Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОПТИМАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА

МИРОСЛАВ С. ТАНУШЕВ, НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ

Исследованы математические модели для контроля качества в некоторых процессах. Доказаны теоремы о существовании и единственности оптимальных моментов для контроля качества и приведены алгоритмы для их определения.

1. Постановка задачи. Основной целью данной работы является описание математических моделей, возникающих при исследовании качества продукции в некоторых производственных процессах. При этом обнаруживаются чисто математические проблемы, которые представляют самостоятельный интерес. Это прежде всего вопрос о нахождении оптимальных моментов для контроля качества, что, с другой стороны, имеет большое значение для практики.

1.1. Дискретные процессы. Часто при последовательной обработке данного изделия можно выделить n последовательных технологических операций, в каждой из которых с вероятностью p могут появиться дефекты. Вероятность годности изделия после k последовательных независимых операций будет $q^k=(1-p)^k$, а вероятность дефектности — $1-q^k=1-(1-v)^k$, $k=1,2,\ldots,n$. Пусть X_k означает число годных изделий после к-ой очередной операции, где $X_0=N$. Нетрудно заметить, что $\{X_k\}$ является цепью Маркова (см. напр. [4]) с вероятностями перехода

$$p_{ij}(m)=\mathsf{P}\{X_{k+m}=j\mid X_k=i\}=\binom{i}{j}q^{mj}(1-q^m)^{i-j}, \tag{1.1}$$

$$j=0,1,\ldots,i;\quad m=1,2,\ldots,$$

откуда получаем

$$\mathsf{P}\{X_k=l\mid X_0=N\}=\binom{N}{l}q^{kl}(1-q^k)^{N-l}, \tag{1.2}$$

$$l=0,1,\ldots,N;\ k=1,2,\ldots,n.$$

Теперь из (1.2) находим сразу математическое ожидание и дисперсию годных изделий

$$\mathsf{E}X_k=Nq^k,\ \mathsf{D}X_k=Nq^k(1-q^k),\ k=1,2,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Пусть цена проверки (контроля) годности одного изделия равна c, а стоимость выработки изделия при одной операции равна d.

Рассмотрим два разных способа контроля:

1) Все изделия проверяются только в конце процесса (т. е. после n операций). Тогда общая себестоимость X_n годных изделий будет $N(nd+c)$, а производственная себестоимость одного изделия является случайной величиной

$$w_1=N(nd+c)/X_n. \tag{1.4}$$

2) Проверка годности производится через k операций, если $n=km$. При этом дефектные изделия выделяются и в дальнейшем обрабатываются только годные изделия. Введем обозначение

$$Y_m = N + X_k + X_{2k} + \cdots + X_{(m-1)k}. \tag{1.5}$$

Тогда стоимость контроля будет $Y_m\, c$, а стоимость выработки — $Y_m kd$, т. е. общая себестоимость X_n годных изделий будет $Y_m(kd+c)$. Следовательно, для себестоимости одного изделия получаем

$$w_2 = X_m(kd+c)/X_n. \tag{1.6}$$

Рассмотрим отношение новой себестоимости к старой

$$R = w_2/w_1 = Y_m(kd+c)/N(nd+c). \tag{1.7}$$

Теперь из (1.3), (1.5) и (1.7) нетрудно вычислить, что

$$r = \mathsf{E}\, R = (k\beta+1)(1-q^n)/(n\beta+1)(1-q^k), \tag{1.8}$$

где

$$\beta = d/c, \tag{1.9}$$

т. е. является отношением стоимости обработки одного изделия при одной операции к стоимости контроля одного изделия. Очевидно, что вторая процедура будет лучшей, если $r<1$.

Интересно рассмотреть некоторые частные случаи:

а) Пусть $d=0$. Тогда $r=(1-q^n)/(1-q^k)>1$, т. е. первая процедура является лучшей (проверяй изделия только в конце производства!);

б) Пусть $c=0$. Тогда $r=k(1-q^n)/n(1-q^k)=(1-x^m)/m(1-x)$, где $0<x=q^k<1$. Теперь нетрудно заметить, что $r=(1+x+\cdots+x^{m-1})/m<1$, т. е. лучше предпочесть вторую процедуру: „проверяй все изделия при любой возможности!“ (т. н. сплошная проверка [1, § 1.2]).

Исследование общего дискретного случая пока оставим в сторону, потому что, как это будет показано в дальнейшем, все результаты, полученные для непрерывного случая, легко можно перенести на дискретный случай. Теперь только заметим, что таким образом поставленная проблема допускает следующие обобщения:

Пусть p_i вероятность появления дефекта при i-ой операции. Тогда с вероятностью $q_i=1-p_i$ изделие остается годным при i ой операции, а после первых l независимых операций эта вероятность будет $Q_l=\prod_{k=1}^{l} q_k=\prod_{k=1}^{l}(1-p_k)$. Ясно, что теперь $\{X_k\}$ будет неоднородной цепью Маркова, где вместо (1.1), (1.2) и (1.3) имеют место

$$p_{ij}(k,m) = \mathsf{P}\{X_{k+m}=j \mid X_k=i\} = \binom{i}{j}\Big(\prod_{s=i}^{k+m} q_s\Big)^{j}\Big(1-\prod_{s=i}^{k+m} q_s\Big)^{i-j}, \tag{1.1'}$$

$$\mathsf{P}\{X_k=l \mid X_0=N\} = \binom{N}{l} Q_k^l\,(1-Q_k)^{N-l},\quad l=0,1,\ldots,N, \tag{1.2'}$$

$$\mathsf{E}\, X_k = NQ_k,\quad \mathsf{D}\, X_k = NQ_k(1-Q_k),\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{1.3'}$$

Отсюда нетрудно вычислить, что вместо (1.8) получим

$$r = \mathsf{E}\, R = \{(k\beta+1)/(n\beta+1)\}\sum_{i=0}^{m-1} Q_{ik},\quad Q_0=1. \tag{1.8'}$$

1.2. Непрерывные процессы. Рассмотрим непрерывный во времени процесс $Z(t)$, $t \geqq 0$, где $Z(t)$ обозначает число годных изделий в момент t, а $Z(0)=N$. Предполагается, что каждое годное изделие независимо от остальных с вероятностью $\alpha\,\Delta t + o(\Delta t)$ за время $\Delta t \to 0$ получает дефект (т. е. становится негодным), а с вероятностью $1-\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ остается годным, где $\alpha > 0$.

Тогда инфинитезимальная производящая функция процесса очевидно будет

$$f(s)=\alpha(1-s), \quad |s| \leqq 1. \tag{1.10}$$

Следовательно, производящая функция процесса

$$F(t, s)=\mathsf{E}\{s^{Z(t)} \mid Z(0)=1\}$$

удовлетворяет уравнению [3, 4]

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s)=f(F(t, s)), \quad F(0, s)=s, \tag{1.11}$$

откуда, имея в виду (1.10), окончательно получаем

$$F(t, s)=1-(1-s)e^{-\alpha t}. \tag{1.12}$$

Из (1.12) вытекает, что

$$F_N(t, s)=\mathsf{E}\{s^{Z(t)} \mid Z(0)=N\}=(1-e^{-\alpha t}+se^{-\alpha t})^N, \tag{1.13}$$

откуда непосредственно находим

$$\mathsf{E}\{Z(t) \mid Z(0)=N\}=Ne^{-\alpha t}, \quad \mathsf{D}\{Z(t) \mid Z(0)=N\}=Ne^{-\alpha t}(1-e^{-\alpha t}). \tag{1.14}$$

Пусть теперь стоимость (цена) контроля одного изделия будет c, а затраты (цена) обрабатывания одного изделия за время t будут $d(t)=d_0+\gamma(t)$, где d_0 — начальная цена изделия (до начала изготовления), а $\gamma(t)$ — монотонно возрастающая, которая является стоимостью самого изготовления.

Аналогично дискретному случаю рассмотрим следующие два плана контроля:

1) Все изделия проверяются только в конце процесса, т. е. в данный фиксированный момент T. Тогда общая себестоимость $Z(T)$ годных изделий будет

$$V_1=N(d_0+\gamma(T)+c). \tag{1.15}$$

2) Контроль продукции производится в некотором дополнительном моменте t, $0<t<T$. При этом дефектные изделия выделяются и в дальнейшем обрабатываются только недефектные изделия. В конце процесса опять проверяются все изделия. Тогда общая себестоимость $Z(T)$ годных изделий будет

$$V_2=N[c+d(t)]+Z(t)[c+d(T)-d(t)], \tag{1.16}$$

откуда получаем

$$\mathsf{E}\,V_2=N\{c+d_0+\gamma(t)+e^{-\alpha t}(c+\gamma(T)-\gamma(t))\}. \tag{1.17}$$

Теперь из (1.15) и (1.17) вытекает, что разница в себестоимости продукции будет

$$\Delta(t)=V_1-\mathsf{E}\,V_2=N\{(1-e^{-\alpha t})[\gamma(T)-\gamma(t)]-ce^{-\alpha t}\}. \tag{1.18}$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что $\gamma(t)=d_1 t$. Тогда из (1.18) получаем

$$\Delta(t)=Nc\,\varphi(t, T), \tag{1.19}$$

где

$$\varphi(x,\ y)=\beta(y-x)(1-e^{-\alpha x})-e^{-\alpha x},\quad 0\leqq x\leqq y,\ \alpha>0, \tag{1.20}$$

а

$$\beta=d_1/c, \tag{1.21}$$

т. е. β является отношением стоимости обработки одного изделия за единицу времени d_1 к стоимости контроля качества одного изделия c.

Очевидно, когда $\Delta(t)>0$, то дополнительный контроль продукции в момент t приносит действительный выигрыш $\Delta(t)$. Таким образом, естественно возникает вопрос о существовании таких моментов и нахождении оптимальных среди них, т. е. таких моментов τ, $0<\tau<T$, для которых $\Delta(\tau)=\max_{0\leqq t\leqq T}\Delta(t)>0$. Наконец заметим, что рассматриваемую нами процедуру можно отнести к т. наз. планам бездефектного контроля по альтернативному признаку [2], [1, § 1.2, Гл. 2 и 4]. С другой стороны, в отличие от исследуемых в [1] и [2] планов наша процедура является динамической.

2. Оптимизационные проблемы. Сначала исследуем вопрос о том, стоит ли в данный промежуточный момент времени t проверять всю продукцию или только часть ее. Обозначим через ε $(0\leqq\varepsilon\leqq 1)$ ту часть продукции, которая подвергается дополнительному контролю в момент t, $0<t<T$. Тогда аналогично **1.**, формула (1.19), находим, что реализованная средняя „прибыль“ определяется следующим образом:

$$\Delta_\varepsilon(t)=Nc\varepsilon\varphi(t,\ T), \tag{2.1}$$

где функция $\varphi(t,T)$ определена в (1.20). Следовательно, если для некоторого t $\Delta_\varepsilon(t)>0$ (т. е. вторая процедура экономнее первой), то прибыль будет максимальной при $\varepsilon=1$, т. е. $\Delta_\varepsilon(t)\leqq\Delta(t)$.

Таким образом мы показали, что надо искать оптимальные моменты для контроля качества, когда проверяется вся продукция.

Вопрос о нахождении оптимального момента для дополнительного контроля (так, как этот вопрос был поставлен в конце **1**) решается следующей теоремой, которая кроме того представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Для функции*

$$\varphi(t,\ T)=\beta(T-t)(1-e^{-\alpha t})-e^{-\alpha t},\quad 0\leqq t\leqq T<\infty;\ \alpha,\ \beta>0, \tag{2.2}$$

существует $T_0=T_0(\alpha,\beta)$, *которое определяется равенствами*

$$T_0=t_0+/\beta(e^{\alpha t_0}-1), \tag{2.3}$$

$$t_0^{*}=\alpha^{-1}\ln(1+\alpha/2\beta+\sqrt{\alpha/\beta+\alpha^2/4\beta^2}), \tag{2.4}$$

так что при $T\leqq T_0$ *имеем* $\varphi(t,T)\leqq 0$, $0\leqq t\leqq T$, *а для любого* $T>T_0$ *существует единственное* τ, *которое является решением уравнения*

$$\alpha+\beta+\alpha\beta(T-t)=\beta e^{\alpha t} \tag{2.5}$$

в интервале $(0,\ T)$, *так что*

$$\varphi(\tau,\ T)=\max_{0\leqq t\leqq T}\varphi(t,\ T)>0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Стационарные точки функции $\varphi(t,T)$ определяются из уравнения $\partial\varphi(t,T)/\partial t=0$, т. е.

$$\alpha e^{-\alpha t}+\alpha\beta(T-t)e^{-\alpha t}-\beta(1-e^{-\alpha t})=0,$$

что эквивалентно уравнению (2.5).

Теперь для функции $g(t)=\alpha+\beta+\alpha\beta(T-t)$ имеем $g(0)=\alpha+\beta+\alpha\beta T$, $g(T)=\alpha+\beta$, а для функции $h(t)=e^{\alpha t}\beta$ соответственно $h(0)=\beta$, $h(T)=\beta e^{\alpha T}$.

Так как $g(t)$ монотонно убывает, а $h(t)$ монотонно возрастает и $g(0)>h(0)$, то обе функции будут иметь единственную точку пересечения τ, если только $g(T)<h(T)$, что эквивалентно неравенству

$$T>\alpha^{-1}\ln(1+\alpha/\beta). \tag{2.7}$$

В этом случае $\partial\varphi(0, T)/\partial t=\alpha(1+\beta T)>0$, $\partial\varphi(T, T)/\partial t=e^{-\alpha t}(\beta+\alpha)-\beta<0$, т. е. в единственной стационарной точке τ функция $\varphi(t, T)$ имеет максимум.

Теперь заметим, что при фиксированном t функция $\varphi(t, T)$ является линейной и возрастающей по второму аргументу T и, кроме того, $\varphi(t, t)=-e^{-\alpha t}<0$.

Следовательно, для любого $t>0$ существует единственное $T^*(t)=t+e^{-\alpha t}/\beta(1-e^{-\alpha t})$, так что $\varphi(t, T^*(t))=0$.

Кроме того $\varphi(t, T)>0$ в области $T>T^*(t)$ (которая, очевидно, содержится в области $0\leqq t\leqq T$), а при $T\leqq T^*(t)$ имеем $\varphi(t, T)\leqq 0$. С другой стороны, уравнение

$$dT^*(t)/dt=1-\alpha e^{\alpha t}/\beta(e^{\alpha t}-1)^2=0$$

имеет единственное решение

$$t_0=\alpha^{-1}\ln(1+\alpha/2\beta+\sqrt{\alpha/\beta+\alpha^2/4\beta^2}),$$

при котором функция $T^*(t)$ имеет минимум $T^*_{\min}=T^*(t_0)=T_0$, т. е. определяется равенствами (2.3) и (2.4). Как нетрудно проверить, T_0 удовлетворяет также неравенству (2.7).

Так как при $T>T_0$ имеем $\varphi(t_0, T)>0$, то тем более $\varphi(\tau, T)=\max_{0\leqq t\leqq T}\varphi(t, T)>0$, что доказывает теорему.

В качестве непосредственного применения этих результатов можно получить следующую процедуру последовательного определения дополнительных моментов для контроля качества.

Пусть $T>T_0$, где T_0 определено в теореме 1. Тогда из теоремы 1 следует, что отрезок $(0, T)$ допускает оптимальный момент для контроля τ, т. е. мы получаем два подинтервала $(0,\tau)$ и (τ, T), каждый из которых имеет длину больше чем

$$\varkappa=\min(t_0, T-t_0). \tag{2.8}$$

Действительно, из (2.5) следует, что $T=T(\tau)$ является возрастающей функцией от τ; то же самое можно сказать и о функции $T-\tau$. С другой стороны, из теоремы 1 вытекает, что $\tau>T_0$ и, следовательно, $T-\tau>T_0-t_0$.

Теперь в каждом интервале $(0,\tau)$ и (τ, T) ищем оптимальный момент аналогично теореме 1 (конечно, если интервалы допускают такой, т. е., когда $\tau>T_0$ и $T-\tau>T_0$). В дальнейшем так поступаем и с каждым новополученным интервалом. Отметим, что каждый отрезок допускает оптимальный момент для дополнительного контроля только если его длина больше чем T_0.

Очевидно, что после конечного числа таких шагов находим n моментов контроля (после перенумеровки)

$$0<\tau_1^*<\tau_2^*<\cdots<\tau_n^*<T, \tag{2.9}$$

таких, что в любом отрезке (τ_i^*, τ_{i+1}^*) уже не существует момент для дополнительного контроля, который увеличил бы общую прибыль.

Из (2.8) вытекает, что

$$n+1\leqq T/\varkappa \tag{2.10}$$

или, что равносильно,

(2.11) $$n \leqq 2T/T_0.$$

Теперь заметим, что если производится дополнительный контроль (разумеется, с выделением негодной продукции) в некоторых произвольных моментах $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<T$, то аналогично (1.15)—(1.21) нетрудно показать, что реализованная „средняя прибыль" определяется формулой (полное доказательство приведено в начале следующего параграфа)

(2.12) $$\Delta_k = Nc\,\Phi_k(t_1, t_2, \ldots, t_k, T),$$

где

(2.13) $$\Phi_k(t_1, t_2, \ldots, t_k, T) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(t_i, t_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k} e^{-\alpha t_{i-1}} \varphi(t_i - t_{i-1}, T - t_{i-1}).$$

Здесь положено $t_0 = 0$, $t_{k+1} = T$, а функция $\Phi_1(t_1, T) = \varphi(t_1, T)$ определяется формулой (1.20).

Пусть для любого $k<n$

(2.14) $$0<\tau^*_{i_1}<\tau^*_{i_2}<\cdots<\tau^*_{i_k}<T$$

определяет некоторое подмножество из (2.9), а при $k+l\leqq n$

(2.15) $$0<\tau^*_{j_1}<\tau^*_{j_2}<\cdots<\tau^*_{j_{k+l}}<T$$

получаются из (2.14) путем добавления к (2.14) l новых моментов из (2.9).

Пусть $\Delta^*_k = Nc\,\Phi_k(\tau^*_{i_1}, \tau^*_{i_2}, \ldots, \tau^*_{i_k}, T)$ и $\Delta^*_{k+l} = Nc\,\Phi_{k+l}(\tau^*_{j_1}, \tau^*_{j_2}, \ldots, \tau^*_{j_{k+l}}, T)$. Тогда, как уже было отмечено, $0<\Delta^*_k \leqq \Delta^*_{k+l} \leqq \Delta^*_n$.

Таким образом вполне естественно возникает вопрос о „многомерном" обобщении теоремы 1, т. е. исследование проблемы о существовании оптимального разбиения интервала $(0, T)$, при котором дополнительный контроль дает максимальный выигрыш.

3. Многомерный случай. Как уже было отмечено в конце предыдущего параграфа, мы будем сравнивать следующие два плана для контроля качества непрерывного процесса $Z(t)$, определенного в **1.2**:

1. Все изделия проверяются только в конце процесса, т. е. в данный момент T.

2. Контроль продукции производится в некоторых дополнительных моментах $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<T$. При этом в любой момент проверки дефектные изделия выделяются и в дальнейшем обрабатываются только недефектные изделия.

В первом случае общая себестоимость $Z(T)$ годных изделий определяется формулой (1.15), а во втором случае вместо (1.16) имеем

(3.1) $$V_2 = N(c+d(t_1)) + \sum_{i=1}^{k-1} Z(t_i)\,[c+d(t_{i+1})-d(t_i)] + Z(t_k)\,[c+d(T)-d(t_k)].$$

Из (3.1) и (1.13) в случае $d(t) = d_0 + d_1 t$ получаем, что „средняя прибыль" $\Delta_k = V_1 - \mathsf{E}\,V_2$ определяется формулами (2.12) и (2.13).

Сначала дадим несколько определений. Так, для любого $T>0$ и $n=1, 2, \ldots$ определяем область разбиения

(3.2) $$M_n = \{a_n = (t_1, \ldots, t_n) : 0 = t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_n \leqq T = t_{n+1}\}.$$

Будем называть $a_n \in M_n$ также n-разбиением отрезка $[0, T]$, где n является рангом разбиения. Пусть как обычно $\langle M_n \rangle = \{a_n : 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T\}$ означает внутренность множества M_n. Если $a_n \in K_n = M_n - \langle M_n \rangle$ (т. е. K_n — граница области M_n), то будем говорить, что это вырожденное n-разбиение.

Пусть теперь

$$\psi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_m(x), \tag{3.3}$$

где $f_m(x)$ является m-кратной итерацией функции

$$f(x) = (\beta e^{\alpha x} - \alpha - \beta)/\alpha\beta, \tag{3.4}$$

т. е. $f_0(x) \equiv x$, $f_{m+1}(x) = f(f_m(x))$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Разбиение $a_n = (\tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_n^{(n)})$ будем называть стационарным, если $a_n \in M_n$ и

$$T = \psi_n(\tau_1^{(n)}), \ \tau_{k+1}^{(n)} = \psi_k(\tau_1^{(n)}), \ k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.5}$$

Если для a_n выполняется только условие (3.5), то a_n называется стационарной точкой.

Теперь мы можем сформулировать основной результат, дающий ответ на поставленный в конце 2 вопрос об оптимальности.

Теорема 2. *Пусть* $T_0 = T_0(\alpha, \beta)$ *определяется формулами* (2.3) *и* (2.4), $T > T_0$, $n_0 = [2T/T_0]$. *Тогда*

$$\sup n \geqq 1 \left\{ \max_{M_n} \Phi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n, T) \right\} \tag{3.6}$$

$$= \max_{1 \leqq k \leqq n_0} \Phi_k(\tau_1^{(k)}, \ldots, \tau_k^{(k)}, T) = \Phi_{k_0}(\tau_1^{(k_0)}, \ldots, \tau_{k_0}^{(k_0)}, T) > 0,$$

и кроме последнего стационарного k_0*-разбиения* ($1 \leqq k_0 \leqq n_0$) *не существует другого разбиения интервала* $[0, T]$, *для которого этот максимум достигается.*

Доказательство теоремы существенно основывается на следующих леммах, которые, кроме того, представляют самостоятельный интерес.

Как видно из (2.12) и (2.13), для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\Phi_n(t_1, \ldots, t_n, T)$ являются непрерывными функциями в компактной области M_n, откуда вытекает, что они достигают свой максимум и он конечен. В таком случае n-разбиение $a_n^m = (t_1^m, \ldots, t_n^m)$ будем называть максимальным, если

$$\mu_n = \Phi_n(t_1^m, \ldots, t_n^m, T) = \max_{M_n} \Phi_n(t_1, \ldots, t_n, T). \tag{3.7}$$

Лемма 1. *Для любого* $n \geqq 1$ *существует не больше одного стационарного разбиения интервала* $[0, T]$.

Доказательство. Из определения (3.4) вытекает, что функция $f(x)$ является монотонно возрастающей и $f(0) < 0$. То же самое относится и к ее итерации $f_n(x)$, где $f(0) < 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, из (3.3) следует, что функции $\psi_n(x)$ являются монотонно возрастающими по x и $\psi_n(0) \leqq 0$.

Следовательно, для любого $n \geqq 1$ существует единственное $\tau_1^{(n)}$ такое, что $\psi_n(\tau_1^{(n)}) = T$. Теперь из (3.5) получаем последовательно $\tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)}, \ldots, \tau_n^{(n)}$.

Таким образом $a_n = (\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \ldots, \tau_n^{(n)})$ является либо стационарным разбиением (если $a_n \in M_n$), либо стационарной точкой (если $a_n \bar{\in} M_n$).

Лемма 2. *Для любого $n \geqq 1$ система уравнений*

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi_n(t_1, \ldots, t_n, T) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.8}$$

удовлетворяется только стационарными точками.

Доказательство. Из определений (2.13) и (1.20) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi_n(t_1, \ldots, t_n, T) = \frac{\partial}{\partial t_i}\varphi(t_{i-1}, t_i) + \frac{\partial}{\partial t_i}\varphi(t_i, t_{i+1})$$
$$= \beta(e^{-\alpha t_i} - e^{-\alpha t_{i-1}}) + \alpha\beta(t_{i+1} - t_i)e^{-\alpha t_i} + \alpha e^{-\alpha t_i}.$$

Отсюда следует, что система уравнений (3.8) эквивалентна системе

$$t_{i+1} - t_i = (\beta e^{\alpha(t_i - t_{i-1})} - \alpha - \beta)/\alpha\beta, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.9}$$

где, как уже было принято, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$.

Теперь из (3.9), имея в виду (3.4), получаем

$$t_{i+1} = t_i + f_i(t_1), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ввиду (3.3), последние соотношения можно записать как $t_{i+1} = \psi_i(t_1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$, что доказывает лемму.

Лемма 3. *Для каждого $n \geqq 1$ максимальное n-разбиение интервала $[0, T]$ является либо стационарным, либо вырожденным.*

Доказательство. Очевидно максимум функции $\Phi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n, T)$ достигается либо на границе $K_n = M_n - \langle M_n \rangle$, либо во внутренней точке $a_n^m = (t_1^m, \ldots, t_n^m)$ $\in \langle M_n \rangle$. Но если $a_n^m \in \langle M_n \rangle$, то

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi(t_1^m, \ldots, t_n^m, T) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. по лемме 2 a_n^m является стационарным разбиением, которое будет единственным согласно лемме 1.

Следствие 1. Максимальное стационарное невырожденное разбиение является единственным.

Будем говорить, что разбиение $a_k = (t'_1, \ldots, t'_k)$ лучше, чем разбиение $a_l = (t''_1, \ldots, t''_l)$, если

$$\Phi_k(t'_1, \ldots, t'_k, T) > \Phi_l(t''_1, \ldots, t''_l, T). \tag{3.10}$$

Если в 3.10 возможно нестрогое неравенство, то будем говорить, что a_k не хуже a_l.

Лемма 4. *Для любого вырожденного разбиения существует лучшее разбиение, у которого ранг ниже.*

Доказательство. Пусть $a_n = (t_1, \ldots, t_n)$ вырожденное разбиение, т. е. существует i_0, $0 \leqq i_0 \leqq n$, такое, что $t_{i_0} = t_{i_0+1}$, $0 = t_0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_n \leqq T = t_{n+1}$.

Обозначим

$$a_{n-1} = \begin{cases} (t_2, \ldots, t_n) & , \; i_0 = 0, \\ (t_1, \ldots, t_{i_0}, t_{i_0+2}, \ldots, t_n), & 1 \leqq i_0 < n, \\ (t_1, \ldots, t_{n-1}) & , \; i_0 = n \end{cases}.$$

Тогда

$$\Phi_n(a_n, T) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(t_i, t_{i+1}) < \sum_{i \neq i_0} \varphi(t_i, t_{i+1}) = \Phi_{n-1}(a_{n-1}, T),$$

(в последнем неравенстве пропущен отрицательный член $\varphi(t_{i_0}, t_{i_0}) = -e^{-\alpha t_{i_0}}$). Отсюда сразу вытекает утверждение леммы.

Следствие 2. Если максимальное n-разбиение вырожденное, то максимальное $(n-1)$-разбиение лучше его, причем $\mu_{n-1} \geqq \mu_n$, где μ_i определяется (3.7).

Лемма 5. *Пусть $n > 2T/T_0$, где T_0 определяется в* (2.3) *и* (2.4), $T > T_0$. *Тогда для каждого n-разбиения существует $(n-1)$-разбиение, которое лучше его.*

Доказательство. Пусть $a_n = (t_1, \dots, t_n) \in M_n$, где $n > 2T/T_0$. Тогда по крайней мере один из интервалов $[t_i, t_{i+1}]$ имеет длину меньше чем T_0. Следовательно, по теореме 1 имеем $\varphi(t_i, t_{i+1}) + \varphi(t_{i+1}, t_{i+2}) < \varphi(t_i, t_{i+2})$. Теперь, имея в виду (2.13), сразу получаем

$$\Phi_n(t_1, \dots, t_n, T) < \Phi_{n-1}(t, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, T),$$

откуда ввиду (3.7) вытекает $\mu_n \leqq \mu_{n-1}$. Таким образом лемма полностью доказана

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mu_n = \max\limits_{M_n} \Phi_n(t_1, \dots, t_n, T)$ и $a_n = (t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)})$ — соответствующее максимальное разбиение, т. е. $a_n \in M_n$ и $\mu_n = \Phi_n(a_n, T)$.

Пусть теперь $n > n_0$, где $n_0 = [2T/T_0]$. Тогда по лемме 5 существует разбиение $a_{n-1} = (t_1^{(n-1)}, \dots, t_{n-1}^{(n-1)})$ такое, что $\Phi_{n-1}(a_{n-1}, T) > \Phi_n(a_n, T) = \mu_n$.

Так как $\mu_{n-1} \geqq \Phi_{n-1}(a_{n-1}, T)$, то отсюда следует, что при $n \geqq n_0$ имеем $\mu_n > \mu_{n-1}$. Следовательно, $M = \sup_{i \geqq 1} \mu_i = \max_{1 \leqq i \leqq n_0} \mu_i$ и, кроме того, $\mu_n < M$ при $n > n_0$.

Таким образом, отсюда вытекает, что M достигается для некоторого максимального разбиения $a_{k_0} = (\tau_1^{(k_0)}, \dots, \tau_{k_0}^{(k_0)})$, т. е. $M = \Phi_{k_0}(a_{k_0}, T) = \mu_{k_0}$, где $1 \leqq k_0 \leqq n$.

Согласно лемме 3 разбиение a_{k_0} будет либо стационарным, либо вырожденным Допустим, что при $k_0 > 1$ разбиение a_{k_0} вырожденное. Тогда по лемме 4 существует разбиение $(t'_1, \dots, t'_{k_0-1})$ такое, что

$$\mu_{k_0-1} \geqq \Phi_{k_0-1}(t'_1, \dots, t'_{k_0-1}, T) > \Phi_{k_0}(a_{k_0}, T) = M.$$

Полученное противоречие показывает, что максимальное разбиение $a_{k_0} = (\tau_1^{(k_0)}, \dots, \tau_{k_0}^{(k_0)})$ является стационарным, т. е. определяется формулами (3.5). Из следствия 1 отсюда вытекает единственность этого разбиения.

Если $k_0 = 1$, т. е. $M = \Phi_1(\tau_1, T) = \varphi(\tau_1, T) = \mu_1$, то по теореме 1 следует, что $0 < \tau_1 < T$, так как $T > T_0$. Таким образом и в этом случае разбиение является невырожденным и стационарным. Кроме того, как было показано в теореме 1, $\mu_1 > 0$.

С другой стороны, всегда $M \geqq \mu_1$, откуда окончательно вытекает, что $M > 0$. Теорема доказана.

* * *

Все полученные для непрерывных процессов результаты легко можно перенести на дискретный случай, полагая $\alpha = -\ln q$. Тогда рассматривается непрерывный процесс с теми же параметрами (α, β, T), в котором данный дискретный процесс является вложенным. Оптимальные моменты для непрерывного процесса определяются по теореме 1 или 2 (т. е. по формулам (3.5)):

$$0<\tau_1^{(k_0)}<\tau_2^{(k_0)}<\cdots\tau<\theta_{k_0}^{(k_0)}<T.$$

Теперь оптимальные моменты для дискретного процесса определяются следующим образом:

$$t_j^{(k_0)}=[\tau_j^{(k_0)}]+\delta_j,\ j=1,2,\ldots,\ k_0,$$

где δ_j равно 0 или 1, причем $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k_0}$ подбираются так, чтобы максимизировать $\Phi_{k_0}(t_1^{(k_0)}, \ldots, t_{k_0}^{(k_0)}, T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Я. Беляев. Вероятностные методы выборочного контроля. М., 1975.
2. А. Н. Колмогоров. Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю. Л., 1951.
3. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. М., 1971.
4. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I, II. М., 1984.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 28. 4. 1987