа* K, *не зависящая от функции* φ *такая, что*

(8) $$\sup_{z\in\omega_1}\left|\frac{\varphi(z,w)}{Q(z,w)}\right|\leqq\sup_{z\in\omega}|\varphi(z,w)|+K.$$

Теорема: *Пусть $P(z, w)$ псевдополином в $\mathbf{C}^{n+1}$, а набор функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_q \in H(\Lambda_P)$ таков, что существует целая функция $f(z, w)$, для которой*

(9) $$\begin{cases}\varphi_0(z,w)=f(z,w)|_{\Lambda_P},\\ \varphi_1(z,w)=\dfrac{\partial f}{\partial z_1}(z,w)|_{\Lambda_P},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_q(z,w)=\dfrac{\partial^q f}{\partial z_1^q}(z,w)|_{\Lambda_P}.\end{cases}$$

Пусть $u(z, w)$ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbf{C}^{n+1}$, такая, что

(10) $$\ln|\varphi_i(z,w)|\leqq u(z,w),\quad (z,w)\in\Lambda_P\quad i=0,1,\ldots,q.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ и для любой монотонно растущей выпуклой функции $\varkappa(t)$ такой, что $\lim_{t\to+\infty}\varkappa(t)/t=0$ существует целая функция $\mathcal{F}(z, w)$, для которой

(11) $$\begin{cases}\varphi_0(z,w)=\mathcal{F}(z,w)|_{\Lambda_P}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_q(z,w)=\dfrac{\partial^q\mathcal{F}}{\partial z_1^q}(z,w)|_{\Lambda_P}\end{cases}$$

и при любом $\varepsilon_1>0$

(12) $$\ln|\mathcal{F}(z,w)|\leqq u^{(\varepsilon_0\varepsilon_1)}(z,w)+\varkappa(\ln|w|)+C(z)+C(\varepsilon_1),$$

где $C(z)$ — локально ограниченная функция, зависящая только от $\mathcal{F}$, а $C(\varepsilon_1)$ — константа, зависящая только от ε_1.

Доказательство: Пусть $\eta>0$. Согласно лемме 1 для любого $z^0\in\mathbf{C}^n$ существует $\delta<\eta/4$ и $R>0$, существуют константы C и N и функция $\Phi(z, w)$, голоморфная на множестве $\Omega(\eta, R; z^0)$, что

$$\begin{cases}\varphi_0(z,w)=\Phi(z,w)|_{\Lambda_P\cap\Omega(\delta,R;z^0)},\\ \varphi_1(z,w)=\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_1}(z,w)|_{\Lambda_P\cap\Omega(\delta,R;z^0)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_q(z,w)=\dfrac{\partial^q\Phi}{\partial z_1^q}(z,w)|_{\Lambda_P\cap\Omega(\delta,R;z^0)}\end{cases}$$

$$\ln|\Phi(z,w)|\leqq u^{(\eta,0)}(z,w)+N\ln|w|+C,\ (z,w)\in\Omega(\delta,R;z^0).$$

Выберем точки $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots$ в $\mathbf{C}^n$ так, чтобы шары $B_{\delta_i}(z^{(i)})=B_i$ образовали локально конечное покрытие $\mathbf{C}^n$. Пусть соответствующие числа, области и функции будут R_i, $\Omega(\delta_i, R_i; z^{(i)})$ и $\Phi_i(z, w)$. Пусть $\widetilde{\Omega}(\delta_i, R_i; z^{(i)})=\{(z, w), |z-z^{(i)}|<\delta_i, |w|<2R_i\}=\widetilde{\Omega}_i$, и пусть $\widetilde{\Phi}_i(z, w)$ есть сужение функции $f(z, w)$ на $\widetilde{\Omega}_i$. „Склеим" сначала Φ_i и $\widetilde{\Phi}_i$.

Пусть пара бесконечнодифференцируемых функций комплексного переменного α_i, $\widetilde{\alpha}_i$ такова, что $\alpha_i+\widetilde{\alpha}_i=1$, $0\leqq\alpha_i(w)\leqq 1$, $0\leqq\widetilde{\alpha}_i(w)\leqq 1$, $\alpha_i(w)=1$ при $|w|>2R_i$, $\alpha_i(w)=0$ при $|w|<2R_i$.

Рассмотрим дифференциальную форму типа (0, 1) на множестве $\{(z, w), |z-z^{(i)}|<4\delta_i, w\in \mathbf{C}\}=\mathscr{D}_i$,

$$\nu_i=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{\Phi}_i-\Phi_i}{P^{q+1}}\,\overline{\partial}\alpha_i & (z, w)\in\Omega(4\delta_i, R_i; z^{(i)}),\\[2mm] \dfrac{\Phi_i-\widetilde{\Phi}_i}{P^{q+1}}\,\overline{\partial}\widetilde{\alpha}_i & (z, w)\in\widetilde{\Omega}(4\delta_i, R_i; z^{(i)}).\end{cases}$$

Она имеет компактный носитель и бесконечно дифференцируемые коэффициенты. И так как $\overline{\partial}\nu_i=0$, согласно теорем Хермандера о существовании решения $\overline{\partial}$ — проблемы, существует решение V_i уравнения $\overline{\partial}V_i=\upsilon_i$, которое ограничено на множестве $\{|z-z^{(i)}|<3\delta_i, w\in\mathbf{C}\}$, [3]. С помощью V_i определим на $\mathscr{D}_i$ функции

$$\mathscr{F}_i=\begin{cases}V_iP^{q+1}+(\widetilde{\Phi}_i-\Phi_i)\widetilde{\alpha}_i+\Phi_i & \Omega(4\delta_i, R_i; z^{(i)}),\\[2mm] V_iP^{q+1}+(\Phi_i-\widetilde{\Phi}_i)\alpha_i+\widetilde{\Phi}_i, & \widetilde{\Omega}(4\delta_i, R_i; z^{(i)}).\end{cases}$$

Эти функции голоморфны на $\mathscr{D}_i$, так как $\overline{\partial}\mathscr{F}_i=0$ и

$$\varphi_0(z, w)=\mathscr{F}_i(z, w)/\Lambda_P\cap\mathscr{D}_i$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_q(z, w)=\frac{\partial^q\mathscr{F}_i}{\partial z_1^q}(z, w)/\Lambda_P\cap\mathscr{D}_i$$

$$i=1, 2, \dots,$$

а также существуют константы C_i и N_i, что при $|z-z^{(i)}|<3\delta_i$, $w\in\mathbf{C}$

$$\ln|\mathscr{F}_i(z, w)|\leqq u^{(\eta, 0)}(z, w)+N_i\ln|w|+C_i. \tag{13}$$

Возьмем произвольное бесконечно дифференцируемое разбиение единицы в $\mathbf{C}^n$ — (η_k, i_k), подчиненное покрытию $\{B_i\}$. Рассмотрим функции

$$t_{i,k}=\begin{cases}\dfrac{\mathscr{F}_{i_k}-\mathscr{F}_i}{P^{q+1}}\,\eta_k, & \mathscr{D}_i\cap\mathscr{D}_{i_k},\\[2mm] 0, & \mathscr{D}_i\setminus\mathscr{D}_{i_k},\end{cases}$$

$$g_i=\sum_k f_{i,k}.$$

Так как для функций $\dfrac{\mathscr{F}_j-\mathscr{F}_i}{P^{q+1}}$ выполнены соотношения соседства первой проблемой Кузена на $\mathscr{D}_i\cap\mathscr{D}_j$, то $\overline{\partial}g_j=\overline{\partial}g_i$ там и дифференциальная форма h, $h=\overline{\partial}g_i$ на $\mathscr{D}_i$ определена корректно. Из (13) и леммы 2, примененной к функции $\mathscr{F}_i-\mathscr{F}_j$ и псевдополиному $Q(z, w)=P^{q+1}(z, w)$ следует, что существуют другие константы $\widetilde{C}_i$ и $\widetilde{N}_i$, такие, что

$$(14)\qquad \ln\left|\frac{\mathcal{F}_j-\mathcal{F}_i}{P^{q+1}}\right|\leqq u^{(2\eta,\,0)}(z,\ w)+\tilde{N}_i\ln(1+|w|^2)+\tilde{C}_i,$$

$$(z,\ w)\in\{|z-z^{(i)}|<2\delta_i,\ w\in\mathbf{C}\}\cap\{|z-z^{(i)}|<2\delta_j,\ w\in\mathbf{C}\}.$$

Покажем, что существует плюрисубгармоническая функция $\beta(z,\ w)$, такая, что $h\in L^2(\mathbf{C}^{n+1},\ \beta)$. Действительно,

$$\int_{\mathbf{C}^{n+1}}|h|^2e^{-\beta}dv$$

$$\leqq\sum_i\sum_k\max_{B_i\cap B_{i_k}}|\bar\partial\eta_k|^2\int_{\mathcal{D}_i\cap\mathcal{D}_{i_k}}\left|\frac{\mathcal{F}_i-\mathcal{F}_{i_k}}{P^{q+1}}\right|^2e^{-\beta}dv$$

$$\sum_i\sum_k\max_{B_i\cap B_{i_k}}|\bar\partial\eta_k|^2\left|\frac{\mathcal{F}_i-\mathcal{F}_{i_k}}{P^{q+1}}\right|^2\mu(B_i\cap B_{i_k})\int_{\mathcal{D}_i\cap\mathcal{D}_{i_k}}e^{-\beta}dv$$

и если $\left|\frac{\mathcal{F}_i-\mathcal{F}_{i_k}}{P^{q+1}}\right|\leqq\frac{1}{\max|\partial\eta_k|^2}\,\frac{1}{\mu(B_i\cap B_{i_k})}\,\frac{1}{ik(1+|w|^2)^3}$ последний двойной ряд будет сходящимся. Поэтому, учитывая (14) достаточно выбрать

$$(15)\qquad \beta(z,\ w)\geqq 2u^{(2\eta,\,0)}(z,\ w)+N_i\ln(1+|w|^2)+C'_i,$$

чтобы $h\in L^2(\mathbf{C}^{n+1},\ \beta)$.

Пусть $\varkappa(t)$ — монотонно растущая, бесконечно дифференцируемая выпуклая функция, такая, что $\lim_{t\to+\infty}\varkappa(t)/t=0$, (15) будет выполнено, если

$$\beta(z,\ w)\geqq 2u^{(2\eta,\,0)}(z,\ w)+\varkappa(\ln|w|)+N'_i\ln|w|-\varkappa(\ln|w|)+C^1_i.$$

Следовательно, достаточно взять $\beta(z,\ w)\geqq 2u^{(2\eta,\,0)}(z,\ w)+\varkappa(\ln|w|)+\gamma(z)$, где $\gamma(z)$ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbf{C}^n$, такая, что при $z\in B_i\cap B_{i_k}$, $\gamma(z)>C_i+\sup_w(N'_i\ln|w|-\varkappa(\ln|w|))$. Функция $\gamma(z)$ существует, так как покрытие $\{\beta_i\}$ локально конечно. Снова по теореме Хермандера существует решение уравнения $\bar\partial H=h$, принадлежащее пространству $L^2(\mathbf{C}^{n+1},\ \beta(z,\ w)+\ln(1+|z|^2+|w|^2))$.

Функции $\mathcal{F}_i-(H-g_i)P^{q+1}$ на $\mathcal{D}_i$ определяют в $\mathbf{C}^{n+1}$ искомую целую функцию $\mathcal{F}(z,\ w)$. Действительно, $\bar\partial\mathcal{F}_i=\bar\partial[P^{q+1}\times(H-g_i)]=-\bar\partial(H-g_i)P^{q+1}=0$, а на пересечениях $\mathcal{D}_i\cap\mathcal{D}_j$ в виду того, что $g_i-g_j=\frac{\mathcal{F}_i-\mathcal{F}_j}{P^{q+1}}$,

$$\mathcal{F}_i-(H-g_i)P^{q+1}-\mathcal{F}_j+(H-g_j)P^{q+1}=0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^s\mathcal{F}}{\partial z_1^s}(z,\ w)\Big|_{\Lambda_P}=\varphi_s(z,\ w)-\sum_{k=0}^s\frac{s!}{k!(s-k)!}\frac{\partial^{s-k}(H-g_i)}{\partial r_1^{s-k}}$$

$$\times\frac{\partial^s}{\partial z_1^s}(P^{q+1})=\varphi_s(z,\ w)-\sum_{k=0}^s\frac{s!}{k!(s-k)!}(q+1).q\ldots(q-k+2)$$

$$\times\frac{\partial^{s-k}}{\partial z_1^{s-k}}(H-g_i)P^{q+1-k}=\varphi_s(z,\ w)$$

$$s=0,\ 1,\ldots,\ q,$$

т. е. $\mathcal{F}(z, w)$ удовлетворяют (11) и $\mathcal{F} \in L^2(\mathbb{C}^{n+1}, \beta(z, w)+(p(q+1)+2)\ln(1+|w|^2))$. Откуда, оценивая стандартным образом значение $|\mathcal{F}(z, w)|$ в центре шара через интеграл по шару получаем оценку (12). Теоремма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971.
2. Л. И. Ронкин. Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев, 1977.
3. Л. Хермандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968.
4. Л. И. Ронкин. О продолжении с оценками функций, голоморфных на нулевом множестве полинома. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 36. Харьков, 1981.
5. Л. И. Ронкин. О продолжении с оценками, голоморфных на нулевом множестве псевдополинома. *Сиб. мат. ж.*, **24**, 1983, № 4.
6. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954.
7. М. И. Митрева. О продолжении с сохранением роста, голоморфных на нулевом множестве полинома функций, имеющих заданную производную. *Сердика*, **12**, 1986, 159—165.
8. М. И. Митрева. О продолжении функций конечного порядка с заданной производной на нулевом множестве полинома. *Годишник ВПИ, Шумен*, 1984.

Высший педагогический институт
Шумен Болгария

Поступила 13. 12. 1984