Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЛЮБОЙ 14-ВЕРШИННЫЙ ГРАФ С ЕДИНСТВЕННЫМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ ИМЕЕТ НЕ МЕНЬШЕ ПЯТИ 5-АНТИКЛИК

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ, ИВАН Ж. ПАШОВ

Множество из пяти вершин графа называется 5-антикликой, если любые две из них несмежны. Доказывается, что в любом 14-вершинном графе с единственным треугольником имеется хотя бы пять 5-антиклик. Оценка точная.

1. Введение. Под графом будем понимать упорядоченную пару $G=(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества $V(G)$. Элементы множества $V(G)$ называются вершинами графа G, а элементы множества $E(G)$ — ребрами графа G. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $\{v_1, v_2\} \in E(G)$, тогда будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество из трех вершин графа называется треугольником, если любые две из них смежны. Множество вершин графа называется антикликой, если любые две из них несмежны. Если антиклика состоит из p-вершин, тогда будем говорить, что она является p антикликой.

Если G — 14-вершинный граф без треугольников, то он содержит 5-антиклику [10]. Для 13-вершинных графов это утверждение перестает быть верным [10]. Для 14-вершинных графов без треугольников известно больше: любой такой граф имеет хотя бы шесть 5-антиклик [1]. Дальнейшее усиление в этом направлении невозможно: в [2] указан пример 14-вершинного графа без треугольников, число 5-антиклик которого ровно шесть. Для графов с единственным треугольником в этом отношении известно следующее: если граф имеет не больше 13 вершин, тогда он может вообще не иметь 5-антиклик. Существует единственный 13-вершинный граф с одним треугольником и без 5-антиклик [3]. В [1] доказано, что любой 14-вершинный граф с единственным треугольником содержит хотя бы четыре 5-антиклики. С другой стороны, известен пример 14-вершинного графа с единственным треугольником и с ровно пятью 5-антикликами [2]. В этой работе возникнет еще один граф с такими свойствами.

В настоящей работе докажем:

Основная теорема. *Любой 14-вершинный граф с единственным треугольником имеет хотя бы пять 5-антиклик.*

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\langle M\rangle$ — подграф, порожденный множеством вершин M; $A(v)$, $v\in V(G)$ — множество всех вершин графа G, смежных вершине v;

$\bar{A}(v)$, $v\in V(G)$ — множество всех вершин графа G, несмежных вершине v, за исключением самой вершины v;

$G-v$, $v\in V(G)$ — подграф графа G, получающийся от него удалением вершины v;

$G-[u, v]$ — подграф графа G, получающийся от него удалением его ребра $[u, v]$;

$G+[u, v]$ — граф, получающийся от графа G добавлением ребра $[u, v]$;
G_0 — граф на рис. 1;
G_1 — граф на рис. 2.

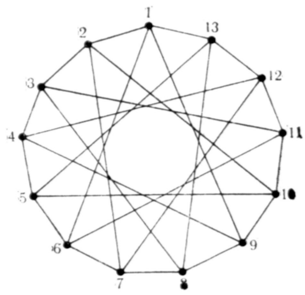

Рис. 1

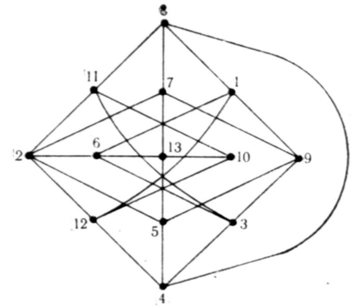

Рис. 2

2. Вспомагательные результаты.

Теорема А [9]. *Любой 13-вершинный граф без треугольников и без 5-антиклик изоморфен графу* G_0 (рис. 1).

Теорема В [3]. *Любой 13-вершинный граф с единственным треугольником и без 5-антиклик изоморфен графу* $G_0+[1, 3]$, *получающимся от графа* G_0 (рис. 1) *добавлением ребра* $[1, 3]$.

Теорема С [5]. *Любой 13-вершинный граф без треугольников, имеющий не более двух 5-антиклик и отличный от графа* G_0 (рис. 1), *изоморфен либо графу* G_1 (рис. 2). *либо графу* $G_1+[9, 10]$.

Рассмотрим графы $P=G_1+[9, 10]+[1, 5]$, $Q=G_1+[5, 10]$ и $R=G_1+[1, 10]$.

Теорема Д [6]. *Пусть* G — *13-вершинный граф с единственным треугольником и с единственной 5-антикликой. Тогда граф* G *изморфен одному из следующих десяти графов* $\div$ P, $P_1=P-[9, 10]$, $P_2=P-[1,12]$, $P_3=P-[2, 6]$, $P_4=P_1-[1, 12]$; $P_5=P_2-[2, 6]$ Q, $Q_1=Q-[2, 5]$, R, $R_1=R-[2, 7]$.

3. О числе 5-антиклик некоторых специальных 14-вершинных графов с единственным треугольником. В этом пункте докажем следующие две теоремы:

Теорема 1. *Пусть* G — *14-вершинный граф с единственным треугольником и, кроме того, существует вершина* v_0 *графа* G, *такая, что подграф* $G-v_0$ *содержит не более одной 5-антиклики. Тогда число 5-антиклик графа* G *не меньше 6.*

Теорема 2. *Пусть* G — *14-вершинный граф с единственным треугольником и, кроме того, существует вершина* v_0 *этого треугольника, такая, что* $G-v_0$ *содержит ровно две 5-антиклики. Тогда число 5-антиклик графа* G *не меньше 5 При том существует единственный граф рассматриваемого типа с ровно пятью 5-антикликами, который можно получить, например, добавлением к графу* $G_1+[9, 10]$ (см. рис. 2) *новой вершины, смежной его вершинам 1, 5, 11, 13.*

Прежде всего докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* G — *14-вершинный граф с единственным треугольником. Если некоторая вершина этого треугольника принадлежит всем 5-антикликам графа* G, *тогда число 5-антиклик графа* G *не меньше 8. Оценка точная.*

Доказательство. Через v_0 обозначим вершину треугольника графа G, которая принадлежит всем 5-антикликам графа G. Тогда подграф $G-v_0$ не содержит треугольников и 5-антиклик. Согласно теореме А, можно считать, что подграф $G-v_0$ совпадает с графом G_0 (рис. 1).

Нетрудно убедиться в том, что подстановки

$\sigma_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$

$\sigma_2 = (1)(2, 6, 13, 9)(3, 11, 12, 4)(5, 8, 10, 7)$

(запись циклическая) являются автоморфизмами графа G_0 и, кроме того, они порождают подгруппу, действующую транзитивно на множество ребер графа G_0. Поэтому все ребра графа G_0 равноправны.

Вершина v_0, вместе с двумя вершинами графа G_0, составляет треугольник. Из сделанных только что замечаний следует, что без ограничения общности можно предположить, что v_0 смежна вершинам 1 и 2. Так как в графе G нет других треугольников, то v_0 несмежна вершинам 3, 6, 7, 9, 10, 13 и, следовательно, вершины из $A(v_0)$, отличные от 1 и 2, составляют антиклику подграфа, порожденного множеством вершин 4, 5, 8, 11, 12 (см. рис. 3).

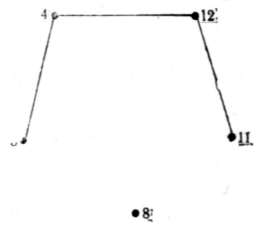

Рис. 3

Вершина v_0 смежна не более одной из вершин 4,12 (иначе получится второй треугольник). Если v_0 смежна вершине 4, тогда она не смежна еше вершинам 5 и 12 и поэтому $\bar{A}(v_0) \supseteqq \{3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13\}$. Из этого следует (см. рис. 4), что подграф $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ содержит хотя бы восемь 4-антиклик, которые вместе с v_0 составляют восемь 5-антиклик графа G.

Случай, когда v_0 смежна вершине 12, из-за симметрии вполне аналогичен предыдущему. Остается рассмотреть случай, когда v_0 не смежна вершинам 4 и 12. В этом случае $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ содержит в качестве порожденного подграфа граф на рис. 5.

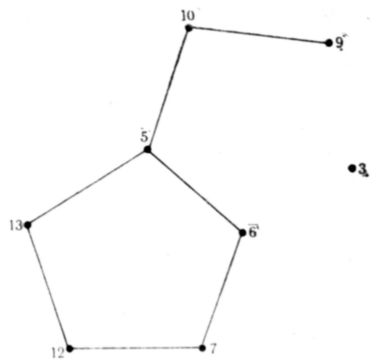

Рис. 4

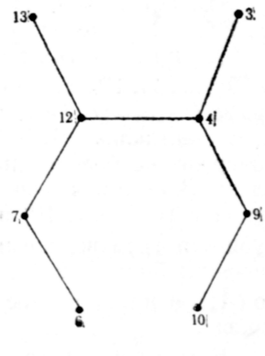

Рис. 5

Подграф на рис. 5 содержит восемь 4-антиклик, которые вместе с v_0 составляют восемь 5-антиклик графа G. Если $A(v_0) = \{1, 2, 5, 8, 11\}$ или $A(v_0) = \{1, 2, 4, 8, 11\}$, тогда граф G содержит ровно восемь 5-антиклик.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G — 14-вершинный граф без треугольников, все 5-антиклики которого имеют общую вершину. Тогда граф G содержит хотя бы одиннадцать 5-антиклик. Оценка точная.*

Доказательство. Через v_0 обозначим вершину, принадлежащую всем 5-антикликам графа G. Подграф $G - v_0$ не содержит треугольников и 5-антиклик и, согласно теореме А, $G - v_0 = G_0$, где граф G_0 изображен на рис. 1.

Если v_0 не смежна ни одной вершине графа G_0, тогда утверждение леммы очевидно. Из-за симметрии можно предположить, что v_0 смежна вершине 1 графа G_0 (рис. 1). Если v_0 несмежна другой вершине графа G_0, тогда утверждение леммы тоже очевидно. Поэтому предположим, что v_0 смежна еще некоторой второй вершине графа G_0. Имея ввиду автоморфизм σ_2 (см. доказательство леммы 1), достаточно рассмотреть следующие две ситуации:

1. v_0 смежна 1 и 3;
2. v_0 смежна 1 и 5.

Случай 1. Вершина v_0 смежна вершинам 1 и 3 графа G_0. Из того, что в G нет треугольников, следует $\bar{A}(v_0) \supset \{2, 6, 9, 13, 4, 8, 11\}$. Множество $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы одну из пар $\{5, 7\}$, $\{5, 12\}$, $\{10, 7\}$, $\{10, 12\}$. В любом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы одиннадцать 4-антиклик, которые вместе с v_0 дают хотя бы одиннадцать 5-антиклик графа G. Если $A(v_0) = \{1, 3, 10, 12\}$, граф G содержит ровно одиннадцать 5-антиклик.

Случай 2. Вершина v_0 смежна вершинам 1 и 5 графа G_0. Из того, что в G нет треугольников, следует $\bar{A}(v_0) \supset \{2, 4, 6, 9, 10, 13\}$. Вершина v_0 смежна не более двум (несмежным) вершинам 5-цикла 3, 8, 7, 12, 11, 3 (иначе будет треугольник). Следовательно, $\bar{A}(v_0)$ содержит еще хотя бы одно из множеств $\{8, 11, 12\}$, $\{3, 7, 12\}$, $\{11, 7, 8\}$, $\{12, 3, 8\}$, $\{7, 3, 11\}$. В любом из этих случаев $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы одиннадцать 4-антиклик и, следовательно, граф G содержит хотя бы одиннадцать 5-антиклик.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть G — 14-вершинный граф без треугольников, который имеет вершину v_0, такую, что $G - v_0$ совпадает с графом G_1* (рис. 2), *либо с графом $G_2 = G_1 + [9, 10]$. Если v_0 не смежна ни одной из вершин 5-антиклики $\{1, 3, 5, 7, 10\}$, тогда граф G содержит хотя бы тринадцать 5-антиклик.*

Доказательство. Так как 5-антиклики графа G, отличные от $\{5, 7, 1, 3, 10\}$ и $\{5, 7, 6, 11, 12\}$, содержит вершину v_0, достаточно доказать, что подграф $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ графа $G - v_0 = G_i$, $i = 1, 2$, имеет хотя бы одиннадцать 4-антиклик, пять из которых дает 5-антиклика $\{1, 3, 5, 7, 10\}$. Поскольку G не имеет треугольников, $A(v_0)$ содержит не больше двух вершин 5-цикла 2, 12, 4, 8, 11, 2 причем $A(v_0)$ есть антиклика. Заметим, что любая вершина этого 5-цикла смежна двум вершинам из 5-антиклики $\{1, 3, 5, 7, 10\}$ и любые две несмежные вершины 5-цикла смежны в совокупности трем вершинам из этой 5-антиклики. Так как $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы три вершины 5-цикла 2, 12, 4, 8, 11, 2, причем хотя бы две пары из них — несмежные, то $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ имеет (кроме 4-антиклик, содержащихся в $\{1, 3, 5, 7, 10\}$) еще пять 4-антиклик.

Если $6 \notin \bar{A}(v_0)$, то $\{6, 5, 7, 10\}$ будет одиннадцатой 4-антикликой. В противном случае $\{2, 13\} \subset \bar{A}(v_0)$ и получим 4-антиклику $\{13, 2, 1, 3\}$.

Лемма 3 доказана.

Замечание. Из-за симметрии графа $G_2 = G_1 + [9, 10]$ утверждение леммы 3 относится и к 5-антиклике $\{5, 6, 7, 11, 12\}$. Нетрудно убедиться в том, что утверждение леммы 3 остается верным для 5-антиклики $\{5, 6, 7, 11, 12\}$ в графе G_1, однако, в этом случае нужно рассмотреть еще ситуацию, когда вершина v_0 смежна одновременно вершинам 9 и 10.

Лемма 4. *Пусть G — 14-вершинный граф без треугольников, который имеет такую вершину v_0, что $G - v_0$ совпадает с графом G_1* (рис. 2), *либо с графом $G_2 = G_1 + [9, 10]$. Если v_0 смежна ровно одной из вершин 1, 3, 5, 7 и несмежна вершине 10, тогда граф G содержит хотя бы двенадцать 5-антиклик. Если вершина v_0 смежна вершине 10 и несмежна ни одной из вершин 1, 3, 5, 7, тогда граф G содержит хотя бы девять 5-антиклик.*

Доказательство. Из-за симметрии достаточно рассмотреть три случая:

Случай 1. Вершина v_0 смежна вершине 3 и несмежна вершинам 1, 5, 7 и 10. Из того, что нет треугольников, вытекает, что v_0 несмежна еще вершинам 4, 6, 9, 11. Кроме того, одна из вершин 2, 12 тоже принадлежит $\bar{A}(v_0)$. Так что либо $\bar{A}(v_0) \supseteq \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$, либо $\bar{A}(v_0) \supseteq \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$. В том и другом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы девять 4-антиклик. Эти 4-антиклики вместе с v_0 составляют 5-антиклик графа G. Так как $G-v_0$ содержит две 5-антиклики, то в случае 1 лемма доказана.

Случай 2. Вершина v_0 смежна вершине 5 и несмежна вершинам 1, 3 7 и 10. Из того, что нет треугольников, вытекает, что вершина v_0 несмежна еще вершинам 2, 4, 9, 13. Из того, что нет треугольников, следует тоже, что вершина v_0 несмежна либо вершине 8, либо вершине 11, так что либо $\bar{A}(v_0) \supseteq \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 13\}$, либо $\bar{A}(v_0) \supseteq \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 13\}$. В том и другом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы десять 4-антиклик и, как в случае 1, заключаем, что граф G содержит хотя бы двенадцать 5-антиклик.

Случай 3. Вершина v_0 смежна вершине 10 и несмежна ни одной из вершин 1, 3, 5, 7. Из того, что нет треугольников, вытекает, что v_0 несмежна еще вершинам 11, 12, 13. Кроме того, v_0 несмежна либо вершине 4, либо вершине 8 (иначе будет треугольник). Обе возможности равноправны, поэтому предположим, что v_0 несмежна вершине 4. Из того, что нет треугольников, вытекает тоже, что v_0 несмежна либо вершине 2, либо вершине 6. В том и в другом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы семь 4-антиклик, которые вместе с v_0 составляют 5-антиклики графа G. Так как $G-v_0$ содержит две 5-антиклики, то G содержит хотя бы девять 4-антиклик.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть G — 14-вершинный граф без треугольников, который имеет вершину v_0 такую, что подграф $G-v_0$ содержит не более двух 5-антиклик. Тогда граф G содержит хотя бы девять 5-антиклик. Если граф G имеет ровно девять 5-антиклик и $G-v_0=G_1$, тогда $A(v_0)=\{5, 6, 8, 10\}$ либо $A(v_0)=\{4, 6, 7, 10\}$. Если граф G имеет ровно девять 5-антиклик и $G-v_0=G_1+[9, 10]$, тогда $A(v_0)=\{5, 6, 8, 10\}$ либо $A(v_0)=\{4, 6, 7, 10\}$, либо $A(v_0)=\{1, 5, 7, 11\}$, либо $A(v_0)=\{3, 5, 7, 12\}$.*

Доказательство. Если подграф $G-v_0$ не содержит 5-антиклик, тогда лемма 5 вытекает из леммы 2. Поэтому предположим, что подграф $G-v_0$ содержит 5-антиклику. Согласно теореме С, подграф $G-v_0$ совпадает с графом C_1 (рис. 2), либо с графом $G_2=G_1+[9, 10]$.

Случай 1. Вершина v_0 несмежна вершинам 5 и 7. Согласно лемме 4, достаточно рассмотреть ситуацию, когда вершина v_0 смежна хотя бы двум из вершин 1, 3, 10. Из этого и из того, что нет треугольников, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 6, 11 и 12 и, согласно замечанию после леммы 3, граф G содержит хотя бы тринадцать 5-антиклик.

Случай 2. Вершина v_0 смежна ровно одной из вершин 5 и 7. Из-за симметрии предположим, что v_0 смежна вершине 5 и несмежна вершине 7. Согласно лемме 3 и замечанию после нее, достаточно рассмотреть ситуацию, когда v_0 смежна одной из вершин 1, 10, 3 и одной из вершин 6, 11, 12. Из того, что нет треугольников, вытекает, что возможны следующие подслучаи:

Подслучай 2. а. Вершина v_0 смежина еще вершинам 1 и 11. Так как нет треугольников, то $\bar{A}(v_0) \supseteq \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13\}$ Подграф, порожденный множеством вершин $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13\}$, содержит больше девяти 4-антиклик, которые вместе с v_0 образуют 5-антиклики графа G.

Подслучай 2. б. Вершина v_0 смежна еще вершинам 3 и 12. Так как нет треугольников, $\bar{A}(v_0) \supseteq \{1, 2, 4, 6, 7, 10, 9, 11, 13\}$. Множество вершин $\{1, 2, 4, 6, 7, 9, 10,$

11, 13} содержит хотя бы десять 4-антиклик, которые вместе с v_0 составляют 5-антиклики графа G.

Подслучай 2. в. Вершина v_0 смежна еще вершинам 6 и 10. Так как нет треугольников, v_0 несмежна вершинам 1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13. Если v_0 несмежна только этим вершинам (т. е. смежна вершинам 5, 6, 8, 10), то $\bar{A}(v_0)$ имеет семь 4-антиклик, а G — девять 5-антиклик. Из-за симметрии тоже самое имеет место и когда v_0 смежна вершинам 4, 6, 7, 10. В остальных случаях G имеет больше девяти 5-антиклик.

Случай 3. Вершина v_0 смежна вершинам 5 и 7. Так как нет треугольников, вершина v_0 несмежна вершинам 2, 4, 8, 9, 13. Следовательно, $A(v_0)\subseteq\{1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$. Если $A(v_0)\subseteq\{1, 3, 5, 7, 10\}$, либо $A(v_0)\subseteq\{5, 6, 7, 11, 12\}$, то $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы восемь 4-антиклик и, следовательно, граф G содержит хотя бы десять 5-антиклик. Остаются следующие три возможности: $A(v_0)\subseteq\{1, 5, 7, 11\}$, $A(v_0)\subseteq\{3, 5, 7, 12\}$ и $A(v_0)\subseteq\{5, 6, 7, 10\}$.

Если $A(v_0)=\{1, 5, 7, 11\}$ или $A(v_0)=\{3, 5, 7, 12\}$ и $G-v_0=G_1+[9, 10]$, тогда граф G содержит ровно девять 5-антиклик. В остальных случаях G имеет больше девяти 5-антиклик.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G — 14-вершинный граф, который имеет вершину v_0, такую, что подграф $G-v_0$ содержит не более одного треугольника и не содержит 5-антиклик. Тогда граф G содержит хотя бы семь 5-антиклик.*

Доказательство. Если $G-v_0$ вовсе не содержит треугольников, тогда, согласно лемме 1, граф G содержит хотя бы восемь 5-антиклик. Иначе $G-v_0$ имеет единственный треугольник и, согласно теореме В, $G-v_0=G_0+[1, 3]$, где граф G_0 задан на рис. 1. Рассмотрим граф $G'=G-[1, 3]$. Граф $G'-v_0$ совпадает с графом G_0 (рис. 1). Согласно лемме 2, граф G' содержит хотя бы одиннадцать 5-антиклик. Так как пара вершин $\{1, 3\}$ входит в неболее чем четырех 5-антиклик графа G', то граф G содержит хотя бы семь 5-антиклик.

Лема 7. *Пусть G — 14-вершинный граф с единственным треугольником и G имеет вершину v_0, такую, что $G-v_0$ содержит единственный треугольник и единственную 5-антиклику. Тогда число 5-антиклик графа G не меньше шести.*

Доказательство. Согласно теореме Д, представляются следующие возможности:

Случай 1. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $P=G_1+[9, 10]+[1, 5]$, где граф G_1 задан на рис. 2. Положим $G'=G-[1, 5]$. Граф G' не содержит треугольников. Ясно, что $G'-v_0=G_2=G_1+[9, 10]$ и, согласно лемме 5, граф G имеет хотя бы девять 5-антиклик. Вершина v_0 в графе G не может быть смежной одновременно вершинам 1 и 5 (иначе получится второй треугольник). Если вершина v_0 смежна ровно одной из вершин 1 и 5, то ясно, что все 5-антиклики графа G', за исключением $\{1, 3, 5, 7, 10\}$, будут 5-антикликами и графа G'. Следовательно, граф G содержит хотя бы восемь 5-антиклик.

Остается рассмотреть ситуацию, когда вершина v_0 несмежна ни одной из вершин 1 и 5. Если v_0 несмежна вершинам 3, 7 и 10, то, согласно лемме 3, граф G' содержит хотя бы тринадцать 5-антиклик и из них не больше пяти содержат пару $\{1, 5\}$. Поэтому граф G содержит хотя бы восемь 5-антиклик. Если v_0 смежна некоторой из вершин 3, 7, 10, то граф G', согласно лемме 5, содержит хотя бы девять 5-антиклик. Однако в этом случае добавление ребра $\{1, 5\}$ к графу G' приводит к уничтожению не больше трех 5-антиклик. Следовательно, в этой ситуации граф G будет иметь хотя бы шесть 5-антиклик.

Случай 2. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $P_1=P-[9, 10]$. Если v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 9,10, то добавляем к графу G ребро $\{9, 10\}$ и попадаем в условия случая 1. Поэтому предположим, что v_0 смежна 9 и 10. Из того, что нет второго треугольника, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 1, 3, 5, 7, 11, 12, 13. Если вершина v_0 смежна вершине 2, тогда вершина 2 имеет степень 6 и, следовательно, $A(2)$ является 6-антикликой. Эта 6-антиклика содержит шесть 5-антиклик. Поэтому предположим, что 2 и v_0 несмежны. Вершина v_0 несмежна еще одной из вершин 4, 8 (иначе получим второй треугольник). Следовательно, либо $\bar{A}(v_0)\supseteq\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13\}$, либо $\bar{A}(v_0)\supseteq\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13\}$. В том и другом случаях $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы пять 4-антиклик. Вместе с v_0 получаем пять 5-антиклик графа G. Так как $G-v_0$ содержит одну 5-антиклику, то число 5-антиклик графа G не меньше 6.

Случай 3. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $P_2=P-[1, 12]$. Если v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 1, 12, тогда, добавляя ребро $\{1, 12\}$ к графу G, попадаем в условия случая 1. Поэтому предположим, что v_0 смежна вершинам 1 и 12. Из того, что нет второго треугольника, вытекает, что v_0 несмежна 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Множество $\bar{A}(v_0)$ содержит еще хотя бы одну из пар вершин $\{3, 7\}$; $\{3, 13\}$; $\{11, 7\}$; $\{11, 13\}$ (иначе получится второй треугольник). В любом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы пять 4-антиклик. Как и в предыдущем случае, заключаем, что число 5-антиклик графа G не меньше 6.

Случай 4. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $P_3=P-[2, 6]$. Если v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 2, 6, тогда, добавляя ребро $\{2, 6\}$ к графу G, попадаем в условия случая 1. Поэтому предположим, что v_0 смежна вершинам 2 и 6. Из того, что нет второго треугольника, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 1, 3, 5, 7, 11, 12, 13. Множество $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы еще одну из пар вершин $\{4, 9\}$; $\{4, 10\}$; $\{8, 9\}$; $\{8, 10\}$ (иначе получаем второй треугольник). В любом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы пять 4-антиклик. Как и в случае 2, заключаем, что число 5-антиклик графа G не меньше 6.

Случай 5. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $P_4=P_1-[1, 12]=P_2-[9, 10]$. Вершина v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 1, 9 (иначе будет второй треугольник). Если v_0 несмежна вершине 1, то, добавляя ребро $\{1, 12\}$ к графу G, попадаем в условия случая 2. Если v_0 несмежна вершине 9, добавим ребро $\{9, 10\}$ к графу G и попадаем в условия случая 3.

Случай 6. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $P_5=P_2-[2, 6]=P_3-[1, 12]$. Вершина v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 1, 6 (иначе будет второй треуголник). Как и в предыдущем случае, добавляя к графу соответственно ребро $[1, 12]$ или $[2, 6]$, попадаем в условия случая 4 или случая 3.

Случай 7. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $Q=G_1+[5, 10]$. Положим $G'=G-[5, 10]$. Граф G' не содержит треугольников. Ясно, что $G'-v_0=G_1$, и, согласно лемме 5, граф G' имеет хотя бы девять 5-антиклик. Вершина v_0 в графе G не может быть смежной одновременно вершинам 5 и 10 (иначе получится второй треугольник). Если вершина v_0 смежна ровно одной из вершин 5 и 10, то ясно, что все 5-антиклики графа G', за исключением $\{1, 3, 5, 7, 10\}$, будут 5-антикликами и графа G. Следовательно, граф G содержит хотя бы восемь 5-антиклик.

Остается рассмотреть ситуацию, когда вершина v_0 несмежна ни одной из вершин 5 и 10. Если v_0 несмежна вершинам 1, 3, 7, то, согласно лемме 3, граф G' содержит хотя бы тринадцать 5-антиклик и из них не больше семи содержат пару $\{5, 10\}$. Поэтому граф G содержит хотя бы шесть 5-антиклик. Если v_0 смежна ровно одной из вершин 1, 3, 7, то, согласно лемме 4, граф G' содержит хотя бы двенадцать 5-антиклик. Однако в этом случае добавление ребра $[5, 10]$ к графу G' приводит к уничтожению не больше пяти 5-антиклик. Следовательно, граф G будет иметь хотя бы семь 5-антиклик. Остается рассмотреть ситуацию, когда v_0 смежна больше одной из вершин 1, 3, 7. Тогда добавление ребра $[5, 10]$ к графу G' приводит к уничтожению не больше трех 5-антиклик. Напомним, что, согласно лемме 5, граф G' имеет хотя бы девять 5-антиклик. Следовательно, число 5-антиклик графа G не меньше 6.

Случай 8. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $Q_1=Q-[2, 5]$. Если v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 2, 5, тогда добавляем к графу ребро $[2, 5]$ и попадаем в условия предыдущего случая. Поэтому предположим, что v_0 смежна вершинам 2 и 5. Из того, что нет второго треугольника, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13. Следовательно, $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы восемь 4-антиклик. Вместе с v_0 получаем восемь 5-антиклик графа G.

Случай 9. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $R=G_1+[1, 10]$. Положим $G'=G-[1, 10]$. Граф G' не содержит треугольников. Ясно, что $G'-v_0=G_1$ и, согласно лемме 5, граф G' имеет хотя бы девять 5-антиклик. Вершина v_0 в графе G' не может быть смежной одновременно вершинам 1 и 10 (иначе получится второй треугольник). Если вершина v_0 смежна ровно одной из вершин 1 и 10, то ясно, что все 5-антиклики графа G', за исключением $\{1, 3, 5, 7, 10\}$, будут 5-антикликами и графа G. Следовательно, граф G содержит хотя бы восемь 5-антиклик.

Остается рассмотреть ситуацию, когда вершина v_0 несмежна ни одной из вершин 1 и 10. Если v_0 несмежна вершинам 3, 5, 7, то, согласно лемме 3, граф G' содержит хотя бы тринадцать 5-антиклик и из них не больше семи содержат пару $\{1, 10\}$. Поэтому граф G содержит хотя бы шесть 5-антиклик. Если v_0 смежна ровно одной из вершин 3, 5, 7, то, согласно лемме 4, граф G' содержит хотя бы двенадцать 5-антиклик. Однако в этом случае добавление ребра $[1, 10]$ к графу G' приводит к уничтожению не больше пяти 5-антиклик Следовательно, граф G будет иметь хотя бы семь 5-антиклик. Остается рассмотреть ситуацию, когда v_0 смежна больше одной из вершин 3, 5, 7. Тогда добавление ребра $[1, 10]$ к графу G' приводит к уничтожению не больше трех 5-антиклик. Напомним, что, согласно лемме 5, граф G' имеет хотя бы девять 5-антиклик. Следовательно, число 5-антиклик графа G не меньше 6.

Случай 10. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $R_1=R-[2, 7]$. Если v_0 несмежна хотя бы одной из вершин 2, 7, то добавляем к графу G ребро $[2, 7]$ и попадаем в условия предыдущего случая. Поэтому предположим, что v_0 смежна вершинам 2 и 7. Из того, что нет второго треугольника, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13. Следовательно, $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы шесть 4-антиклик. Вместе с v_0 получаем шесть 5-антиклик графа G.

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1. Если вершина v_0 является вершиной треугольника графа G, тогда, согласно теореме С, вершина v_0 принадлежит всем 5-антикликам графа G, так как любой из графов G_1 и $G_1+[9, 10]$ содержит две 5-антиклики. В этой ситуации теорема 1 вытекает из леммы 1.

Теперь предположим, что вершина v_0 не принадлежит треугольнику графа G. Тогда либо $G-v_0$ содержит единственный треугольник и не содержит 5-антиклик, либо $G-v_0$ содержит единственный треугольник и единственную 5-антиклику. В первом случае теорема 1 вытекает из леммы 6, а во втором — из леммы 7.

Теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2. Подграф $G-v_0$ не содержит треугольников. Так как граф G_0 не имеет 5-антиклик, из теоремы С следует, что $G-v_0$ совпадает либо с графом G_1 (рис. 2), либо с графом $G_1+[9, 10]$

Случай 1. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом $G_1+[9, 10]$. Подграф $\langle A(v_0)\rangle$ имеет единственное ребро (иначе получим больше одного треугольника). Из-за симметрии достаточно рассмотреть случаи, когда это ребро — некоторое из ребер $[4, 8]$, $[4, 3]$, $[4, 5]$, $[3, 6]$, $[9, 10]$, $[5, 9]$, $[10, 13]$, $[3, 9]$, $[3, 11]$, $[5, 13]$. Для первых восьми ребер рассуждения однотипные. Например, если единственное ребро подграфа $\langle A(v_0)\rangle$ есть $[4, 8]$, то $\bar{A}(v_0)$ содержит вершины 1, 3, 5, 7, 11, 12 (иначе получится второй треугольник). Следовательно, $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы четыре 4-антиклики. Вместе с v_0 получаем четыре 5-антиклики графа G. Так как $G-v_0=G_1+[9, 10]$ имеет две 5-антиклики, граф G содержит хотя бы шесть 5-антиклик.

Остается рассмотреть случаи, когда единственное ребро подграфа $\langle A(v_0)\rangle$ есть $[3, 11]$ или $[5, 13]$. В первом случае $\bar{A}(v_0)$ содержит вершины 2, 4, 6, 8, 9, 10, хотя бы одну из вершин 1, 12 и еще либо вершину 13, либо вершины 5 и 7 (иначе получим второй треугольник). Из-за симметрии достаточно рассмотреть ситуации, когда $\bar{A}(v_0)\supseteq\{2, 4, 6, 8, 9, 10, 1, 13\}$ или $\bar{A}(v_0)\supseteq\{2, 4, 6, 8, 9, 10, 1, 5, 7\}$. В обеих ситуациях $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы четыре 4-антиклики. Как и выше, заключаем, что G имеет хотя бы шесть 5-антиклик.

Во втором случае — когда единственное ребро подграфа $\langle A(v_0)\rangle$ есть $[5, 13]$, множество $\bar{A}(v_0)$ содержит вершины 2, 4, 6, 7, 9, 10 (иначе получим второй треугольник). Если $\bar{A}(v_0)$ содержит еще вершины 1 и 11, то $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы шесть 4-антиклик. Как и выше заключаем, что G имеет хотя бы восемь 5-антиклик.

Если $A(v_0)$ содержит ровно одну из вершин 1 и 11, из-за симметрии можно считать, что это есть вершина 1. Тогда $\bar{A}(v_0)$ содержит еще вершины 8 и 12 (иначе получим второй треугольник). Следовательно, $\bar{A}(v_0)\supseteq\{1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 12\}$ и $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы шесть 4-антиклик. Таким образом G снова имеет хотя бы восемь 5-антиклик.

Если $\bar{A}(v_0)$ не содержит ни одну из вершин 1 и 11, то $A(v_0)=\{1, 5, 11, 13\}$ (иначе получим второй треугольник). В этом случае граф G имеет ровно пять 5-антиклик. Ввиду симметрии, такой же результат получим и когда $A(v_0)=\{3, 7, 12, 13\}$.

Случай 2. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом G_1 (рис. 2). Если вершина v_0 несмежна некоторой из вершин 9, 10, то положим $G'=G+[9, 10]$. Ясно, что в графе G имеются не меньше 5-антиклик, чем в графе G'. Применяя для графа G' доказанное в случае 1, получим, что G имеет не меньше шести 5-антиклик, за исключением ситуаций, когда $A(v_0)=\{1, 5, 11, 13\}$ или $A(v_0)=\{3, 7, 12, 13\}$. В этих ситуациях G' имеет пять 5-антиклик, однако, G содержит еще, например, 5-антиклику $\{v_0, 2, 4, 9, 10\}$. Следовательно, G имеет хотя бы шесть 5-антиклик.

Пусть теперь вершина v_0 смежна обеим вершинам 9, 10. Если ни одна из вершин 9, 10 неинцидентна единственному ребру подграфа $\langle A(v_0)\rangle$, то $\bar{A}(v_0)$ содержит вершины 1, 3, 5, 7, 11, 12, 13. Следовательно, $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы четыре 4-антиклики. Вместе с v_0 получаем четыре 5-антиклики графа G. Так как $G-v_0=G_1$ имеет две 5-антиклики, граф G содержит хотя бы шесть 5-антиклик.

Пусть, наконец, единственное ребро подграфа $\langle A(v_0)\rangle$ инцидентно некоторой из вершин 9, 10. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть случаи, когда это ребро — некоторое из ребер $[9, 5]$, $[9, 3]$, $[10, 12]$, $[10, 13]$. Во всех этих случаях рассуждения однотипные. Например, если единственное ребро подграфа $\langle A(v_0)\rangle$ есть $[9, 5]$, то $\bar{A}(v_0)$ содержит вершины 1, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 13 (иначе получится второй треугольник). Следовательно, $\bar{A}(v_0)$ содержит хотя бы четыре 4-антиклики. Как и выше, заключаем, что G содержит хотя бы шесть 5-антиклик.

Теорема 2 доказана.

4. Об одном свойстве 14-вершинных графов с единственным треугольником

В этом пункте докажем:

Теорема 3. *Пусть G — 14-вершинный граф с единственным треугольником $\Delta=\{w_1, w_2, w_3\}$. Если любая вершина графа G принадлежит не более двум 5-антикликам, то некоторая из вершин w_1, w_2, w_3 треугольника Δ принадлежит ровно двум 5-антикликам.*

Доказательство. Согласно [1], граф G содержит хотя бы четыре 5-антиклики и поэтому, если любая 5-антиклика графа G имеет общую вершину с треугольником Δ, то утверждение теоремы 3 очевидно. Предположим, что 5-антиклика $\Delta_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ не имеет общую вершину с треугольником Δ. Любая из вершин v_i, $1\leq i\leq 5$ смежна не более одной из вершин w_1, w_2, w_3 (иначе получится второй треугольник). Кроме того, любая из вершин w_i, $1\leq i\leq 3$ смежна хотя бы одной из вершин v_i, $1\leq i\leq 5$ (иначе получим 6-антиклику, что невозможно). Из сделанных рассуждений вытекает, что одна из вершин w_1, w_2, w_3 смежна ровно одной из вершин v_i, $1\leq i\leq 5$. Предположим, что v_1 и w_1 смежны и что w_1 несмежна остальным вершинам Δ_1. Тогда $\{w_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ тоже является 5-антикликой. Эту 5-антиклику обозначим через Δ_2. Согласно условию теоремы 3, вершины v_2, v_3, v_4, v_5 не принадлежат другим 5-антикликам, кроме Δ_1 и Δ_2. Из этого вытекает, что любая из вершин w_2 и w_3 смежна ровно двум из вершин Δ_1. Из сделанных замечаний и из того, что нет второго треугольника, вытекает, что без ограничения общности можно предположить $v_2, v_3 \in \bar{A}(w_2)$, v_4, $v_5 \in \bar{A}(w_3)$ и, следовательно, подграф, порожденный множеством вершин $\Delta \cup \Delta_1$, совпадает с графом на рис. 6.

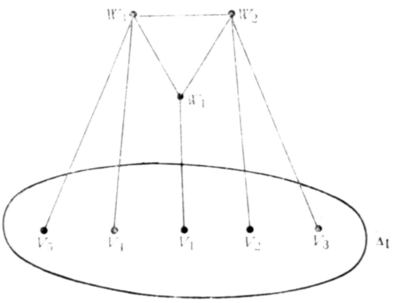

Рис. 6

Обозначим остальные вершины графа G через u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6. Заметим, что если вершины u_i и w_j, $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 3$ несмежны, тогда можно предположить:

$$(1) \qquad |\bar{A}(u_i) \cap \bar{A}(w_j)| \leq 5,$$

так как иначе, согласно [11], $\bar{A}(u_i) \cap \bar{A}(w_j)$ содержит две 3-антиклики, которые вместе с u_i и w_j образуют две 5-антиклики, содержащие вершину w_j, и теорема 3 будет доказанной.

Покажем, что вершина w_2 несмежна ни одной из вершин u_i, $1 \leq i \leq 6$. Допустим противное и пусть, например, w_2 и u_1 смежны. Тогда u_1 несмежна вершинам w_1, v_2, v_3. Из того, что v_2 и v_3 не принадлежат другим 5-антикликам, кроме Δ_1 и Δ_2, вытекает, что u_1 смежна v_4 и v_5. Заметим, что $|A(u_1)| \leq 4$ (иначе $A(u_1)$ содержит 5-антиклику, отличную от Δ_1 и Δ_2 и содержащую v_4 и v_5). Можно считать, что $|A(w_3)| \leq 5$ (иначе утверждение теоремы очевидно, так как $\bar{A}(w_3)$ содержит только одно ребро). Из сделанных рассуждений вытекает $|\bar{A}(w_3) \cap \bar{A}(u_1)| \geq 6$, что противоречит (1). Аналогично доказывается, что w_3 несмежна тоже ни одной из вершин u_i, $1 \leq i \leq 6$. Итак, мы доказали, что

$$(2) \qquad |A(w_2)| = |A(w_3)| = 4.$$

Вершина w_1 смежна хотя бы одной из вершин u_i, $1 \leq u_i \leq 6$ (иначе $|\bar{A}(w_1)| = 10$ и, согласно доказанному в [4], $\bar{A}(w_1)$, содержит хотя бы пять 4-антиклик и, значит, w_1 принадлежит пяти 5-антикликам, что противоречит условию). Поэтому предположим, что w_1 и u_1 смежны. Вершина u_1 смежна хотя бы одной из вершин v_2, v_3, v_4, v_5 (иначе вместе с этими вершинами u_1 составляет 5-антиклику, отличную от Δ_1 и Δ_2). Без ограничения общности можем предположить, что u_1 и u_2 смежны. Тогда $A(u_1) \cap A(w_2) \supseteq \{w_1, v_2\}$. Если $|A(u_1)| \leq 4$, тогда $|\bar{A}(u_1) \cap \bar{A}(w_2)| \geq 6$, что противоречит (1). Если $|A(u_1)| \geq 5$, тогда следует, что $A(u_1)$ является 5-антикликой. Так как $v_2 \in A(v_1)$ и $v_1 \notin A(u_1)$, то $A(u_1) = \Delta_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, w_1\}$ (иначе v_2 будет принадлежать трем 5-антикликам). Мы доказали, что $A(u_1) \cap A(w_2) \supseteq \{w_1, v_2, v_3\}$. Из этого и (2) вытекает $|\bar{A}(w_2) \cap \bar{A}(u_1)| = 6$, что противоречит (1).

Теорема 3 доказана.

5. Доказательство основной теоремы и следствие.

Доказательство основной теоремы. Согласно теореме 3 представляются следующие две возможности:

Случай 1. Граф G содержит вершину v_0, принадлежащую хотя бы трем 5-антикликам. Рассмотрим подграф $G - v_0$. Если этот подграф содержит хотя бы две 5-антиклики, то теорема доказана. Иначе основная теорема вытекает из теоремы 1.

Случай 2. Граф G содержит вершину v_0, принадлежащую треугольнику графа G и двум его 5-антикликам. Расмотрим подграф $G - v_0$. Если этот подграф содержит хотя бы три 5-антиклики, то теорема доказана. Иначе теорема вытекает из теоремы 2 или теоремы 1.

Следствие. *Пусть G — 15-вершинный граф с единственным треугольником. Тогда число 5-антиклик графа G не меньше 8.*

Доказательство. Согласно теореме 3 возможны следующие две ситуации:

Случай 1. Граф G содержит вершину v_0, принадлежащую трем 5-антикликам и непринадлежащую треугольнику. Рассмотрим подграф $G—v_0$. Согласно основной теореме, этот подграф имеет хотя бы пять 5-антиклик. Следовательно, граф G имеет хотя бы восемь 5-антиклик.

Случай 2. Граф G содержит вершину v_0, принадлежащую треугольнику и хотя бы двум его 5-антикликам. Рассмотрим подграф $G—v_0$. Этот подграф не содержит треугольников. Согласно доказанному в [1], подграф $G—v_0$ содержит хотя бы шесть 5-антиклик. Следовательно, граф G имеет хотя бы восемь 5-антиклик

Следствие доказано.

Утверждение следствия нельзя значительно усилить, так как существует 15-вершинный граф с единственным треугольником и девятью 5-антикликами. Для построения такого графа достаточно к графу на рис. 7, который по другому поводу построен в [2], добавить новую вершину смежную вершинам 1, 5, 9, 13, 14.

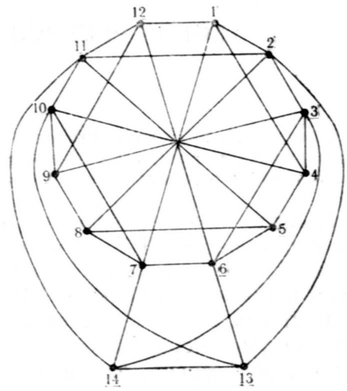

Рис. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. О числе 5-антиклик в 14-вершинном графе с неболее чем одной 3-кликой. — В: Математика и математическо образование. С., 1983, 129—132
2. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О минимуме числа 5-антиклик 14-вершинных графов без треугольников. *Доклады БАН*, **36**, 1983, 1155—1157.
3. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов, И. Ж. Пашов. Единственность 13-вершинного графа с числом независимости 4 и с одним треугольником. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 1363—1366.
4. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. Об одном экстремальном свойстве графа Петерсена. *Год. Соф. Унив.*, **75** (в печати).
5. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. О числе 5-вершинных независимых множеств 13-вершинных графов без треугольников. *Сердика*, **10**, 1984, 357—367.
6. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. Описание 13-вершинных графов с одним треугольником и с одной 5-антикликой. *Год. Соф. Унив*, **76** (в печати).
7. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О числе дискретных 5-вершинных подграфов графа без треугольников. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 909—912.
8. Н. Д. Ненов, И. Ж. Пашов, Н. Г. Хаджииванов. О некоторых экстремальных двуцветных раскрасках ребер полного графа с тринадцатью вершинами. *Год. ВПИ Шумен*, **7Б**, 1983, 53—65.
9. G. Kèry. Ramsey egy gràfelméleti tételérol. *Mat. Lapok*, **15**, 1964, 204—224.
10. R. E. Greenwood, A. M. Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Can. J. Math.*, **7**, 1955, 1—7.
11. A. Goodman. On sets of acquintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly*, **66**, 1959, 778—783.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. К. 373*

Поступила 11. 12. 1984