Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ ЧЕРНОВА

ЕЛИСАВЕТА ПАНЧЕВА

Среди свойств обобщенной функции Чернова в настоящей работе рассмотрены те, которые приводят к пониманию ее основного свойства: описывать предельное поведение вероятностей больших уклонений.

В своей, ставшей уже классической, работе [5] в качестве меры отклонения выборочного среднего Херман Чернов вводит функцию

$$\rho(x)=\inf\{e^{-tx}.Ee^{tX}: t\in \mathrm{R}_1\},\quad x\in \mathrm{R}_1,$$

которая позже была названа его именем. Здесь X случайная величина со значениями в R_1.

Целью настоящей работы является определение и исследование свойств функции, являющейся мерой больших уклонений для случайных величин, необязательно независимых и однаково распределенных. Модель, в рамках которой будем работать дальше, следующая:

На заданном вероятностном пространстве $[\Omega, \mathscr{A}, P]$ определены случайные векторы (сл. в.) $X_1, X_2, \dots$, где $X_n: [\Omega, \mathscr{A}]\to[\mathrm{R}_d, \mathscr{B}_d]$. Пусть $\langle .,.\rangle$ — скалярное произведение в R_d. Тогда функция $R_n(t)=E\exp\langle t, X_n\rangle, t\in \mathrm{R}_d$, является производящей функцией моментов (п. ф. м.) случайного вектора X_n. Если A — подмножество R_d, то через ∂A, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$, $\operatorname{conv} A$ будем обозначать соответственно его границу, внутренность, замыкание, выпуклую оболочку. Для любого $A\in\mathscr{B}_d, P_n(A): =P(X_n\in A)$ является порожденной X_n вероятностной мерой на $\mathscr{B}_d$. Под $\operatorname{Supp} X_n$ будем понимать наименьшее замкнутое множество $C\in\mathscr{B}_d$, для которого $P_n(C)=1$.

Для случайной последовательности $\{X_n\}_n$ вводим следующие предположения:

H_1. Существует открытое ограниченное выпуклое множество $T\subset \mathrm{R}_d$, содержащее нуль, такое, что $R_n(t)<\infty$, $\forall t\in T$, $\forall n$.

H_2. Последовательность $R_n^{1/n}(t)$ равномерно сходится в T для любого t и предельная функция $r(t): =\lim_n \sqrt[n]{R_n(t)}<\infty$ строго положительна на $\operatorname{cl} T$.

H_3. Последовательность X_n/n не вырождается асимптотически, т. е.

$$\operatorname{int}[\lim_n \inf(\operatorname{Supp}(X_n/n))]\neq\emptyset.$$

Смысл этих предположений следующий: H_1 требует, чтобы хвост распределения X_n сходился к нулю экспоненциально; из H_2 сразу следует, что $\log r$ является собственной замкнутой выпуклой на T-функцией; в H_3 под $\operatorname{int}[\cdot]$ подразумевается внутренность в аффинной оболочке $[\cdot]$.

Определение. *Действительную функцию* $\rho: \mathrm{R}_d\to \mathrm{R}_1$

(1) $$\rho(x)=\inf\{e^{-\langle t, x\rangle}.r(t): t\in T\}$$

будем называть обобщенной функцией Чернова последовательности $\{X_n\}_n$.

При исследовании свойств $\rho(x)$ будем использовать как наиболее естественное и удобное средство теорию выпуклого анализа (напр. [4], [1]).

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с. 216—222.

Область сходимости функции $r(t)$ (и $\log r(t)$) является выпуклым множеством $\operatorname{dom} r = \{t \in \mathsf{R}_d : r(t) < \infty\}$, $0 \in \operatorname{dom} r$ и $\operatorname{int} \operatorname{dom} r = T$. Аналогично определим выпуклое множество $\operatorname{dom} \rho = \{x \in \mathsf{R}_d : \rho(x) > 0\}$.

Обобщенную функцию Чернова, определенную формулой (1), можно также определить эквивалентной формулой

$$(2) \qquad -\log \rho(x) = \sup \{\langle t, x\rangle - \log r(t) : t \in \operatorname{dom} r\}.$$

Таким образом имеет место

Свойство 1. $-\log \rho(x)$ *сопряженная* $\log r(t)$ *и тем самым также является выпуклой замкнутой функцией.*

Следствие. *Для любого* $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$ *функция* $\rho(x)$ *непрерывна.*

Так как для замкнутых выпуклых функций операция сопряжения „замкнута", то имеет место формула обращения

$$(3) \qquad \log r(t) = \sup \{\langle t, x\rangle + \log \rho(x) : x \in \operatorname{dom} \rho\}.$$

Обозначим через ρ_n классическую функцию Чернова x_n, т. е.

$$\rho_n(x) = \inf \{E \exp(\langle t, X_n - x\rangle) : t \in T\}.$$

Свойство 2. *Для* $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$: $\sqrt[n]{\rho_n(nx)} \underset{n}{\to} \rho(x)$.

Доказательство. На основании H_2 имеем $n^{-1} . \log R_n(t) \underset{n}{\to} \log r(t)$. Из равенства $-\log \rho_n(nx) = \sup\limits_t \{\langle t, nx\rangle - \log R_n(t)\} = n . \sup\limits_t \{\langle t, x\rangle - n^{-1} . \log R_n(t)\}$ видно, что функция

$$(4) \qquad l_n(x) := -n^{-1} . \log \rho_n(nx)$$

сопряжена функции $n^{-1} . \log R_n(t)$. Из теоремы 10 [1] следует, что последовательность сопряженных функций $l_n(x)$ сходится к сопряженной функции $\log r(t)$, являющейся по определению $-\log \rho(x)$, т. е. $n^{-1} . \log \rho_n(nx) \underset{n}{\to} \log \rho(x)$, $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$, что требовалось доказать.

Теорема 1. *Имеет место следующее равенство*:

$$\operatorname{conv} [\liminf_n (\operatorname{Supp} (X_n/n))] = \operatorname{cl} \operatorname{dom} \rho.$$

Для доказательства нужно припомнить следующее:

i) Опорной функцией данного выпуклого множества C называется функция $\delta^*(y|C) = \sup \{\langle x, y\rangle : x \in C\}$, $y \in \mathsf{R}_d$. Она также является выпуклой функцией. Справедлива

Лемма 1. *Если опорные функции двух выпуклых множеств* C_1 *и* C_2 *совпадают, т. е.* $\delta^*(y|C_1) = \delta^*(y|C_2)$, $y \in \mathsf{R}_d$, *то* $C_1 = C_2$.

Доказательство опускаем ввиду его элементарности.

Рецессивная функция $l_n 0^+(t)$ замкнутой выпуклой функции $n^{-1} . \log R_n(t)$ определяется в [4] следующим образом:

$$(5) \qquad l_n 0^+(t) = n^{-1} . \lim \lambda^{-1} . \log R_n(\lambda t), \ \lambda \to \infty, \ t \in T.$$

Так как сопряженная функция $n^{-1} . \log R_n(t)$ является в точности функцией $l_n(x)$, определенной формулой (4), то верна (см. теорему 13.3 из [4])

Лемма 2. $l_n 0^+(t) = \delta^*(t|\operatorname{cl} \operatorname{dom} l_n)$

iii) Легко доказать (см. теорему 4 из [1]) верность следующего утверждения:

Лемма 3. *Пусть* X *случайная величина с п. ф. м.* $R(t)$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} . \log R(t) = \operatorname{ess} \sup X.$$

Теперь можем приступить к доказательству теоремы 1. Положим $S:=\lim_n \inf \operatorname{Supp}(X_n/n)$. Пусть $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$, т. е. $\rho(x)>0$. Из свойства 2 вытекает существование такого $n_0=n_0(x)$, что для $n>n_0$ выполнено $\sqrt[n]{\rho_n(nx)}>0$, т. е.

(6a) $$n^{-1}.\log \rho_n(nx)>-\infty, \quad \forall x \in \inf \operatorname{dom} \rho, \quad n>n_0.$$

Уже знаем, что рецессивная функция $n^{-1}.\log R_n$ задается формулой (5). При фиксированном t и переменном λ, $R_n(t\lambda)$ можно рассматривать как п. ф. м. случайной величины $\langle t, X_n\rangle$. Используя лемму 3, получаем

$$l_n0^+(t)=n^{-1}.\sup\{\langle t, x\rangle : x \in \operatorname{Supp} X_n\}$$
$$=\sup\{\langle t, x\rangle : x \in \operatorname{conv} \operatorname{Supp}(X_n/n)\}=\delta^*(t|\operatorname{conv}\operatorname{Supp}(X_n/n)).$$

С другой стороны, согласно лемме 2, имеет место $l_n0^+(t)=\delta^*((t \operatorname{cl}\operatorname{dom} l_n)$ и следовательно, применяя лемму 1, получаем равенство множеств

(6б) $$\operatorname{conv}\operatorname{Supp}(X_n/n)=\operatorname{cl}\operatorname{dom} l_n.$$

Совместно (6a) и (6б) утверждают, что любой $x \in \inf \operatorname{dom}\rho$ принадлежит и conv $\operatorname{Supp} X_n/n)$ для $\forall n>n_0(x)$ и следовательно принадлежит conv S.

Наоборот: Для $x \in S$ существует $n_0(x)$ такое, что для $\forall n>n_0$ $x \in \operatorname{Supp}(X_n/n)$. Следовательно, из (6б) следует, что $x \in \operatorname{cl}\operatorname{dom} l_n$, $\forall n>n_0$, т. е. $\sqrt[n]{\rho_n(nx)}>0$. Отсюда вытекает, что и $\exp\{-\langle t, x\rangle\}.\sqrt[n]{R_n(t)}>0$, $\forall t \in T$ и $n>n_0$. В H_2 мы предположили, что $r(t)>0 \; \forall t \in T$. Тогда и $\rho(x)>0$ (так как T—ограниченное множество, а x—фиксированный вектор), следовательно $x \in \operatorname{cl}\operatorname{dom}\rho$.

Таким образом теорема 1 доказана.

Из выпуклого анализа известно (теорема 23.4 из [4]), что любая собственная выпуклая функция f субдифференцируема в $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Обозначим множество всех субградиентов $\log r$ (соответственно $-\log\rho$) в точке t (соответственно x) через $\partial \log r(t)$ (соответственно $\partial(-\log\rho(x))$). Любое $t \in \partial(-\log\rho(x))$ будем обозначать через t_x, аналогично: x_t. Имеет место

Свойство 3. *Функция* $\langle t, x\rangle-\log r(t)$ *достигает своего максимума по* t *в точке* t_x, *т. е.*

(7) $$-\log\rho(x)=\langle t_x, x\rangle-\log r(t_x).$$

Аналогично имеем

(7a) $$\log r(t)=\langle t, x_t\rangle+\log\rho(x_t).$$

Действительно, субградиентное неравенство для $x \in \partial \log r(t)$

$$\log r(t) \geqq \log r(t_x)+\langle x, t-t_x\rangle, \; \forall t \in T,$$

можно записать еще в виде:

$$\langle x, t_x\rangle-\log r(t_x) \geqq \langle x, t\rangle-\log r(t), \quad \forall t \in T,$$

откуда, очевидно, вытекает свойство 3.

Замечания: 1. Субградиентное отображение не относится к виду $\operatorname{int}\operatorname{dom}\rho \to \operatorname{int}\operatorname{dom} r$, т. е. если $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\rho$, то t_x может принадлежать и ∂T, но всегда принадлежит $\operatorname{cl} T \cap \operatorname{dom} r$, откуда вытекает, что $r(t_x)<\infty$.

2. Субградиентное отображение многозначно. И даже если $r(t)$ дифференцируема в t_x, т. е. $\partial \log r(t_x)=\{\operatorname{grad}\log r(t_x)\}$, нельзя говорить об однозначности, так как $\log r(t)$ может и не быть строго выпуклой функцией.

Принимая во внимание эти замечания, докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Для любого* $x \in \operatorname{int} n^{-1} \operatorname{dom} \rho_n$ *существует решение* $t_x^{(n)}$ *дифференциального уравнения* $\operatorname{grad} n^{-1} \log R_n(t) = x$.

Доказательство. Для $\forall x \in \operatorname{int} n^{-1} \operatorname{dom} \rho_n$ имеем $\partial(-n^{-1} . \log \rho_n(nx)) \neq \emptyset$, т. е. существует элемент $t_x^{(n)} \in \partial(-n^{-1} . \log \rho_n(nx))$, о котором мы знаем, что а) функция $\langle t, nx\rangle - \log R_n(t)$ достигает своего максимума при $t = t_x^{(n)}$, б) $x \in \partial(n^{-1} . \log R_n(t_x^{(n)}))$, так как субградиентное отображение $t \to \partial(n^{-1} . \log R_n(t))$ является обратным отображению $x \to \partial(-n^{-1} . \log \rho_n(nx))$, согласно следствию 23.5.1 из [4]. Так как $\log R_n$ дифференцируема для $\forall t \in T$, то $\partial(n^{-1} . \log R_n(t_x^{(n)}))$ содержит только один элемент x, $x = \operatorname{grad} n^{-1} . \log R_n(t_x^{(n)})$, что и требовалось доказать.

Пусть x — фиксированный вектор из $\operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$. Из свойства 2 вытекает, что существует $n_0 = n_0(x)$, такое, что для $n > n_0$ $x \in \operatorname{int} n^{-1} . \operatorname{dom} \rho_n$. Тогда между t_x и $t_x^{(n)}$, определенными формулами $\rho(x) = \exp(-\langle t_x, x\rangle) . r(t_x)$ и $\rho_n(nx) = \exp(-\langle t_x^{(n)}, nx\rangle) . R_n(t_x^{(n)})$, существует, согласно теореме 24.5 из [4], следующее ассимптотическое соотношение:

Свойство 4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и сколь угодно большого* n

$$t_x^{(n)} \in \partial(-\log \rho(x)) + \varepsilon B,$$

где B — *единичный евклидов шар в* R_d.

Из того, что $t_x^{(n)} \in \partial(-n^{-1} . \log \rho_n(nx))$ и $n^{-1} \log \rho_n(nx) \to \log \rho(x)$, $n \to \infty$ еще не следует, что существует $\lim t_x^{(n)}$. В общем случае последовательность $\{t_x^{(n)}\}_n$ может и не сходится, если $\partial \log \rho(x)$ содержит более одного элемента. Свойство 4 утверждает, что все предельные точки последовательности $\{t_x^{(n)}\}_n$ близки к $\partial(-\log \rho(x))$.

Из $r(0) = \lim \sqrt[n]{R_n(0)} = 1$ и (3) вытекает

Свойство 5. $\sup\{\rho(x) : x \in \operatorname{dom} \rho\} = 1$, т. е. $\rho(x)$ *достигает своей верхней границы, если* $0 \in \operatorname{dom} r$.

Последнее обеспечивается условием H_1. Из H_1 вытекает также, что для $\forall n$ существует EX_n, $EX_n = \operatorname{grad} \log R_n(0)$. Получаем $\rho(EX_n) = 1$. Если $\log r$ дифференцируема в нуле и $m = \operatorname{grad} \log r(0)$, то существует (согласно теореме 24.5 из [4]) предел $\lim_n \frac{1}{n} EX_n$, и он равен m.

Однако дифференцируемость в нуле не предполагается. Независимо от этого может быть получена сходимость математического ожидания X_n/n, но относительно так называемого сопряженного вероятностного распределения X_n, определяемого формулой

$$P_{n,t}(A) := [R_n(t)]^{-1} \int_A \exp[\langle t, X_n\rangle] dP_n, \quad t \in T,\ A \in \mathscr{B}_d. \tag{8}$$

Пусть $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$ — заданный вектор. Относительно сопряженного с $t = t_x^{(n)}$ вероятностного распределения $P_{n, t_x^{(n)}}$, математическое ожидание X_n/n равняется заданному вектору x. Действительно

$$E_{t_x^{(n)}} X = \int_{\mathsf{R}_\alpha} z P_{n, t_x^{(n)}}(dz) = R_n^{-1}(t_x^{(n)}) \int_{\mathsf{R}_\alpha} z \exp[\langle t_x^{(n)}, z\rangle] \, dP_n(z)$$

$$= \operatorname{grad} \log R_n(t_x^{(n)}) = nx.$$

Имеет место (см. [2]) следующий аналог закона больших чисел:

Лемма 5. *Пусть* $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \rho$. *Последовательность* $\{X_n\}_n$ *сл. в., удовлетворяющих условиям* $H_1 - H_3$, *сходится к* x *относительно семейства сопряженных вероятностных распределений* $\{P_{t_x^{(n)}}\}$, *т. е.* $P_{t_x^{(n)}}(X_n \notin n . U_\varepsilon(x) \xrightarrow[n]{} 0$.

В качестве основного свойства обобщенной функции Чернова выделим ее свойство описывать предельное поведение вероятностей больших уклонений. Иллюстрируют это следующие две теоремы (доказанные в [2] и [3] соответственно).

Обозначим $\rho(A):=\sup\{\rho(x): x\in A\}$.

Определение. *Множество* $A\in\mathscr{B}_d$ *называется* ρ-*регулярным, когда* $\rho(A)=\rho(\mathrm{cl}\,A)$.

С помощью леммы 5 доказывается

Теорема 2. *Пусть случайная последовательность* $\{X_n\}_n$ *векторов в* R_d *удовлетворяет условиям* $\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_3$. *Тогда для любого* ρ-*регулярного открытого множества* $A\in\mathscr{B}_d$

$$\lim\sqrt[n]{P(X_n\in nA)}=\rho(A),\quad n\to\infty.$$

Эта теорема является обобщением классической теоремы Чернова—Бахадура для вероятностей больших уклонений. Доказательство см. в [2].

Пусть φ — измеримая функция относительно σ-алгебры, порожденной выборочным средним $S_n/n=n^{-1}\sum_1^n X_k$. Асимптотическое поведение условных вероятностей больших уклонений вида

$$P(S_n\in nA\mid \sum_1^n \varphi(X_k)\in nU),\quad A,\,U\in\mathscr{B}_d$$

определяется посредством так называемой сопряженной функции Чернова, которая будет определена ниже. Введем обозначения

$$H_n:=\sum_1^n\varphi(X_k),\quad Q_n(U):=P(H_n\in U)$$

и предположим, что случайная последовательность $\{H_n\}_n$ удовлетворяет условиям $\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_3$, где $R_n(t)=E\exp[\langle t,\,H_n\rangle]$, $r(t)=\lim\limits_n\sqrt[n]{R_n(t)}$, $t\in T$ и $\rho(x)$ — соответственная обобщенная функция Чернова.

Определение. *Множество* $U\in\mathscr{B}_d$ *будем называть* ρ-*унимодальным, если существует единственное решение* u_0, $u_0\in\mathrm{int\,dom}\,\rho$, *функционального уравнения* $\rho(u_0)=\rho(U)$, *и в этой точке* ρ *дифференцируема.*

Предположим, что множество U ρ-унимодально и обозначим $t_0:=-\mathrm{grad}\log\rho(u_0)$. Из леммы 4 вытекает существование решения $t_{u_0}^{(n)}$ дифференциального уравнения $\mathrm{grad}\,n^{-1}\log R_n(t)=u_0$, а из свойства 4 и унимодальности имеем

$$\lim t_{u_0}^{(n)}=t_0,\quad n\to\infty. \tag{9}$$

Обозначим через T_{t_0} множество

$$T_{t_0}=\{t\in T:\, t+t_0\in T\},\quad \mathbf{0}\in T_{t_0},\ T_{t_0}\subset T,$$

через $Q_{n,t_{u_0}^{(n)}}$ — сопряженное вероятностное распределение

$$Q_{n,t_{u_0}^{(n)}}=R_n^{-1}(t_{u_0}^{(n)})\int_A\exp[\langle t_{u_0}^{(n)},\,z\rangle]\,dQ_n(z),$$

а через $R_{n,t_{u_0}^{(n)}}$ — п. ф. м. H_n относительно $Q_{n,t_{u_0}^{(n)}}$, т. е.

$$R_{n,t_{u_0}^{(n)}}(s)=\int_{\mathsf{R}_d}\exp[\langle s,\,H_n\rangle]\,dQ_{n,t_{u_0}^{(n)}}.$$

Тогда имеем

$$R_{n,t_{u_0}^{(n)}}(s) = \frac{R_n(s + t_{u^0}^{(n)})}{R_n(t_{u_0}^{(n)})} < \infty, \quad \forall s \in T_{t_0}.$$

Отсюда, из H_2 и из (9), вытекает

$$\sqrt[n]{R_{n,t_{u_0}^{(n)}}(s)} \xrightarrow[n]{} \frac{r(s+t_0)}{r(t_0)} := r_{t_0}(s), \quad s \in T_{t_0}.$$

Определение. *Обобщенную функцию Чернова случайной последовательности $\{H_n\}_n$ относительно семейства сопряженных распределений $\{Q_{n,t_{u_0}^{(n)}}\}_n$, а именно $\rho_{t_0}(u) = \inf\{e^{-\langle s,u\rangle} . r_{t_0}(s) : s \in T_{t_0}\}$, будем называть сопряженной функцией Чернова.*

Теперь мы уже готовы сформулировать и последнюю теорему.

Теорема 3. *Пусть удовлетворены условия* $H_1 - H_3$, *а открытые множества U и $\varphi(A)$ являются соответственно ρ-унимодальным и ρ_{t_0}-регулярным. Тогда имеет место*

$$\lim_n \sqrt[n]{P\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_k \in A \mid \frac{1}{n}\sum_1^n \varphi(X_k) \in U\right)} = \rho_{t_0}(\varphi(A)). \tag{10}$$

Наконец, приведем некоторые из основных свойств сопряженной функции Чернова:

а) $\rho_{t_0}(u) = \inf\{e^{-\langle t,u\rangle} . r_{t_0}(t) ;\ t \in \operatorname{dom} r_{t_0}\} = \dfrac{e^{\langle t_0,u\rangle}}{r(t_0)} . \rho(u),$

т. е. $\{\rho_t(u) : t \in T\}$ является семейством обобщенных функций Чернова, порожденным ρ и соответствующим семейству сопряженных распределений $\{Q_t : t \in T\}$;

б) $\operatorname{dom} \rho_{t_0} = \operatorname{dom} \rho$, как видно из а);

в) $\rho_{t_0}(u_0) = 1$ для $u_0 \in \partial \log r(t_0)$, что и следовало ожидать, так как $n^{-1} . E_{t_{u_0}^{(n)}}(H_n) \to u_0$, $n \to \infty$. Это свойство лучше всего демонстрирует роль сопряженной функции Чернова, а именно:

Пусть C — ρ-регулярное открытое множество, а c_0 и t_0 определены следующим образом: $\rho(c_0) = \sup\{\rho(c) : c \in C\}$, $t_0 \in \partial(-\log \rho(c_0))$. Тогда $\rho_{t_0}(c_0) = \sup\{\rho(c) : c \in \operatorname{dom} \rho\} = 1$.

Замечание. Если $u_0 \in \varphi(A)$, то (10) справедливо и без условия ρ-унимодальности множества U. Действительно, пусть $t_0' \neq t_0''$ и $t_0', t_0'' \in \partial(-\log \rho(u_0))$. Из свойства 5 вытекает:

$$\sup\{\rho_{t_0'}(u) : u \in \varphi(A)\} = \rho_{t_0'}(u_0) = \rho_{t_0''}(u_0) = 1;$$

г) Если $u_0 \notin \varphi(A)$ и $\log \rho$ недифференцируема в u_0, то для $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \partial(-\log \rho(u_0))$ имеет место неравенство $\rho_{t_1}(\varphi(A)) \neq \rho_{t_2}(\varphi(A))$, т. е. (10) уже неверно.

В заключение добавим, что обобщенную функцию Чернова можно рассматривать и в качестве меры энтропии случайных последовательностей, как это показано в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Bartfai. Connection between the convex analysis and the theory of large deviation. Preprint No 2, Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1977.
2. Е. Панчева. Функцията на Чернов в гранични теореми за вероятности на големите отклонения (дисертация).
3. Е. Панчева. Функцията на Чернов като мярка за ентропия на редици от случайни вектори. — В: Мат. и мат. образование, 1983. С., 214—221.
4. Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. М., 1973.
5. H. Chernoff. A measure of asymptotic efficiency for test of a hypothesis based on the sum of observations. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 1952, 493—587.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 14. 2. 1984