Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РАЗНОСТНОЕ ОТНОШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. ИЛИЕВ

Обозначим через S класс функций

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots; \tag{S}$$

регулярных и однолистных в единичном круге $\mathrm{D}: |z|<1$.

Пусть $L(z_1, z_2)$ — кривая $z=z(s)$, $0\leqq s\leqq \bar{s}$, $z_1=z(0)$, $z_2=z(\bar{s})$, $|z_1|<|z_2|$, для которой $z'(s)$ и $r'(s)=|z(s)|'$ существуют и являются непрерывными за исключением конечного числа значений s. Параметр s означает длину дуги.

Через $\mathscr{L}(z_1, z_2, f)$ обозначим образ $L(z_1, z_2)$ посредством $f(z)\in S$. $\bar{L}(z_1, z_2)$ и $\bar{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)$ означают соответственно длины $L(z_1, z_2)$ и $\mathscr{L}(z_1, z_2, f)$.

Теорема I. *Если $f(z)\in S$ и $|z_1|<|z_2|<1$, то*

$$\frac{1-|z_1||z_2|}{(1+|z_1|)^2(1+|z_2|)^2}\leqq\frac{\bar{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)}{\bar{L}(z_1, z_2)}\leqq\frac{1-|z_1||z_2|}{(1-|z_1|)^2(1-|z_2|)^2}, \tag{1}$$

где верхняя оценка верна, если $r'(s)\geqq 0$.

При $|z|\leqq r<1$ получаем следующую теорему.

Теорема I*. *Если $f(z)\in S$ и $|z_1|<|z_2|\leqq r<1$, то*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leqq\frac{\bar{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)}{\bar{L}(z_1, z_2)}\leqq\frac{(1+r)}{(1-r)^3}, \tag{1*}$$

где верхняя оценка верна, если $r'(s)\geqq 0$.

Как следствие получаем:

Теорема $\bar{\mathrm{I}}$. *Если $f(z)\in S$ и $|z_1|<|z_2|\leqq r<1$, то*

$$\frac{1-|z_1||z_2|}{(1+|z_1|)^2(1+|z_2|)^2}\leqq\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|\leqq\frac{1-|z_1||z_2|}{(1-|z_1|)^2(1-|z_2|)^2}, \tag{2}$$

где левое неравенство верно, если отрезок, соединяющий точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$, целиком лежит в образе $f(\mathrm{D})$ единичного круга D посредством $f(z)$, а правое неравенство выполнено, если $|z|$ только возрастает или только убывает на отрезке, соединяющем z_1 с z_2.

При тех же условиях выполнены неравенства

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leqq\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|\leqq\frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{2*}$$

Эти теоремы содержат (обобщают) классическую теорему Кёбе [1]:

Теорема К. *Если $f(z)\in S$ и $|z|\leqq r<1$, то*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leqq|f'(z)|\leqq\frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{3*}$$

Оценки в (3) достигаются функцией $f(z)=z/(1-z)^2$.*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 18—20.

Из (2) при $z_1=0$, $z_2=z$ получаем теорему Бибербаха:

Теорема В. *Если* $f(z)\in S$ *и* $|z|\leqq r<1$, *то*

(4) $$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqq|f(z)|\leqq\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

и

(4*) $$\frac{1}{(1+r)^2}\leqq\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqq\frac{1}{(1-r)^2}.$$

Оценки в (4) *и* (4*) *достигаются функцией* $f(z)=z/(1-z)^2$.

При доказательстве теорем I и I* используются теорема Кёбе и подход интегрирования Бибербаха [2].

Доказательство теорем I и I*.

Пусть $L(z_1, z_2)$ — кривая $z=z(s)$, $0\leqq s\leqq\bar{s}$ в единичном круге D, $z(0)=z_1$, $z(\bar{s})=z_2$, соединяющая точки z_1 и z_2, $|z_1|<|z_2|$. По предположению $z'(s)$ и $r'(s)=|z(s)|'$, $0\leqq s\leqq\bar{s}$ существуют и непрерывные, за исключением конечного числа значений s. Здесь s — длина дуги кривой.

$\mathscr{L}(z_1, z_2, f)$ — изображение $L(z_1, z_2)$ посредством $f(z)\in S$.

Длины этих дуг обозначим соответственно через $\bar{L}(z_1, z_2)$ и $\bar{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)$.

Так как $L(z_1, z_2)$ — спрямляема, то существует целое положительное число $p\geqq 1$, так что $(p-1)(|z_2|-|z_1|)<\bar{L}(z_1, z)\leqq p(|z_2|-|z_1|)$.

Тогда

$$\bar{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)=\int_0^{\bar{s}}|f'(z)||z'(s)|\,ds=\int_0^{\bar{s}}|f'(z)||dz|.$$

А. Пусть $\varphi(z)=\varphi(|z|)=\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\cdot$ Согласно теореме Кёбе

$$\int_0^{\bar{s}}|f'(z)||dz|\leqq\int_0^{\bar{s}}\varphi(|z|)|dz|.$$

Пусть $\zeta_1=z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{pn}, z_2$ являются $pn+1$ точкой на $L(z_1, z_2)$, которые разделяют её дугу на pn равных частей. Тогда

$$\int_0^{\bar{s}}\varphi(|z|)|dz|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{pn}\varphi(|\zeta_k|)|\zeta_{k+1}-\zeta_k|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{pn}\varphi(|\zeta_k|)\frac{\bar{L}(z_1, z_2)}{pn}.$$

Предположим, что $r'(s)=|z(s)|'\geqq 0$. Тогда числа $|\zeta_1|=|z_1|\leqq|\zeta_2|\leqq\cdots\leqq|\zeta_{pn}|\leqq|\zeta_{pn+1}|=|z_2|$ и находятся в интервале $[|z_1|, |z_2|]$ длиной $|z_2|-|z_1|>0$.

Разделим интервал $[|z_1|, |z_2|]$ на pn частей, каждая из которых равна $\frac{|z_2|-|z_1|}{pn}$.

Так как $|\zeta_{k+1}-\zeta_k|=\frac{\bar{L}(z_1, z_2)}{pn}$ не более p раз больше $(|z_2|-|z_1|)/pn$, то в каждом из интервалов, состоящем из p последовательных интервалов длины $(|z_2|-|z_1|)/pn$, находится по крайней мере одно из чисел $|\zeta_k|$. Теперь разделим интервал $[|z_1|, |z_2|]$ на n равных интервалов. Каждый из них является группой, состоящейся из p интервалов длины $(|z_2|-|z_1|)/pn$. Пронумеруем последовательно эти n групп. Обозначим через $|\zeta_\nu^*|$ то из чисел $|\zeta_k|$, находящихся в ν-той группе, каждая из которых состоит из p последовательных интервалов длиной $(|z_2|-|z_1|)/pn$, для которого $\varphi(|\zeta_k|)$ наибольшее.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{pn}\varphi(|\zeta_k|)\frac{\overline{L}(z_1, z_2)}{pn}=\frac{\overline{L}(z_1, z_2)}{|z_2|-|z_1|}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{pn}\varphi(|\zeta_k|)\frac{|z_2|-|z_1|}{pn}$$

$$\leqq\frac{\overline{L}(z_1, z_2)}{|z_2|-|z_1|}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(|\zeta_\nu^*|)\frac{|z_2-|z_1|}{n}=\frac{\overline{L}(z_1, z_2)}{|z_2|-|z_1|}\int_0^{\overline{s}}\varphi(|z|)d|z|,$$

т. е.

$$\overline{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)\leqq\frac{\overline{L}(z_1, z_2)}{|z_2|-|z_1|}\int_{|z_1|}^{|z_2|}\frac{|z|d|z|}{(1-|z|)^2}=\overline{L}(z_1, z_2)\frac{1-|z_1||z_2|}{(1-|z_1|)^2(1-|z_2|)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)}{\overline{L}(z_1, z_2)}\leqq\frac{1-|z_1||z_2|}{(1-|z_1|)^2(1-|z_2|)^2}\leqq\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

при условии, что $r'(s)\geqq 0$ в интервале от $|z_1|$ до $|z_2|$ и $|z_1|<|z_2|\leqq r<1$.

Б. Пусть $\psi(z)=\psi(|z|)=\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}$. Согласно теореме Кёбе

$$\int_0^{\overline{s}}|f'(z)||dz|\geqq\int_0^{\overline{s}}\psi(|z|)|dz|.$$

Предположим сначала, что $r'(s)\geqq 0$ в интервале $|z_1|\leqq s\leqq|z_2|$. Повторяя рассуждения и обозначения пункта А, обозначим через $|\zeta_\nu^*|$ то из чисел $|\zeta_k|$, находящихся в ν-той группе, каждая из которых состоит из p последовательных интервалов длиной $(|z_2|-|z_1|)/pn$, для которого $\psi(|\zeta_k|)$ наименьшее. Тогда, аналогично предыдущему,

$$\overline{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)\geqq\frac{\overline{L}(z_1, z_2)}{|z_2|-|z_1|}\int_{|z_1|}^{|z_2|}\frac{|z|d|z|}{(1+|z|)^2}=\overline{L}(z_1, z_2)\frac{1-|z_1||z_2|}{(1+|z_1|)^2(1+|z_2|)^2},$$

т. е.

$$\frac{\overline{\mathscr{L}}(z_1, z_2, f)}{\overline{L}(z_1, z_2)}\geqq\frac{1-|z_1||z_2|}{(1+|z_1|)^2(1+|z_2|)^2}\geqq\frac{1-r}{(1+r)^3},$$

где $|z_1|<|z_2|\leqq r<1$.

В этом случае легко можем освободиться от условия $r'(s)\geqq 0$. Именно, можем представить $L=L(z_1, z_2)$ в виде $L(z_1, z_2)=L_1(z_1, z_2)+L_2(z)$, где $L_1=L_1(z_1, z_2)$ — кривая $z=z(s)$ в D, соединяющая z_1 с z_2 и для которой $r'(s)\geqq 0$, а $L_2=L_2(z)$ — сумма дуг. Тогда

$$(L)\int_{|z_1|}^{|z_2|}\psi(|z|)d|z|=(L_1)\int_{|z_1|}^{|z_2|}\psi(|z|)d|z|+(L_2)\int\psi(|z|)d|z|\geqq(L_1)\int_{|z_1|}^{|z_2|}\psi(|z|)d|z|.$$

Этим теоремы I и I* доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Koebe. *Nachr. Ges.Gött.*, 1907, 197—200.
2. L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2 Aufl., Leipzig, 1931.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 15. 9. 1986