Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТЕОРЕМА ДЕ БРАНЖА ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ

КАРЛ Х. ФИТЦДЖЕРАЛД, Х. ПОМЕРЕНКЕ

Пусть S обозначает класс функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

которые являются аналитическими и однолистными в единичном круге D. Луи де Бранж доказал недавно следующий замечательный результат, из которого вытекает гипотеза Бибербаха.

Теорема де Бранжа. *Допустим, что $f\in S$, и запишем*

$$\log\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (z\in \mathsf{D}). \tag{1.2}$$

Тогда, для $n=1, 2, \ldots$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)\,|c_k|^2 \leqq 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k}. \tag{1.3}$$

Это неравенство сформулировано в виде гипотезы И. М. Милином [8] в 1971 г. Степенное неравенство Лебедева — Милина [7], [8], (см., например [11], лемма 3.3) показывает, что из (1.3) вытекает гипотеза, предложенная М. С. Робертсоном [12] в 1936 г.:

Если f является нечетной функцией, принадлежащей S, то

$$\sum_{i=1}^{m} |a_{2j-1}|^2 \leqq m \quad (m=1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Применяя (1.4) к нечетной функции $\sqrt{f(z^2)}$, $f(z)\in S$, получаем гипотезу Бибербаха для $f(z)\in S$

$$|a_n|\leqq n \quad (n=2, 3, \ldots). \tag{1.5}$$

Результат де Бранжа опубликован в [3], а также и во втором издании его книги, посвященной квадратично-суммируемым степенным рядам.

Робертсон [13] (см., например [11], следствие 2.2) показал, что неравенство (1.4), доказанное де Бранжем, дает следующее

Следствие. *Если $f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$ удовлетворяет*

$$|f(z)|\leqq|g(\varphi(z))|, \quad |\varphi(z)|\leqq|z| \ (z\in \mathsf{D}), \tag{1.6}$$

где $g\in S$, то выполняется (1.5).

Тем самым де Бранж доказывает гипотезу Бибербаха в ее самом общем виде. Наши сведения о доказательстве де Бранжа базируются в основном на статье

И. Милиной [9], которая, по-видимому, представляет лекцию, прочитанную в Ленинграде весной 1984 г. Эту статью нам перевел С. Е. Варшавский.

Имея в виду большие усилия, приложенные для доказательства гипотезы Бибербаха, доказательство де Бранжа выглядит удивительно кратким. Он выводит свою теорему, доказывая один более общий результат для ограниченных однолистных функций. Де Бранж использует обыкновенное дифференциальное уравнение Левнера, описывающее сжимаемый поток в единичном круге.

Мы изложим одну еще более краткую модификацию доказательства де Бранжа: разница между его и нашим доказательством является чисто технической. Мы используем линейное дифференциальное уравнение в частных производных Левнера, описывающее расширяющийся поток в плоскости. Это позволяет нам обобщить главный первый случай в доказательстве де Бранжа, избегая рассуждения, использующие аппроксимирование. Мы можем рассмотреть и случай равенства. Мы узнали, что де Бранж располагает другим вариантом доказательства, в котором он тоже использует уравнения.

Теорема. *Если* $f \in S$ *и если*

$$f(z) \neq \frac{z}{(1-xz)^2}, \quad |x| = 1, \tag{1.7}$$

то в (1.3) *имеет место строгое неравенство.*

Отсюда, например, следует, что для $f \in S$ имеем

$$|a_n| < n \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

когда выполняется (1.7), т. е. когда f не является вращением функции Кебе.

2. Специальная система функции де Бранжа. В своем доказательстве де Бранж использует дифференциальное уравнение Левнера и одно остроумное построение системы специальных функций. Немного модифицируя, мы изложим схему построения де Бранжа.

Пусть $n = 1, 2, \ldots$ фиксировано. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ определим

$$\tau_k(t) = k \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+1)_\nu (2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\,\nu!\,(n-k-\nu)!} e^{-\nu t - k}, \tag{2.1}$$

где $(a)_\nu = a(a+1)\ldots(a+\nu-1)$. Пусть $\tau_{n+1}(t) \equiv 0$. Можно проверить, что

$$\tau_k(t) - \tau_{k+1}(t) = -\frac{\tau_k'(t)}{k} - \frac{\tau_{k+1}'(t)}{k+1}. \tag{2.2}$$

Пусть $P_j^{(\alpha,\beta)}$ обозначают полиномы Якоби (см., например, [15]). Нетрудно вывести [1, с. 717] из (2.1), что

$$\tau_k'(t) = -ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(1-2e^{-t}). \tag{2.3}$$

Так как $P_j^{(\alpha,0)}(-1) = (-1)^j$ [15, с. 59], то $\tau_k'(0) = -k$ при $n-k$ — четное и $\tau_k'(0) = 0$ при $n-k$ — нечетное. Следовательно, из (2.2) вытекает $\tau_k(0) - \tau_{k+1}(0) = 1$ и при помощи индукции получается

$$\tau_k(0) = n + 1 - k. \tag{2.4}$$

Из (2.3) при помощи результата Р. Аски и Г. Гаспера ([1], теорема 3) следует, что

$$\tau_k'(t) < 0 \quad \text{для} \quad 0 < t < +\infty. \tag{2.5}$$

3. Доказательство теоремы де Бранжа. В 1923 г. К. Левнер [6] (см., например, [5], глава 3) доказывает следующий результат:

Если f — такая функция из S, что

$$f(\mathrm{D})=\mathrm{C}\setminus J, \quad J \text{ — жорданова дуга до } \infty, \tag{3.1}$$

то существуют такие однолистные функции

$$f(z, t)=e^t z+\cdots \ (z\in \mathrm{D}), \quad 0\leq t<\infty, \quad f(z, 0)=f(z) \tag{3.2}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)=-\frac{1+\varkappa(t)z}{1-\varkappa(t)z}\, z\, \frac{\partial}{\partial z}\, f(z,\ t), \quad |\varkappa(t)|=1, \tag{3.3}$$

где $\varkappa(t)$ $(0\leq t<\infty)$ — непрерывная функция. Функции f, удовлетворяющие (3.1), образуют плотное в S множество относительно локально равномерной сходимости в D. Поэтому, достаточно доказать (1.3) для этих функций.

Для $0\leq t<\infty$ запишем

$$\log \frac{f(z,\ t)}{e^t z}=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\, z^k \ \ (z\in \mathrm{D}). \tag{3.4}$$

Отсюда, в силу (1.2), имеем $c_k(0)=c_k$. Из (3.3) вытекает, что

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)z^k=\frac{1+\varkappa(t)z}{1-\varkappa(t)z}\, [z\, \frac{\partial}{\partial z} f(z,\ t)]/f(z,\ t)$$

$$=(1+2\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa(t)^k z^k)\,(1+\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(t)\, z^k). \tag{3.5}$$

Обозначая $b_0(t)=0$ и

$$b_k(t)=\sum_{j=1}^{k} jc_j(t)\varkappa(t)^{-j}, \tag{3.6}$$

из (3.5) получаем, что

$$c_k'(t)=2\,\varkappa(t)^k b_k(t)+2\,\varkappa(t)^k-kc_k(t). \tag{3.7}$$

Пусть $n=1,\ 2,\ \ldots,$ фиксировано. Рассмотрим

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n} (k\,|\,c_k(t)\,|^2-\frac{4}{k})\,\tau_k(t) \quad (0\leq t<\infty). \tag{3.8}$$

Теперь пропустим переменную t. Так как $k\bar{c}_k\varkappa^k=\bar{b}_k-\bar{b}_{k-1}$, из (3.6), (3.8) и (3.7) получаем, что

$$\varphi'=\sum_{k=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,[(\bar{b}_k-\bar{b}_{k-1})\,(2b_k+2)-|\,b_k-b_{k-1}\,|^2]\tau_k$$

$$+4\sum_{k=1}^{n}(|\,b_k-b_{k-1}\,|^2-1)\,\frac{\dot{\tau}_k}{k}.$$

Раскроем средние скобки и сделаем частичное суммирование. Так как $\tau_{n+1}=0$, получаем

$$\varphi' = \sum_{k=1}^{n} (2\ b_k|^2 + 4\operatorname{Re} b_k)(\tau_k - \tau_{k+1}) + 4\sum_{k=1}^{n} (|b_k - b_{k-1}|^2 - 1)\frac{\tau_k'}{k}. \tag{3.9}$$

Тогда из (2.2) следует, что первая сумма в (3.9) равна

$$\sum_{k=1}^{n} (2|b_k|^2 + 4\operatorname{Re} b_k)\left(\frac{\tau_k'}{k} + \frac{\tau_{k+1}'}{k+1}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (2|b_k|^2 + 4\operatorname{Re} b_k + 2|b_{k-1}|^2 + 4\operatorname{Re} b_{k-1})\frac{\tau_k'}{k}.$$

Таким образом из (3.9) видно, что

$$\varphi'(t) = -2\sum_{k=1}^{n} |b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2|^2 \frac{\tau_k'(t)}{k}, \tag{3.10}$$

а из (2.5) вытекает, что

$$\varphi'(t) \geqq 0, \quad 0 \leqq t < +\infty. \tag{3.11}$$

Так как $\tau_k(0) = n+1-k$ в силу (2.4) и так как $\tau_k(t) \to 0\ (t \to +0)$ в силу (2.1) то из (3.8) и (3.11) выводим

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k|c_k(0)|^2 - \frac{4}{k}\right)(n+1-k) = \varphi(0) \leqq 0. \tag{3.12}$$

Это доказывает (1.3) для функции с (3.1), а, следовательно, и в общем случае

4. Случай равенства. Теперь мы допустим, что в (1.3) имеет место знак равенства для некоторого $n = 1, 2, \ldots$. Тогда f — экстремальная функция экстремальной задачи конечного типа. Следовательно, $C \setminus f(D)$ является объединением конечного числа жордановых кривых, как показал М. Шифер [14] (см., например, [11], теорема 7.5).

Поэтому (см., например, [10], теорема 2) существуют функции, такие, как в (3.2) и (3.3), где $f(z, t)$ — абсолютно непрерывная в $0 \leqq t < \infty$, а $\varkappa(t)$ — измеримая. В дальнейшем доказательство проводится точно таким же образом, как в п. 3, а так как в (1.3) имеет место равенство, из (3.12), (3.11) и (3.10) видно, что

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2|^2 \frac{\tau_k'(t)}{k} = 0$$

для почти всех t. Так как $\tau_k' < 0$ при $0 < t < \infty$ в силу (2.5), выводим

$$b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2 = 0\ (k = 1, \ldots, n).$$

Так как $b_0(t) = 0$, то отсюда следует, что $b_1(t) = -2$ и $|c_1(t)| = |b_1(t)| = 2$ в силу (3.6). Так как $c_1(t)$ является непрерывной функцией, из (1.1) и (1.2) получаем, что

$$|a_2| = |c_1| = \lim_{t \to 0} |c_1(t)| = 2,$$

и как доказал Л. Бибербах [2] (см., например, [11], теорема 1.5) отсюда следует, что f является вращением функции Кебе.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Askey, G. Gasper. Positive Jacobi polynomial sums, II. *Amer. J. Math.*, **98**, 1976, 709—737.
2. L. Bieberbach. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.*, 1916, 940—955.
3. L. de Branges A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, **154**, 1985, 137—152.
4. L. de Branges. Square summable power series, second edition. (To appear.)
5. P L. Duren. Univalent functions. Berlin, 1983.
6. K. Löwner. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreise. *Math. Ann.*, **89**, 1923, 103—121.
7. I. M. Milin. On the coefficients of univalent functions. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **176**, 1967, 1015—1018=*Soviet Doklady*, **8**, 1967, 1255—1258.
8. I. M. Milin. Univalent functions and orthogonal systems (Russian), Moscow, 1971. (Engl. transl.: Amer. Math. Soc., Providence R. I. 1977).
9. I. M. Milin. L. de Brange's proof of the Bieberbach conjecture. (Russian), Manuscript, June, 1984.
10. Ch Pomerenke. On the Loewner differential equation. *Michigan Math. J.*, **13**, 1966, 435—443.
11. Ch. Pomerenke. Univalent functions. Göttingen, 1975.
12. M. S. Robertson. A remark on the odd schlicht functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42**, 1956, 366—370.
13. M. S. Robertson. Quasi-subordination and coefficient conjectures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, 1970, 1—9.
14. M. Schiffer. Variation of the Green function and theory of the p-valued functions. *Amer. J. Math.*, **92**, 1943, 341—360.
15. G. Szegö. Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **23**, 1959.

Dept. of Mathematics
University of California

La Jolla 92093

Fachbereich Mathematik
Technische Universität

D-1000, Berlin 12

Поступила 15. 9. 1986