Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ÜBER DIE LÖSUNG GEWISSER FUNKTIONALGLEICHUNGEN MITTELS DER LAPLACE-TRANSFORMATION

HANS-JÜRGEN GLAESKE

Mittels der Laplace Transformation von Distributionen werden holomorphe Lösungen f von Funktionalgleichungen der Gestalt $f(z+1)[f(z)]^{\pm 1}=g(z)$ konstruiert. Dabei ist g von der Gestalt $g=\exp\Phi$, wo Φ Laplace-Transformierte einer gewissen Klasse von Distributionen ist. Die Methode wird an Hand einiger Beispiele erläutert.

0. In [5] behandelte Fenyö die Funktionalgleichung

$$f(z+1)=g(z)f(z) \tag{0.1}$$

mittels der Laplace-Transformation und konstruiert eine in $\operatorname{Re}(z)>0$ holomorphe Lösung f von (0.1) unter der Annahme, daß g eine in dieser Halbebene holomorphe Funktion ist, die sich in der Gestalt $g=e^{\Phi}$ schreiben läßt, wobei Φ Laplace-Transformierte einer Funktion φ ist.

Es wird bemerkt, daß eine Charakterisierung der Funktionen Φ schwierig sei. Eine solche Charakterisierung ist aber leicht möglich, wenn man an Slelle der Laplace-Transformation von Funktionen solche von Distributionen als Hilfsmittel verwendet. Darüber hinaus liefert diese Methode auch eine Vergrößerung der Klasse der zulässigen Funktionen $g=e^{\Phi}$.

Im ersten Abschnitt wird dies näher ausgeführt. Im zweiten Abschnitt werden einige Bemerkungen über die Anwendung dieser Methode auf die Funktionalgleichung

$$f(z+1)f(z)=g(z) \tag{0.2}$$

gemacht. Einige Beispiele schließen im dritten Abschnitt diese Betrachtungen ab. Für die theoretischen Grundlagen der Lösung dieser Funktionalgleichungen verweisen wir auf die Monographie [6] von Marek Kuczma sowie auf die Arbeiten [1] und [7].

1. Wie üblich bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'_+=\mathcal{D}'_+(R_1)$ den Raum der Distributionen aus $\mathcal{D}'(R_1)$, die auf der Halbachse des negativ Reellen verschwinden. Weiterhin sei $\mathcal{S}'_+=\mathcal{D}'_+\cap\mathcal{S}'(R_1)$, wo $\mathcal{S}'(R_1)$ der Raum der temperierten Distributionen sei.

Als Originalraum für die Laplace-Transformation verwenden wir mit [8], § 10.2.

$$\mathcal{D}'_+(c)=\{f: f\in\mathcal{D}'_+ : \exists c\in R : e^{-st}f\in\mathcal{S}'_+ \text{ für alle } \sigma=\operatorname{Re}(s)>c\}. \tag{1.1}$$

Für $f\in\mathcal{D}'_+(c)$ existiert dann die Laplace-transformierte F mit

$$F(s)=\langle f(t),\, e^{-st}\rangle,\quad s=\sigma+i\tau \tag{1.2}$$

in der Halbebene $\sigma>c$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Bezeichnet man

$$A(c)=\{F: F \text{ holomorph für } \sigma>c\} \tag{1.3}$$

und setzt man mit [8, § 10.4., S 181]

(1.4) $$\mathscr{H}(c)=\{F : F\in\mathscr{A}(c): \text{Für alle } \varepsilon>0,\ \sigma_0>c \text{ existieren } C_\varepsilon(\sigma_0),\ m=m(\sigma_0)\geqq 0 \text{ so, daß } |F(s)|\leqq C_\varepsilon(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma}(1+|s|)^m,\ \sigma>\sigma_0\},$$

so vermittelt (1.2) nach [8, § 10.4., S. 185] eine eindeutige Beziehung zwischen $\mathscr{D}'_+(c)$ und $\mathscr{H}(c)$, d. h. der Bildraum $\mathscr{H}(c)$ von $\mathscr{D}'_+(c)$ kann auch charakterisiert werden als

(1.4′) $$\mathscr{H}(c)=\{F : F\in\mathscr{A}(c): \exists f\in\mathscr{D}'_+(c) \text{ mit } \mathscr{L}[f]=F\}.$$

Damit gilt in Analogie zu [5], Theorem 1, der

Satz 1.1: *Falls* $g\in\mathscr{A}(0)$ *und* $g=e^\Phi$ *mit* $\Phi\in\mathscr{H}(c)$ *für ein geeignetes* $c\in R$, *so besitzt die Funktionalgleichung* (0.1) *eine Lösung* $f\in\mathscr{A}(0)$.

Beweis: Da $\Phi\in\mathscr{H}(c)$ für ein $c\in R$, gilt nach [8, S. 179] auch $\Phi'\in\mathscr{H}(c)$. Nun ist Φ' die logarithmische Ableitung von g. Also existiert wegen (1.4′) eine Distribution $h\in\mathscr{D}'_+(c)$ mit

(1.5) $$\frac{g'}{g}=\mathscr{L}[h].$$

Integration beider Seiten zwischen 1 und s, $\sigma>0$ liefert

$$\log g(s)=\int_1^s\mathscr{L}[h](u)du+\log g(1)=\int_1^s\langle h(t), e^{-ut}\rangle du+\log g(1)=\langle h(t), (e^{-t}-e^{-st})/t\rangle+\log g(1).$$

Durch Betrachtung des Limes des Differenzenquotienten überzeugt man sich sofort davon, daß für $h\in\mathscr{D}'_+(c)$ die Funktion φ mit

(1.6) $$\varphi(s)=\langle h(t), \frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\rangle+\log g(1)$$

eine für $\sigma>0$ holomorphe Funktion von s ist, d. h. $\varphi\in\mathscr{A}(0)$. Wir fassen φ als logarithmische Ableitung einer Funktion $f\in\mathscr{A}(0)$ auf: $\varphi=f'/f$.

Damit wird nach (1.5)

$$\frac{f'(s+1)}{f(s+1)}-\frac{f'(s)}{f(s)}=\langle h(t), \mathrm{e}^{-st}\rangle=\frac{g'(s)}{g(s)}.$$

Die Integration ergibt sofort $f(s+1)=Cg(s)f(s)$.

Die Funktion f mit $\varphi=f'/f$ aus (1.6) ist aber nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt. Wählt man diese so, daß $f(1)=1$ gilt, so ist einerseits

$$f(2)=Cg(1).$$

Andererseits ergibt die Integration von (1.6) mit $\varphi=f'/f$ zwischen 1 und 2 sofort

$$f(2)=g(1),$$

d. h. für jedes f, das mit $\varphi=f'/f$ die Gleichung (1.6) erfüllt und für das $f(1)=1$ gilt, ist $C=1$, d. h. (0.1) ist erfüllt.

Folgerung 1.1:

Eine Lösung f_0 der Funktionalgleichung (0.1) mit $f_0\in\mathscr{A}(0)$ ist das Integral von

(1.6′) $$\frac{f_0'(s)}{f_0(s)}=\langle h(t), \frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\rangle+\log g(1),$$

mit $f_0(1)=1$. Hier ist $h=\mathscr{L}^{-1}[g'/g]$.

Bemerkungen:

1. Nach [6] ist die allgemeine Lösung von (0.1) dann von der Gestalt $f=kf_0$, wo k eine beliebige Lösung von (0.1) mit $g=1$, d. h. eine beliebige Funktion mit der Periode 1 ist.

2. Durch eine entsprechende Rechnung wie in [5] erhält man sofort den

Satz 1.2: *Falls g wie in Satz 1.1 gewählt wird, gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g'(k)}{g(k)}-\log n\Big)=\mathscr{L}\Big[\Big(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\Big)h(t)\Big](1)-\log g(1), \tag{1.7}$$

wobei h aus (1.5) *zu entnehmen ist.*

2. Ein analoges Vorgehen ist auch für die Lösung der Funktionalgleichung (0.2) möglich, wobei es aber eine ganze Reihe von Vereinfachungen gibt. Der Satz (1.1) gilt wörtlich auch für die Funktionalgleichung (0.2). An die Stelle der Gleichung (1.6) beim Beweis dieses Satzes tritt jetzt die Beziehung

$$\varphi(s)=\langle h(t),\frac{e^{-st}}{1+e^{-t}}\rangle=\langle\frac{h(t)}{1+e^{-t}},\ e^{-st}\rangle=\mathscr{L}\Big[\frac{h(t)}{1+e^{-t}}\Big](s),$$

die sofort zeigt, daß $\varphi\in\mathscr{A}(0)$ ist, wegen $h\in\mathscr{D}'_+(0)$.

Wählt man wieder $\varphi=f'/f$, so wird dieses Mal

$$\frac{f'(s+1)}{f(s+1)}+\frac{f'(s)}{f(s)}=\frac{g'(s)}{g(s)}$$

und die Integration liefert $f(s+1)f(s)=Cg(s)$.

Da die Beziehung

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=\mathscr{L}\Big[\frac{h(t)}{1+e^{-t}}\Big](s) \tag{2.1}$$

die Funktion f nur bis auf eine multiplikative Konstante festlegt, so erhält man durch geeignete Wahl dieser Konstanten eine spezielle Funktion f_0, die (0.2) erfüllt. Wir haben also insgesamt den

Satz 2.1: *Falls $g\in\mathscr{A}(0)$ und $g=e^{\Phi}$ mit $\Phi\in\mathscr{H}(c)$ für ein geeignetes $c\in R$, so besitzt die Funktionalgleichung* (0.2) *eine Lösung $f\in\mathscr{A}(0)$. Ist $\tilde{f}_0$ eine Lösung von* (2.1) *mit $h=\mathscr{L}^{-1}[g'/g]$, so liefert die allgemeine Lösung $f_0=K\tilde{f}_0$ von* (2.1) *bei passender Wahl der Konstanten K eine spezielle Lösung von* (0.2).

Bemerkung: Analog zur Bemerkung 1 aus Abschnitt 1 gilt hier: Ist f_0 eine spezielle Lösung von (0.2), so ist die allgemeine Lösung von der Gestalt $f=kf_0$, wo k eine beliebige Lösung von (0.2) mit $g=1$ ist.

3. Zum Abschluß mögen zwei Beispiele die allgemeinen Ausführungen ergänzen.

1. $g(s)=e^s$.

Dann wird $g'/g=1$, d. h. $h=\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta$.

Betrachten wir die Funktionalgleichung (0.1), d. h.

$$f(s+1)=e^s f(s), \tag{3.1}$$

so lautet (1.6')

$$\frac{f_0'(s)}{f_0(s)}=\langle\delta(t),\ \frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\rangle+\log e=s-1/2,$$

wie eine leichte Rechnung zeigt. Die Lösung f_0 dieser Differentialgleichung mit $f_0(1)=1$ ist $f_0(s)=\exp((s^2-s)/2)$ und das ist eine spezielle Lösung von (3.1).

Analog erhält man für (0.2) die Funktionalgleichung

(3.2) $$f(s+1)f(s)=e^s.$$

Die Gleichung (2.1) zur Bestimmung von f lautet dann

$$\frac{f'(s)}{f(s)}=\langle\delta(t),\ \frac{e^{-st}}{1+e^{-t}}\rangle=\frac{1}{2}$$

und deren allgemeine Lösung ist $f(s)=Ke^{s/2}$. Diese erfüllt die Funktionalgleichung (3.2) für $K=e^{-1/4}$, wie man sofort sieht. Eine spezielle Lösung von (3.2) ist also

$$f_0(s)=\exp((s-1/2)/2).$$

2. $g(s)=e^{s^2/2}$

Dann wird $g'/g=s$, d. h. $h=\mathscr{L}^{-1}[s]=\delta'$.
Völlig analoge Rechnungen wie oben zeigen, daß $f_0(s)=\exp[s^3/6-s^2/4+s/12]$ eine spezielle Lösung von

(3.3) $$f(s+1)=e^{s^2/2}f(s)$$

und $f_0(s)=\exp(s^2-s)/4$ eine spezielle Lösung von

(3.4) $$f(s+1)f(s)=e^{s^2/2}$$

ist.
In der nachfolgenden Tabelle sind drei weitere Beispiele aufgeschrieben, wobei die letzte Spalte Hinweise auf die für die Rechnungen erforderlichen Formeln gibt, falls diese nicht allgemein geläufig sind.

g	h	Lösung von (0.1)	Lösung von (0.2)	Bemerkungen
s	1	$\Gamma(s)$	$\sqrt{2}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$	[3], 1. 7. 2, (17) bzw. [4], 4. 5, (7)
$s(s+1)$	$1+e^{-t}$	$\Gamma(s)\,\Gamma(s+1)$	s	[3], 1. 7. 2, (17)
$\exp(e^{-as})$	$-a\delta(t-a)$	$\exp\left[\dfrac{e^{-sa}-1}{e^{-a}-1}-1\right]$	$\exp\left[\dfrac{e^{-as}}{1+e^{-a}}\right]$	$a>0$;

LITERATUR

1. I. Anastassiadis. Sur les solutions de l'équation fonctionelle $f(x+1)=g(x)f(x)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **253**, 1961, 2446-2447.
2. Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
3. A. Erdelyi. Higher transcendental functions, vol. 1. New York, 1953.
4. A. Erdelyi. Tables of Integral Transforms, vol. 1. New York, 1954.
5. I. Fenyö. The solution of a functional equation by Laplace-transformation. —In: Generalized functions and operational calculus. Sofia, 1979, 97-100.
6. M. Kuczma. Functional equations in a single variable. Warszawa, 1968.
7. H. P. Thielmann. On the convex solution of certain functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**, 1941, 118-120.
8. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. М., 1981.

Friedrich-Schiller-Universität,
Sektion Mathematik
Universitätshochhaus
DDR-6900 Jena

Eingegangen am 24. 10. 1985