Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

В настоящем сообщении будут рассмотрены некоторые математические модели распределенных кинетических систем. Характерной особенностью таких систем является то, что в них каждая пространственная точка представляет собой генератор колебаний, а связь между этими генераторами осуществляется посредством диффузии или теплопроводности. Примерами такого рода распределенных систем могут служить химические реакции, экологические системы, некоторые полупроводниковые конструкции и др.

Дифференциальное уравнение, описывающее такую систему, имеет вид (u вообще говоря, вектор, x — совокупность пространственных переменных)

$$D\Delta u=\frac{\partial u}{\partial t}+F(u,\ x,\ t).$$

Будем рассматривать случай слабой пространственной связи, т. е. малых D. При $D=0$ имеем обыкновенную динамическую систему (x играет роль параметра), достаточно хорошо изученную в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Нас будут интересовать периодические решения, т. е. решения, удовлетворяющие условию $u(x,\ t)=u(x,\ t+T)$. Если D хотя и мало, но не равно нулю, то появляются граничные условия, которые не могут быть учтены в решении обыкновенного дифференциального уравнения. При малых D задача является сингулярно возмущенной, характеризующейся наличием пограничного слоя.

Нами сделана попытка применить к исследованию этой задачи метод Фурье в сочетании с асимптотическим методом пограничных функций для сингулярно возмущенных задач. Поскольку даже в теории обыкновенных дифференциальных уравнений для динамической системы общего вида трудно говорить о конструктивном представлении периодического решения, будем предполагать, что F также определенным образом содержит малые параметры.

1. Рассмотрим вначале простейшую модель с одной неизвестной функцией и одной пространственной независимой переменной:

$$\mu^2 y''=\dot{y}+ay+\mu F(y,\ x,\ t)+f(x,\ t). \tag{1}$$

Здесь $y''=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\dot{y}=\frac{\partial y}{\partial t}$; $(x,\ t)\in\overline{\mathscr{D}}=[0,\ l]\times(-\infty,\ \infty)$; $a=\mathrm{const}>0$; $\mu>0$ — малый параметр. Зададим дополнительные условия

$$y(0,\ t)=y(l,\ t)=0;\quad y(x,\ t)=y(x,\ t+2\pi). \tag{2}$$

Поставим целью исследовать вопросы существования и единственности решения задачи (1), (2) и построить асимтотику решения по параметру μ. Пусть $f(x,\ t)$ — 2π-периодична по t и бесконечно дифференцируема в $\overline{\mathscr{D}}$, $F(y,\ x,\ t)$ бесконечно дифференцируема в $R^1\times\overline{\mathscr{D}}$ и $F(y(x,\ t),\ x,\ t)$ — 2π-периодична по t в $\overline{\mathscr{D}}$, если этим свойством обладает $y(x,\ t)$. Заметим, что требование бесконечной дифференцируемости условно в том смысле, как обычно в задачах построения асимптотики: порядок дифференцируемости входящих в уравнение функций определяется порядком асимп-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12. 1986, с. 376—380.

тотики, которую желательно получить. Если же интересоваться только существованием и единственностью решения, достаточно следующей гладкости: $f \in C_{xt}^{21}(\overline{\mathscr{D}})$, $F \in C_{yxt}^{221}(S \times \overline{\mathscr{D}})$, $S = \{ y \in R^1, |y| \leq H\}$.

Рассмотрим сначала вспомогательную линейную задачу

$$\mu^2 z'' = \dot{z} + az + \varphi(x, t), \tag{3}$$
$$z(0, t) = z(l, t) = 0; \quad z(x, t) = z(x, t+2\pi).$$

Пусть φ удовлетворяет сформулированным выше условиям на f. Тогда классическое решение задачи (3) существует, единственно и, кроме того, справедливо неравенство

$$\sup_{\overline{\mathscr{D}}} | z(x, t) | \leq \frac{1}{a} \sup_{\overline{\mathscr{D}}} | \varphi(x, t) |. \tag{4}$$

Для доказательства первого утверждения будем строить решение задачи (3) в виде ряда Фурье

$$z(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n(x) e^{int}, \tag{5}$$

коэффициенты которого определяются из системы

$$\mu^2 z_n'' = (in + a) z_n + \varphi_n(x), \tag{6}$$
$$z_n(0) = z_n(e) = 0,$$

где φ_n — коэффициенты Фурье-разложения $\varphi(x, t)$.

Пользуясь оценкой для функции Грина $G(x, \xi)$ задачи (6)

$$|G(x, \xi)| \leq \frac{C}{\sqrt{|n|}\,\mu} \exp\left(-\frac{\varkappa}{\sqrt{|n|}\,\mu} |x-\xi|\right),$$

где $C > 0$, $\varkappa > 0$ — постоянные, не зависящие от μ и n, можно получить неравенство

$$\sup_{[0,e]} |z_n(x) \leq \frac{C}{1+|n|} \sup_{[0,e]} |\varphi_n(x)|,$$

при помощи которого доказывается равномерная сходимость ряда (5) к некоторой периодической и непрерывной в $\overline{\mathscr{D}}$ функции $z(x, t)$.

Для частичной суммы $S_n(x, t)$ ряда (5) справедливо представление (Φ_n — частичная сумма Фурье-разложения для $\varphi(x, t)$, G — функция Грина для параболического оператора)

$$S_n(x, t) = \int_0^l G(t, 0, x, \xi) S_n(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(t, \tau, x, \xi) \Phi_n(\xi, \tau) d\xi\, d\tau. \tag{7}$$

Пользуясь свойствами $\varphi(x, t)$, можно в (7) совершить предельный переход, заменив S_n на z, откуда последует, что $z(x, t)$ является классическим решением задачи (3).

Что касается оценки (4), то ее можно получить, пользуясь принципом максимума. Единственность следует из (4).

Обращаясь теперь к исходной задаче (1), (2), можно доказать для нее существование классического решения методом последовательных приближений. При этом следует иметь в виду, что решение задачи (3) имеет производную по t, непрерывную в $\overline{\mathscr{D}}$.

Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) строится в виде суммы, регулярного ряда и двух пограничных рядов

$$y = \overline{y} + \Pi y + Qy. \tag{8}$$

Техника последовательного написания членов этих рядов хорошо известна из теории сингулярных возмущений (см., напр. [1]). Регулярные члены $\bar{y}_0\ \bar{y}_1, \ldots$, ряда $\bar{y}$ определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями, куда x входит как параметр. Члены рядов Πy и Qy, т. е. пограничные функции, удовлетворяют уравнению теплопроводности. Отметим, что оценки, характерные для погранфункций $|\Pi_k y| < C \exp(-\varkappa x/\mu$, $|Q_k y| < C \exp(-\varkappa(l-x)/\mu)$ удобно получать методом Фурье.

Справедливо характерное для теории сингулярных возмущений утверждение о том, что частичная сумма Y_n ряда (8) является асимптотическим приближением порядка $O(\mu^{n+1})$ к решению $y(x, t, \mu)$ задачи (1), (2), равномерным в $\bar{\mathscr{D}}$

$$\sup_{\bar{\mathscr{D}}} |y(x, t, \mu) - Y_n| < C\mu^{n+1}, \tag{9}$$

где $C = \text{const}$ не зависит от μ при достаточно малом μ.

2. Возможны обобщения: а. Результат можно распространить на случай, когда y есть вектор, а a — матрица с характеристическими числами λ, удовлетворяющими условию $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

б. Аналогичный результат можно получить при других граничных условиях, напр., при условиях второго рода (характерных для задач кинетики).

в. Допустимо большее число измерений независимого пространственного переменнного.

г. $a = a(x)$. Общая схема исследования сохраняется, если $a(x) > 0$ на $[0, l]$. Функции Грина не выписываются в явном виде, но нужные для оценок свойства их по-прежнему имеют место.

д. Ситуация существенно усложняется, если $a = a(x, t)$. Имеется замена переменных, которая приводит к уравнению с коэффициентом $a = a(x)$, не зависящим от t, но при этом появляются усложнения другого рода. Замена имеет вид (выписано для скалярного случая

$$y = \vartheta \exp(-\int_0^t a(x,\tau)d\tau + a(x)t, \quad \text{где} \quad a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(x, \tau)d\tau.$$

Уравнение для υ отличается от (1) тем, что справа появляется производная υ'. Хотя при ней имеется малый множитель μ^2, это приводит к усложнениям при построении последовательных приближений и нужно иначе выбирать пространство, которому принадлежат последовательные приближения. В случае, когда y — вектор, замена осуществляется через характеристические показатели матрицы, сопряженной $a(x, t)$.

3. Условие $a > 0$ (или $\operatorname{Re}\lambda >$ для векторного случая) было существенно при получении всех описанных результатов. Однако в практике нередко встречаются так называемые критические случаи, когда эти условия не выполнены [2].

Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} \mu^2 y'' = \dot{y} + \mu^2 F(y, x, t) + f(x, t), \\ y(0, t) = y(l, t) = 0; \quad y(x, t) = y(x, t+2\pi). \end{gathered} \tag{10}$$

В этом случае уже и самый алгоритм существенно изменяется по сравнению с описанным выше.

Будем искать формальное решение задачи (10) по-прежнему в виде (8). Для определения $\bar{y}_0$ имеем уравнение $\dot{\bar{y}}_0 = f(x, t)$, откуда

$$\bar{y}_0 = A_0(x) + \int_0^t f(x, t)dt. \tag{11}$$

Требование 2π-периодичности приводит к ограничению на f:

(12) $$\int_0^{2\pi} f(x, t)dt = 0.$$

Функция $A_0(x)$ пока остается неопределенной. Чтобы определить $A_0(x)$, надо написать уравнение относительно $\bar{y}_2$, которое A_0 войдет в правую часть. Условие на эту правую часть, аналогичное (12), приводит к уравнению

(13) $$A_0'' + \Phi(A_0, x) = 0,$$

где Φ известная функция. Граничные условия для (13) получаются из рассмотрения $\Pi_0 y$ и $Q_0 y$:

(14) $$A_0(0) = A_0^0, \ A_0(l) = A_0^l.$$

Точно так же в каждом $\bar{y}_i$ возникает неопределенная величина $A_i(x)$, которая, начиная с $i = 2(A_1 = 0, \ \bar{y}_1 = 0)$ может быть найдена из линейного уравнения, представляющего собой уравнение в вариациях для (13).

Уравнение (13) само по себе достаточно сложно. Поэтому естественно ввести в (10) еще один малый параметр ε, наличе которого облегчило бы исследования уравнения (13). Если ввести ε^2 дополнительным множителем перед F, то уравнения для A_i будут регулярно возмущенными по ε. Кроме того, наличие ε^2 перед F помогает получить оценку остаточного члена асимптотики по μ, которая в этом случае проходит подобно тому как для некритического случая.

Все выглядит иначе, если дополнительный множитель ε^2 ввести перед y''. Уравнение (13) будет тогда сингулярно возмущенным:

(15) $$\varepsilon^2 A_0'' + \Phi(A_0, x) = 0.$$

Краевая задача (15), (14) может иметь решение со внутренним переходным слоем. Этот внутренний слой представляет собой либо зону быстрого перехода решения из окрестности одного условно устойчивого корня уравнения $\Phi(A_0, x) = 0$ в окрестность другого условно устойчивого корня (на фазовой плоскости этим корням отвечают два седла, соединенные сепаратрисой — т. наз. „ячейка"), либо быстрое удаление решения от корня на определенное расстояние и опять-таки быстрое возвращение в его окрестность — решение „пичкового" типа (на фазовой плоскости имеет место „петля" сепаратрисы). Оценку остаточного члена удается провести лишь при некоторых дополнительных предположениях.

В векторном случае критическая ситуация возникает, когда характеристические числа матрицы a чисто мнимые. Описанный выше алгоритм построения асимптотики распространяется с соответствующими видоизменениями и на этот случай. Примером системы такого рода является система

(16) $$\mu^2 z'' = \dot{z} - y \ \ \mu^2 y'' = \dot{y} + z - \mu^2(1 - z^2)y - f(x, t),$$

встречающаяся в биологической кинетике. При отсутствии диффузии, т. е. членов с z'', y'', система переходит в обычное уравнение Ван-дер Поля, хорошо известное в теории нелинейных колебаний.

Представляет интерес критический случай в отсутствии вынуждающей силы ($f = 0$), т. е. автономный случай. С. В. Дворяниновым [3] рассмотрена система (16) при $f = 0$. Здесь период решения заранее не известен и делается дополнительная замена независимого переменного $t = (1 + g_1\mu^2 + \cdots)\tau$, $g_i = \mathrm{const}$. Ищется 2π-периодическое решение относительно τ в виде разложения по степеням μ^2 (без погранслоя)

(17) $$y = y_0 + \mu^2 y_1 + \cdots, \ \ z = z_0 + \mu^2 z_1 + \cdots$$

Величины $g_1, g_2, \ldots$, определяются вместе с $z_0, y_0; z_1, y_1; \ldots$ в процессе построения разложения. Для z_0, y_0 имеем

$$z_0 = a_0 \cos\tau + b_0 \sin\tau, \quad y_0 = -a_0 \sin\tau + b_0 \cos\tau, \tag{18}$$

где a_0, b_0 пока не определенные функции x. Условия разрешимости уравнений следующего приближения дают $g_1=0$, $b_0=0$, а для a_0 получается задача

$$a_0'' = \frac{1}{8} a_0(4-a_0^2), \quad a_0(0)=a_0(l)=0. \tag{19}$$

При получении этих соотношений использованы краевые условия $y(0, t)=y(l, t)=z(0, t)=z(l, t)=0$, а также дополнительное условие $y(x^*, t)=0$, где $x^* \in (0, l)$ некоторая фиксированная точка. Это условие является естественным обобщением дополнительного условия, употребляющегося при рассмотрении автономных случаев в обыкновенных дифференциальных уравнениях.

Задача (16), если ввести, как и выше, дополнительный параметр ε^2 при a_0'' (ср. (15)), имеет решение $a_0 \to 2$ при $x \in (0, l)$ и симметричное ему решение $a_0 \to -2$, каждое с пограничным слоем при $x=0$ и $x=l$. Но могут быть также решения с одним или несколькими внутренними переходными слоями.

С. В. Дворяниновым построены и дальнейшие члены разложения (17), частичная сумма которого удовлетворяет исходному уравнению (16) с невязкой порядка $O(\mu^{n+1})$.

В заключение заметим, что подобного рода задачи с периодическими условиями можно теми же методами исследовать для уравнений других типов (эллиптических, гиперболических).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
2. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М., 1978.
3. С. В. Дворянинов. О периодическом решении одной автономной сингулярно возмущенной параболической системы. *Диф. уравн.*, 16, 1980, № 9, 1617—1622.

МГУ, Физический факультет
Кафедра математики
117234 Москва, СССР

Поступила 20. 11. 1985