Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

ХО ШИ ХЫНГ

В работе рассматривается вопрос о существовании собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля для одного класса нелинейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами в органиченных областях.

1. Вспомогательные результаты. Пусть в ограниченной области $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ $(\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset)$ рассматривается задача

$$(1.1)\qquad -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)+a_0(x)u=\lambda f(x,u)\quad\text{в }\Omega,\ u\ \Big|_{\Gamma_1}=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial N}+\alpha u\Big|_{\Gamma_2}=0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial N}(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cos(\nu(x),x_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$, а $\nu(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$ и $\lambda\in\mathrm{R}$ — параметр.

Предполагаем, что следующие условия (A1) и (A2) выполняются.

(A1) Функции a_{ij}, $i,j=1,2,\dots,n$ и a_0 ограничены и измеримы в Ω и удовлетворяют естественному условию $a_{ij}(x)=a_{ij}(x)$, $i,j=1,2,\dots,n$, $x\in\Omega$. Кроме того, существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что

$$C_1|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq C_2|\xi|^2,\quad\forall x\in\Omega,\quad\forall\xi\in\mathrm{R}^n,$$

$$\alpha(x)\in L_\infty(\Gamma_2)\ \text{и}\ \alpha(x)\geq 0,\quad\forall x\in\Gamma_2.$$

(A2) Если $\Gamma_2=\emptyset$, то $a_0(x)\geq 0$, $\forall x\in\Omega$, а если $\Gamma_2\neq\emptyset$, то существует положительная константа C_3, такая, что $a_0(x)\geq C_3$, $x\in\Omega$.

Обозначим через $\Gamma_\rho(\Omega\times\mathrm{R})$ множество всех функций f, удовлетворяющих условиям: f — непрерывная функция $(x,t)\in\Omega\times\mathrm{R}$, $f(x,0)=0$, $x\in\Omega$, $f\neq 0$ в $\Omega\times\mathrm{R}$ и $|f(x,t)|\leq C(1+|t|^\rho)$, $x\in\Omega$, $t\in\mathrm{R}$, где $C=C(f)$. Предполагаем, что функция f в (1.1) принадлежит $F_\rho(\Omega\times\mathrm{R})$, где $0\leq\rho<+\infty$ при $n\leq 2$ и $0\leq\rho<(n+2)/(n-2)$ при $n>2$. Обозначим через W замкнутую оболочку в $W_2^1(\Omega)$ линейного пространства всех функций $u\in C^\infty(\bar\Omega)$, аннулирующихся в окрестности Γ_1.

Определение 1.1. *Функция u называется обобщенным решением задачи (1.1), если $u\in W$, и удовлетворяет тождеству*

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\int_\Omega a_0(x)uv\,dx+\int_{\Gamma_2}\alpha(x)uv\,d\sigma=\lambda\int_\Omega f(x,u)v\,dx,\ \forall\vartheta\in W,$$

где $u|\Gamma_2$ и $\vartheta|\Gamma_2$ являются следами u и ϑ на Γ_2 соответственно. Число λ_0, для которого задача (1.1) имеет ненулевое обобщенное решение u_0, называется собственным числом задачи (1.1), а функция u_0 — ее обобщенной собственной

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 107—115.

функцией, соответствующей собственному числу λ_0. Множество всех собственных чисел задачи (1.1) называется ее спектром.

Пусть H — линейное пространство W с нормой

$$\| u \| H = \{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0(x) u^2 dx \int_{\Gamma_2} \alpha(x) u^2 d\sigma\}^{1/2}.$$

Из условий (A1), (A2) и из теоремы о следах (в случае, когда $\Gamma_1 = \partial\Omega$ — из неравенства Пуанкаре) заключаем, что эта норма эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W^1_2(\Omega)}$. Итак, H превращается в гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, \vartheta)_H = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0(x) uv dx + \int_{\Gamma_2} \alpha(x) uv d\sigma, \quad \forall u, v \in H.$$

Лемма 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Тогда, если $n > mp$, то вложение $W^m_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно для всех q, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq q < np/(n-mp)$. Если $n \leq mp$, то вложение $W^m_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно для всех q, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq q < +\infty$.*

Эта лемма сформулирована в [4] и легко доказывается с помощью теоремы вложения Соболева — Кондрашова.

Лемма 1.3. *Пусть f — реальная функция, определенная в $\Omega \times \mathbb{R}$, где Ω измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что непрерывна по t почти при всех $x \in \Omega$ и измерима по x при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть для каждого $u \in L_p(\Omega)$ $(p \geq 1)$ функция $f(x, u) \in L_q(\Omega)$ $(q \geq 1)$. Тогда оператор $f(x, u): L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$ непрерывен.*

Доказательство этой леммы можно найти в [1].

Для каждого фиксированного $u \in L_2(\Omega)$ линейный функционал $\vartheta \to \int_\Omega uv dx$ непрерывен в H, поскольку $|\int_\Omega uv dx| \leq \| u \|_{L_2(\Omega)} \| \vartheta \|_{L_2(\Omega)} \leq C_4 \| u \|_{L_2(\Omega)} \| \vartheta \|_H$ $(C_4 = \mathrm{const} > 0)$. Согласно теореме Рисса, существует единственный элемент $U(u) \in H$, удовлетворяющий равенству

$$\int_\Omega uv dx = (U(u), \vartheta)_{\mathrm{H}}, \quad \forall u \in L_2(\Omega), \ \forall \vartheta \in H.$$

Лемма 1.4. *Пусть $1 \leq \rho < +\infty$ при $u \leq 2$ и $1 \leq \rho < (n+2)/(n-2)$ при $n > 2$. Тогда из $u_m \to u_0$ слабо в H следует* что *$u_m \to u_0$ сильно в $L_{1+\rho}(\Omega)$.*

Доказательство. Из $u_m \to u_0$ слабо в H следует, что последовательность $\{u_m\}_{m=1}$ ограничена в H, поэтому она ограничена и в $W^1_2(\Omega)$. Из неравенств $2 \leq 1+\rho < +\infty$ при $n \leq 2$ и $2 \leq 1+\rho < 2n/n-2$ при $n > 2$ и из леммы 1.2 заключаем, что существует подпоследовательность $\{u_{m_i}\}_{1=i}^{\infty}$, для которой $u_{m_i} \to u$ сильно в $L_{1+\rho}(\Omega)$ при подходящем $\bar{u} \in L_{1+\rho(\Omega)}$. Очевидно $u_{m_i} \to \bar{u}$ сильно в $L_2(\Omega)$, поскольку $1+\rho \geq 2$ и область Ω ограничена. Докажем, что $\bar{u} = u_0$. Действительно, с помощью оператора U находим

$$\int_\Omega u_{m_i} \vartheta dx = (U(\vartheta), u_{n_{ii}})_H, \quad \forall \vartheta \in L_2(\Omega),$$

следовательно,

$$\int_\Omega u_{m_i} \vartheta dx = \lim_{i \to \infty} \int_\Omega u_{m_i} \vartheta dx = \lim (U(\vartheta), m_i)_H = (U(\vartheta), u_0), \quad \forall \vartheta \in L_2(\Omega).$$

Из последнего равенства и из равенства $\int_\Omega \vartheta u_0 \, dx = (U(\vartheta), u_0)_H$ получаем $\int_\Omega \vartheta (\bar{u} - u_0) dx = 0$, $\forall \vartheta \in L_2(\Omega)^\Omega$, т. е. $\int_\Omega (\bar{u} - u_0)^2 dx = 0$. Этим доказано $\bar{u} = u_0$. Итак, установили, что если $u_m \to u_0$ слабо в H, то существует подпоследовательность $\{u_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $u_{m_i} \to u_0$ сильно в $L_{1+\rho}(\Omega)$. Из последнего утверждения легко вытекает, что $u_m \to u_0$ сильно в $L_{1+\rho}(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если $f \in F_\rho(\Omega \times R)$, то $f \in F_{\rho'}$ $(\Omega \times R)$ для всех $\rho' > \rho$.*

Доказательство. Для всех $x \in \Omega$, $|t| \leq 1$ имеем $|f(x, t) \leq C_5(1+|t|^\rho) \leq 2C_5$ $(1+|t|^\rho)$. С другой стороны, для всех $x \in \Omega$, $|t| \geq 1$ выполняется неравенство $|f(x, t)| \leq C_5(1+|t|^\rho) \leq C_5(1+|t|^{\rho'}) \leq 2C_5(1+|t|^{\rho'})$ $(C_5 = \mathrm{const} > 0)$. Итак, $f \in F_{\rho'}(\Omega \times R)$.

Согласно лемме 1.5, не нарушая общности, можем предполагать, что $1 \leq \rho < +\infty$ при $n \leq 2$, и $1 \leq \rho < (n+2)/(n-2)$ при $n > 2$. Если $f \in F_\rho(\Omega \times R)$ и $u \in L_{1+\rho}(\Omega)$, то легко видеть, что $f(x, u) \in L_{1+\rho(\Omega)}$. Следовательно, с помощью леммы 1.3 заключаем, что оператор $f(x, u): L_{1+\rho}(\Omega) \to L_{1+\rho/\rho}$ (Ω) непрерывен. Пусть $u \in H$. Тогда $u \in L_{1+\rho(\Omega)}$ и $f(x, u) \in L_{1+\rho/\rho\,(\Omega)}$. Для каждого фиксированного $u \in H$ линейный функционал $\vartheta \to \int_\Omega f(x, u)\, v dx$ непрерывен в H, поскольку $|\int_\Omega f(x, u)\, v dx| \leq \|f(x, u)\|_{L_{1+\rho/\rho(\Omega)}} \|\vartheta\|_{L_{1+\rho(\Omega)}} \leq C_6$ $\|f(x, u)\|_{L_{1+\rho/\rho(\Omega)}} \|\vartheta\|_H$ $(C_6 = \mathrm{const} > 0)$. Согласно теореме Рисса, существует единственный элемент $V(u) t H$, удовлетворяющий равенству

$$\int_\Omega f(x, u)\, \vartheta\, dx = (V(u), \vartheta)_H, \quad \forall\, u, \vartheta \in H. \tag{1.3}$$

Лемма 1.6. *Если $u_m \to u_0$ слабо в H, то $V(u_m) \to V(u_0)$ сильно в H.*

Доказательство. Применяя леммы 1.3 и 1.4, получаем

$$\begin{aligned}
\|V(u_m) - V(u_0)\|_H &= \sup\{(V(u_m) - V(u_0), \vartheta)_H, \quad \vartheta \in H, \|\vartheta\|_H \leq 1\} \\
&= \sup\{\int_\Omega (f(x, u_m) - f(x, u_0))\, \vartheta, \ \vartheta \in H, \ \|\vartheta\|_H \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|f(x, u_m) - f(x, u_0)\|_{L(1+\rho/\rho)(\Omega)} \|\vartheta\|_{L(1+\rho)(\Omega)}, \vartheta \in H, \ \|\vartheta\|_H \leq 1\} \\
&\leq C_7 \sup\{\|f(x, u_m) - f(x, u_0)\|_{L(1+\rho/\rho)(\Omega)} \|\vartheta\|_H, \ \vartheta \in H, \ \|\vartheta\|_H \leq 1\} \\
&\leq C_7 \|f(x, u_m) - f(x, u_0)\|_{L(1+\rho)/\rho(\Omega)} \xrightarrow{m \to \infty} 0,
\end{aligned}$$

где $C_7 = \mathrm{const} > 0$. Лемма доказана.

Как в [2] обозначим через

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\, ds, \quad x \in \Omega, \ t \in R, \tag{1.4}$$

$$N(u) = \int_\Omega F(x, u)\, dx, \quad u \in H. \tag{1.5}$$

Определение 1. 7. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ определяются оператор $A: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ и функционал g: $\varkappa \to R$.* Оператор А называется градиентом функционала g (grad $g = A$), *если* $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^1$ g $(u + \varepsilon$ $V) = A$ (u) $v)_{\mathscr{H}}$ *для каждой пары $u, v \in \mathscr{H}$. Предполагается, что* (grad g *существует, тогда функционал g называется равномерно дифференцируемым в шаре $B_r = \{u \in \mathscr{H}, \|u\|_{\mathscr{H}} < r\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что* $|g(u+v) - g(u) - ($grad $g(u), \vartheta)_{\mathscr{H}} \leq \varepsilon \|\vartheta\|_{\mathscr{H}}$ *для всех $u \in B_{r, \vartheta} \in B_\delta$.*

Лемма 1. 8. grad $N = V$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.7 [2].

Лемма 1.9. *Функционал N равномерно дифференцируем в шаре $B_r = \{u \in H, \|u\|_H < r\}$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.7 [3].

Лемма 1.10. *Функционал N слабо непрерывен, т. е. из $u_m \to u_0$ слабо в H следует $N(u_m) \to N(u_0)$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.8 [3].

Лемма 1.11. *Пусть $\lambda \in \mathrm{R}$ такое число, что* $\lim_{\|u\|_H \to \infty} \{1/2\ (u, u) - \lambda N(u)\} = +\infty$. *Если существует $u_0 \in H$, удовлетворяющее неравенству* $1/2\ (u_0, u_0) - \lambda N(u_0) < 0$, *то λ является собственным числом задачи (1.1).*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.9 [3].

Лемма 1.12. *Пусть $p(x, t) \in F_{1+\rho}(\Omega \times \mathrm{R})$ где $0 \leq \rho < +\infty$ при $n \leq 2$, и $0 \leq \rho < (n+2)(n-2)$ при $n > 2$. Если $\lim_{t \to 0} t^{-2} p(x, t) = 0$ равномерно по $x \in \Omega$, то*

$$\lim_{\|u\|_H \to 0} \{\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\} = 0.$$

Доказательство. Согласно лемме 1.5, не нарушая общности, можем предполагать, что $1 < \rho < +\infty$ при $n \leq 2$, и $1 < \rho < (n+2)/(n-2)$ при $n > 2$. Пусть $\varepsilon \leq 0$ — любое число. Существует $A = A(\varepsilon) > 0$, такое, что $|p(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} C_8^{-2} t^2$ для всех $x \in \Omega$, $|t| < A$, где C_8 такая положительная, что $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_8 \|u\|_H$ для всех $u \in H$. Итак, имеем

$$\left|\int_\Omega p(x, u)\, dx\right| \leq \int_{|u(x)| < A} |p(x, u)|\, dx + \int_{|u(x)| \geq A} |p(x, u)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} C_8^{-2} \int_{|u(x)| < A} u^2\, dx$$

$$+ C_9 \int_{|u(x_2)| \geq A} (1 + |u|)^{1+\rho}\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} C_8^{-2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_{10} \int_{|u(x)| \geq A} |u|^{1+\rho}\, dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_H^2 + C_{10} \|u\|_{L_{1+\rho}(\Omega)}^{1+\rho} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_H + C_{11} \|u\|_H^{1+\rho},$$

где $C_9 = \mathrm{const} > 0$, $C_{10} = C_{10}(A) > 0$, $C_{11} = C_{11}(A) > 0$. Из последнего неравенства получаем $\left|\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_{11} \|u\|_H^{\rho-1}$, следовательно, $\left|\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\right| < \varepsilon$ для всех $0 < \|u\|_H < (\frac{\varepsilon}{2} C_{11}^{-1})^{1/\rho-1}$. Таким образом лемма доказана.

Лемма 1.13. *Пусть $n(x, t) \in F_{1+\rho}(\Omega \times \mathrm{R})$, где $0 \leq \rho < +\infty$ при $n \leq 2$, и $0 \leq \rho < (n+2)/(n-2)$ при $n > 2$. Если $\lim_{t \to \pm\infty} t^{-2} p(x, t) = 0$ равномерно по $x \in \Omega$, то* $\lim_{\|u\|_H \to \infty} \{\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\} = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число. Существует такое $A = A(\varepsilon) > 0$, что $|p(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} C_8^{-2} t^2$ для всех $x \in \Omega$, $|t| > A$, где C_8 — положительная константа из доказательства леммы 1.11. Для каждого $u \in H$ имеем

$$\left|\int_\Omega p(x, u)\, dx\right| \leq \int_{|u(x)| \leq A} |p(x, u)|\, dx + \int_{|u|(x)| > A} |p(x, u)|\, dx \leq C_{12} \int_{|u(x)| \leq A} (1 + |u|^{1+\rho})\, dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} C_8^{-2} \int_{|u(x)| > A} u^2\, dx \leq C_{12}(1 + A^{1+\rho}) \operatorname{mes} \Omega + \frac{\varepsilon}{2} C_8^{-2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\leq C_{12}(1 + A^{1+\rho}) \operatorname{mes} \Omega + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_H^2,$$

где $C_{12} = \mathrm{const} > 0$. Из последнего неравенства следует $\left|\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_{12}(1 + A^{1+\rho}) \operatorname{mes} \Omega \|u\|_H^{-2}$. Следовательно, $\left|\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\right| < \varepsilon$ для всех $\|u\|_H > (\frac{\varepsilon}{2} C_{12}^{-1} (1 + A^{1+\rho})^{-1} (\operatorname{mes} \Omega)^{-1})^{-\frac{1}{2}}$, т. е. $\lim_{\|u\|_H \to \infty} \{\|u\|_H^{-2} \int_\Omega p(x, u)\, dx\} = 0$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Лемма доказана.

2. Основные результаты.

Теорема 2.1. *Пусть условия (A1), (A2) выполняются и* $f \in F_\rho(\Omega \times \mathsf{R})$, *где* $0 \leq \rho < +\infty$ *при* $n \leq 2$, *и* $0 \leq \rho < (n+2)/(n-2)$ *при* $n < 2$. *Тогда имеют место следующие утверждения: (i) Если* $f(x, t)$ — *монотонно неубывающая функция* $t \in \mathsf{R}$ *при каждом фиксированном* $x \in \Omega$, *то для* $R > 0$ *существует* $u_R \in H$, *удовлетворяющее равенствам*

$$\| u_R \|_H = R, \quad N(u_R) = \sup \{ N(u) : u \in H, \quad \| u \|_H = R \}. \tag{2.1}$$

Кроме того, для всех $R \geq R_0$ ($R_0 = \mathrm{const} > 0$) *выполняется равенство*

$$u_R = \lambda(R) N(u_R) \tag{2.2}$$

дуя подходящего $\lambda(R) > 0$.

(ii) Если $t f(x, t) > 0$ *для всех* $x \in \Omega$, $t \neq 0$, *то для всех* $R > 0$ *существует* $u_R \in H$, *удовлетворяющее (2.1) и (2.2).*

Функция u_R, *определенная в (i) (при* $R \geq R_0$*) и в (ii) (при* $R > 0$*), является обобщенной собственной функцией задачи (1.1), соответствующей собственному числу* $\lambda(R)$.

(iii) Если $\lim_{t \to \pm\infty} \{ t^{-1} f(x, t) \} = 0$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то существует такое* $\lambda_0 > 0$, *что по крайней мере один из интервалов* $(-\infty, -\lambda_0)$ *и* $(\lambda_0, +\infty)$ *принадлежит спектру задачи (1.1).*

(iv) Если $\lim_{t \to \pm\infty} \{ t^{-1} f(x, t) \} = 0$ *и* $\lim_{t \to 0+} \{ 1^{-1} f(x, t) \} = +\infty$ ($\lim_{t \to 0-} \{ t^{-1} f(x, t) \} = +\infty$) *равномерно по* $x \in \Omega$, *то интервал* $(0, +\infty)$ *принадлежит спектру задачи (1.1).*

Доказательство. Доказательства (i) и (ii) аналогичны доказательствам (i) и (ii) теоремы 2.1 [2] соотв., а доказательство (iii) аналогично доказательству (iii) теоремы 2.1 [3]. Теперь докажем (iv). Легко видеть, что если условия теоремы 2.1 (iv) выполняются, то функция $p(x, t) = F(x, t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1.13, следовательно, имеем $\lim_{\|u\|_H \to \infty} \{ \| u \|_H^{-2} Nu \} = \lim_{\|u\|_H \to \infty} \{ \| u \|_H^{-2} \int_\Omega F(x, u)\, dx \} = 0$. Из этого равенства следует тождество

$$\lim_{\|u\|_H \to \infty} \{ \tfrac{1}{2} (u, u)_H - \lambda N(u) \} = \lim_{\|u\|_H \to \infty} (u, u)_H \lim_{\|u\|_H \to \infty} \{ \tfrac{1}{2} - \lambda (u, u)_H^{-1} N(u) \} = +\infty \tag{2.3}$$

для каждого фиксированного $\lambda \in \mathsf{R}$.

С другой стороны, из условий теоремы 2.1 (iv) легко видеть, что $\lim_{t \to 0_+} \{ t^{-2} F(x, t) \} = +\infty$ ($\lim_{t \to 0_-} \{ t^{-2} F(x, t) \} = +\infty$). Пусть $\lambda > 0$ — фиксированное число и $\varphi(x) \subset C_0^\infty(\Omega) \subset H$ такая функция, что $\varphi(x) \geq 0$ ($\varphi(x) \leq 0$) в Ω и $m_0 = \sup_{x \in \Omega} \varphi(x) > 0$ ($m_0 = \inf_{x \in \Omega} \varphi(x) < 0$). Пусть $B > 0$ такое число, что $\frac{1}{2} \| \varphi \|_H^2 - \lambda B \| \varphi \|_{L_2(\Omega)}^2 < 0$. Существует $M = M(B) > 0$, для которого выполняется неравенство $F(x, t) \geq Bt^2$ для всех $x \in \Omega$, $0 \leq t \leq M$ ($-M \leq t \leq 0$). Выберем такое число $\rho > 0$, что $\rho m_0 < M$ ($-\rho m_0 < M$) и положим $u_0 = \rho\varphi$. Очевидно имеем

$$\frac{1}{2} (u_0, u_0)_H - \lambda N(u_0) = \frac{1}{2} \rho^2 \| \varphi \|_H^2 - \lambda \int_\Omega F(x, \rho\varphi)\, dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \rho^2 \| \varphi \|_H^2 - \lambda B \int_\Omega \rho^2 \varphi^2\, dx = \rho^2 \left(\frac{1}{2} \| \varphi \|_H^2 - \lambda B \| \varphi \|_{L_2(\Omega)}^2 \right) < 0. \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) и из леммы 1.11 следует, что каждое число $\lambda > 0$ является собственным числом задачи (1.1). Теорема полностью доказана.

Легко видеть, что $\lambda = 0$ не принадлежит спектру задачи (1.1). С другой стороны, следствие 2.2 показывает, что существует нелинейная эллиптическая задача, спектр которой является $\mathsf{R} \setminus \{0\}$.

Следствие 2.2. *Пусть условия (A1), (A.2) выполняются и* $f(x, t) \in F_\rho(\Omega \times \mathrm{R})$, *где* $0 \leqq \rho < +\infty$ *при* $n \leqq 2$, *и* $0 \leqq \rho < (n+2)/(n-2)$ *при* $n > 2$. *Если* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1} f(x, t)\} = 0$, $\lim_{t\to 0_+}\{t^{-1} f(x, t)\} = +\infty$ *и* $\lim_{t\to 0_-}\{t^{-1} f(x, t)\} = -\infty$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то каждое число* $\lambda \neq 0$ *принадлежит спектру задачи (1.1)*;

Доказательство. Из теоремы 2.1 (iv) следует, что каждое число $\lambda > 0$ принадлежит спектру задачи (1.1). С другой стороны, задача (1.1) эквивалентна следующей задаче:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x) u = (-\lambda)(-f(x, u)) \text{ в } \Omega, \qquad u|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u|_{\Gamma_2} = 0.$$

Из того, что $\lim_{t\to 0_-}\{t^{-1}(-f(x, t))\} = +\infty$, немедленно следует, что каждое число $\lambda < 0$ (т. е. $(-\lambda) > 0$) принадлежит спектру задачи (1.1). Итак, следствие доказано.

В следующих теоремах мы предположим, что функции $g(x) \neq 0$ и $h(x) \neq 0$ непрерывны и ограничены в Ω. Пусть μ_1 и ν_1 — наименьшие собственные числа задач

$$(2.5) \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x) u = \mu g(x) u \text{ в } \Omega, \quad u|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$(2.6) \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x) u = \nu h(x) u \text{ в } \Omega, \ u|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u|_{\Gamma_2} = 0,$$

соответственно.

Теорема 2.2. *Пусть условия (A1), (A2) выполняются и* $f(x, t) \in F_\rho(\Omega \times \mathrm{R})$, *где* $0 \leqq \rho < +\infty$ *при* $n \leqq 2$, *и* $0 \leqq \rho < (n+2)/(n-2)$ *при* $n > 2$. *Предполагается, что* $tf(x, t) > 0$ *для всех* $x \in \Omega$, $t \neq 0$ *и собственное число* $\lambda(R)$ *задачи (1.1) определено как в теореме 2.1 (ii). Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) Если $\lim_{t\to 0}\{t^{-1} f(x, t)\} = 0$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то* $\lim_{R\to 0} \lambda(R) = +\infty$;

(ii) Если $\lim_{t\to 0}\{t^{-1} f(x, t)\} = g(x)$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то* $\lim_{R\to 0} \lambda(R) = \mu_1$;

(iii) Если $\lim_{t\to 0}\{t^{-1} f(x, t)\} = +\infty$ *равномерно по* $x \in \Omega$ *и* $f(x, t)$ *— монотонно неубывающая функция* $t \in \mathrm{R}$ *при каждом фиксированном* $x \in \Omega$, *то* $\lim_{R\to 0} \lambda(R) = 0$.

Доказателство. Доказательства (i) и (ii) аналогичны доказательствам (i) и (ii) теоремы 2.2 [3], соотв. Теперь докажем (iii). Легко видеть, что $F(x, t) \leq tf(x, t)$ для всех $x \in \Omega$, $t \in \mathrm{R}$, если $f(x, t)$ — монотонно неубывающая функция $t \in \mathrm{R}$ при каждом фиксированном $x \in \Omega$. Из $\lim_{t\to 0}\{t^{-1} f(x, t)\} = +\infty$ равномерно по $x \in \Omega$ заключаем, что $\lim_{t\to 0}\{t^{-2} F(x, t)\} = +\infty$ равномерно по $x \in \Omega$. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число, $x_0 \in \Omega$ и $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ — окрестность x_0. Пусть $\varphi(x) \subset C_0^\infty(\Omega) \subset H$ такая функция, что $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in \Omega_0$. Обозначим через $p = \|\varphi\|_H$. Тогда $\|Rp^{-1}\varphi\|_H = R$. Существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $t^{-2} F(x, t) > \varepsilon^{-1} p^2 (\operatorname{mes}\Omega_0)^{-1}$ для всех $x \in \Omega$, $0 < |t| < \delta$. В частности, для каждого $0 < R < p\delta$ имеем $F(x, Rp^{-1}) > R^2 p^{-2} \varepsilon^{-1} p^2 (\operatorname{mes}\Omega_0)^{-1} = R^2 \varepsilon^{-1} (\operatorname{mes}\Omega_0)^{-1}$. Из (2.1) и (2.2) получаем

$$0 < \lambda(R) = R^2\Big\{\int_\Omega u_R f(x, u_R)\, dx\Big\}^{-1} \leqq R^2\Big\{\int_\Omega F(x, u_R)\, dx\Big\}^{-1} \leqq R^2\Big\{\int_\Omega F(x, Rp^{-1}\varphi)\, dx\Big\}^{-1}$$

$$\leqq R^2\Big\{\int_{\Omega_0} F(x, Rp^{-1}\varphi)\, dx\Big\}^{-1} = R^2\Big\{\int_{\Omega_0} F(x, Rp^{-1})\, \partial x\Big\}^{-1} \leqq R^2\Big\{\int_{\Omega_0} R^2 \varepsilon^{-1} (\operatorname{mes}\Omega_0)^{-1}\, dx\Big\}^{-1} = \varepsilon$$

для всех $0 < R < p\delta$. Итак, $\lim_{R\to 0} \lambda(R) = 0$ в силу произвольности ε.
Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть условия (A1), (A2) выполняются и* $f(x, t) \in F_\rho(\Omega \times \mathrm{R})$, *где* $0 \leqq \rho < +\infty$ *при* $n \leqq 2$, *и* $0 \leqq \rho < (n+2)/(n-2)$ *при* $n > 2$. *Предположим, что* $tf(x, t) > 0$ *для всех* $x \in \Omega$, $t \neq 0$ *и собственное число* $\lambda(R)$ *задачи (1.1) определено как в теореме 2.1 (ii). Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) если $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1} f(x, t)\} = 0$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то* $\lim_{R\to\infty} \lambda(R) = +\infty$;

(*ii*) *если* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1}f(x,t)\}=h(x)$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то* $\lim_{R\to\infty}\lambda(R)=\nu_1$;
(*iii*) *если* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1}f(x,t)\}=+\infty$ *равномерно по* $x\in\Omega$ *и* $f(x,t)$ *монотонно неубывающая функция* $t\in\mathrm{R}$ *при каждом фиксированном* $x\in\Omega$, *то* $\lim_{R\to\infty}\lambda(R)>0$.

При помощи леммы 1.13 доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.

Теорема 2.4. *Пусть условия (A1), (A2) выполняются и* $f(x,t)\in F_\rho(\Omega\times\mathrm{R})$, *где* $0\leq\rho<+\infty$ *при* $n\leq 2$, *и* $0\leq\rho<(n+2)/(n-2)$ *при* $n>2$.
Предположим, что $tf(x,t)>0$ *для всех* $x\in\Omega$, $t\neq 0$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*
(*i*) *Если* $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=g(x)$ *и* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1}f(x,t)\}=h(x)$ *равномерно по* $x\in\Omega$ *и* $\mu_1<\nu_1$, *то интервал* (μ_1,ν_1) *принадлежит спектру задачи (1.1).*
(*ii*) *Если* $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=g(x)$ *и* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1}f(x,t)\}=0$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то интервал* $(\mu_1,+\infty)$ *принадлежит спектру задачи (1.1). При этом интервал* $(\mu_1,+\infty)$ *является спектром задачи (1.1), когда* $t\{f(x,t)-g(x)t\}<0$ *для всех* $x\in\Omega$, $t\neq 0$.
(*iii*) *Если* $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=+\infty$ *и* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1}f(x,t)\}=0$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то интервал* $(0,+\infty)$ *является спектром задачи (1.1).*
(*iv*) *Если* $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=+\infty$ *и* $\lim_{t\to\pm\infty}\{t^{-1}f(x,t)\}=h(x)$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то интервал* $(0,\nu_1)$ *принадлежит спектру задачи (1.1).*

Доказательство. При помощи теорем 2.2 и 2.3 доказательства (i) и (ii) аналогичны доказательствам (i) и (ii) теоремы 2.4 [3], соотв. Теперь покажем (iii). Если условия теоремы (2.4 (iii) выполнены, то, согласно теореме 2.1 (iv), интервал $(0,+\infty)$ принадлежит спектру задачи (1.1). С другой стороны, для любого собственного числа $\bar\lambda$ задачи (1.1) с обобщенной собственной функцией $\bar u\in H$ имеем $\bar\lambda=(\bar u,\bar u)_H\{\int_\Omega\bar u f(x,\bar u)\,dx\}^{-1}>0$ ввиду того, что $tf(x,t)>0$ для всех $x\in\Omega$, $t\neq 0$. Итак, интервал $(0,+\infty)$ является спектром задачи (1.1). Приступим к доказательству (iv). Пусть $0<\lambda_0<\nu_1$. Как в доказательстве теоремы 2.2 [3], можем установить, что

$$\nu_1=\lim_{R\to\infty}\{\frac{1}{2}(u_R,u_R)_H(N(u_R))^{-1}\}.$$

Положим $2\delta=\nu_1-\lambda_0>0$. Тогда $\lim_{R\to\infty}\{\frac{1}{2}(u_R,u_R)_H(N(u_R))^{-1}\}>\lambda_0+\delta$. Для каждого ($R\geq R_0$ ($R_0=\mathrm{const}>0$) выполняется неравенство $\frac{1}{2}(u_R,u_R)_H(N(u_R))^{-1}>\lambda_0+\delta$, т. е. $(u_R,u_R)_H/2(\lambda_0+\delta))>N(u_R)$. При каждом $u\in H$, $\|u\|_H=R\geq Ro|$ имеем

$$\frac{1}{2}(u,u)_H-\lambda_0N(u)\geq\frac{1}{2}(u_R,u_R)_H-\lambda_0N(u_R)>\frac{1}{2}(u_R,u_R)_H$$
$$-\frac{\lambda_0}{2(\lambda_0+\delta)}(u_R,u_R)_H=\frac{\delta}{2(\lambda_0+\delta)}(u_R,u_R)_H,$$

следовательно,

$$\lim_{\|u\|_H\to\infty}\{\frac{1}{2}(u,u)_H-\lambda_0N(u)=+\infty \tag{2.7}$$

С другой стороны, если $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=+\infty$ равномерно по $x\in\Omega$, то в доказательстве теоремы 2.1 (iv) мы установили, что существует $u_0\in H$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{2}(u_0,u_0)_H-\lambda_0N(u_0)<0. \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) и из леммы 1.11 заключаем, что каждое число λ_0 из интервала $(0,\nu_1)$ принадлежит спектру задачи (1.1). Итак, теорема доказана.

Теорема, которую мы сформулируем ниже, доказывается при помощи следующей теоремы Красносельского ([1], теорема 2.2, с. 332).

Теорема 2.5. *Пусть A $(A(0)=0)$ — нелинейный компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала Φ (φ) $(\Phi(O)=0)$, равномерно дифференцируемого в некоторой окрестности точки O. Пусть оператор A имеет в точке O производную Фреше B $(dA(0)=B)$, являющуюся компактным самосопряженным оператором. Тогда каждое характеристическое число линейного оператора B является точкой бифуркации нелинейного оператора A.*

Теорема 2.6. *Пусть условия (A1), (A2) выполняются и $f(x,t)\in F_\rho(\Omega\times\mathrm{R})$, где $0\leq\rho<+\infty$ при $n\leq 2$, и $0\leq\rho<(n+2)/(n-2)$ при $n>2$. Предполагается, что $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=g(x)$ равномерно по $x\in\Omega$ и $f(x,t)\neq g(x)\,t$ в $\Omega\times\mathrm{R}$. Тогда для каждого $\varepsilon<0$ и для каждого собственного числа μ задачи (2.5) существует собственное число λ задачи (1.1), удовлетворяющее неравенству $|\mu-\lambda|<\varepsilon$.*

Доказательство. Раньше мы определили оператор $V:H\to H$ равенством $\int_\Omega f(x,u)\,\vartheta\,dx=(V(u),\vartheta)_H$, $\forall\, u,\vartheta\in H$.

Пусть $A=V$. Из условий теоремы легко видеть, что V — нелинейный оператор и $V(O)=0$. Кроме того, из леммы 1.6 немедленно следует, что оператор V компактен. Очевидно функция $f_1(x,t)=g(x)\,t\in F_1(\Omega\times\mathrm{R})$. Пусть $B:H\to H$ — оператор, определенный равенством

$$(Bu,\vartheta)_H=\int_\Omega g(x)\,u\,\vartheta\,dx,\quad \forall\, u,\vartheta\in H. \tag{2.9}$$

Согласно лемме 1.6, оператор B компактен, кроме того, из (2.9) легко видеть, что он линеен и самосопряжен.

С другой стороны, $V=\operatorname{grad} N$ (лемма 1.8), где функционал N слабо непрерывен (лемма 1.10) и равномерно дифференцируем в шаре $B_r=\{u\in H,\ \|u\|_H<r\}$ (лемма 1.9). Теперь мы найдем производную Фреше оператора V в точке O.

Из-за того, что $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}f(x,t)\}=g(x)$ равномерно по $x\in\Omega$, следует, что если

$$f(x,t)=g(x)\,t+s(x,t), \tag{2.10}$$

то $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}s(x,t)\}=0$ равномерно по $x\in\Omega$. Лы покажем, что $dV(O)=B$. Согласно лемме 1.5, не нарушая общности, можем предполагать, что $1<\rho<+\infty$ при $n\leq 2$, и $1<\rho<(n+2)/(n-2)$ при $n>2$. Тогда имеем $s(x,t)\in F_\rho(\Omega\times\mathrm{R})$. Из (1.3), (2.9) и (2,10) получаем

$$\begin{aligned}
&\|V\vartheta-V(O)-B\vartheta\|_H=\sup\{(V\vartheta-V(O)-B\vartheta,u)_H,\quad u\in H,\ \|u\|_H\leq 1\}\\
&=\sup\{\int_\Omega(f(x,\vartheta)-g(x)\,\vartheta)\,u\,dx,\ \ u\in H,\ \|u\|_H\leq 1\}=\sup\{\int_\Omega s(x,\vartheta)\,u\,dx,\ u\in H,\ \|u\|_H\leq 1\}\\
&\leq\sup\{\|s(x,\vartheta)\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)}\,\|u\|_{L_{1+\rho}(\Omega)},\ u\in H,\ \|u\|_H\leq 1\}\\
&\leq C_{12}\sup\{\|s(x,\vartheta)\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)}\,\|u\|_H,\ u\in H,\ \|u\|_H\leq 1\}\leq C_{12}\|s(x,\vartheta)\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)},
\end{aligned}\tag{2.11}$$

где $C_{12}=\mathrm{const}>0$.

Из (2.11) следует неравенство

$$\|V\vartheta-V(O)-B\vartheta\|_H\,\|\vartheta\|_H^{-1}\leq C_{12}\|s(x,\vartheta)\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)}\,\|\vartheta\|_H^{-1}. \tag{2.12}$$

Если докажем, что

$$\lim_{\|u\|_H\to 0}\{\|s(x,\vartheta)\|^{1+\rho^{-1}}_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)}\,\|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}}\}=0, \tag{2.13}$$

то из (2.12) и (2.13) имеем $\lim_{\|\vartheta\|_H\to 0}\{\|V\vartheta-V(O)-B\vartheta\|_H\,\|\vartheta\|_H^{-1}\}=0$, т. е $dV(0)=B$. Сейчас докажем (2.13). Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Из условия $\lim_{t\to 0}\{t^{-1}s(x,t)\}=0$

равномерно по $x \in \Omega$ следует, что существует $A = A(\varepsilon) > 0$, такое, что $|s(x, t)| \leqq (\varepsilon/2)^{\rho/(1+\rho)} C_{13}^{-1} |t|$ для всех $x \in \Omega$, $|t| < A$, где C_{13} такая положительная константа, что $\|u\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)} \leqq C_{13} \|u\|_H$ для каждого $u \in H$. Итак, имеем

$$\|s(x, \vartheta)\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)}^{1+\rho^{-1}} \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} = \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} \int_\Omega |s(x, \vartheta)|^{1+\rho^{-1}} dx$$

$$= \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} \int_{|\vartheta(x)| < A} |s(x, \vartheta)|^{1+\rho^{-1}} dx + \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} \int_{|\vartheta(x)| \geqq A} |s(x, \vartheta)|^{1+\rho^{-1}} dx$$

$$\leqq \frac{1}{2} \varepsilon \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} C_{13}^{-1-\rho^{-1}} \|\vartheta\|_{L_{1+\rho^{-1}}(\Omega)}^{1+\rho^{-1}} + C_{14} \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} \int_{|\vartheta(x)| \geqq A} (1 + |\vartheta|^\rho)^{1+\rho^{-1}} dx$$

$$\leqq \frac{1}{2} \varepsilon + C_{15} \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} \int_{|\vartheta(x)| \geqq A} (|\vartheta|^\rho)^{1+\rho^{-1}} dx \leqq \frac{1}{2} \varepsilon + C_{15} \|\vartheta\|_H^{(1+\rho)(1-\rho)^{-1}},$$

где $C_{14} = \mathrm{const} > 0$, $C_{15} = C_{15}(A) > 0$, $C_{16} = C_{16}(A) > 0$. Из последнего неравенства получаем $\|s(x, \vartheta)\|_{L_{1+\rho^{-1}}}^{1+\rho^{-1}} \|\vartheta\|_H^{-1-\rho^{-1}} < \varepsilon$ для всех $\vartheta \in H$, удовлетворяющих неравенству $0 < \|\vartheta\|_H < (\frac{1}{2} \varepsilon C_{16}^{-1})^{1/(1+\rho)(1-\rho+1)}$. Этим доказывается (2.13).

Из теоремы 2.5 следует, что каждое характеристическое число линейного оператора B является точкой бифуркации оператора V. В частности, выполняется следующее утверждение:

А) Для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждого характеристического числа μ оператора B существует характеристическое число λ оператора V, удовлетворяющее неравенству $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Из определения оператора V и B легко видеть, что справедливо утверждение:

Б) Число λ является характеристическим числом оператора $V(B)$ тогда и только тогда, когда λ является собственным числом задачи (1.1) ((2.5)).

Очевидно А) и Б) доказывают теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М. Э, 1956.
2. Хо Ши Хънг. Задачата на Щурм-Лювил за един клас от нелинейни елиптични уравнения в неограничени области, *Год. Соф. унив. Мат. фак.* **76**, (в печати).
3. Хо Ши Хынг. О задаче Штурма-Лиувилля для одного класса нелинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях, *Сердика*, **11**, 1985, 287—298.
4. M. S. Berger. An eigenvalue problem for nonlinear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120, 1965, 145—184.
5. M. S. Berger. Perspectives in nonlinearity. New York, 1968.

Centre for Mathematics and Mechanics
Sofia 1090 *P. O. Box 373*

Received 17. 5. 1984