Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОПОЛНЕНИЕ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И РАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. А. БОРУБАЕВ

Введение. В работе Ю. М. Смирнова [1] установлено взаимно однозначное соответствие между всеми бикомпактными расширениями и всеми близостями тихоновского пространства. Построение всех бикомпактных расширений тихоновского пространства в терминах подчинений дано в работе [2]. Описание семейства всех локально бикомпактных расширений тихоновского пространства дано Лидером [3] на основе введенного им понятия локальной близости. Другая конструкция построения локально-бикомпактных расширений тихоновского пространства в терминах непрерывных функций дана в работе [4]. В статье Д. Дойчинова [5] посредством введенного им понятия супертопологии описываются класс локально-бикомпактных и класс локально-бикомпактных паракомпактных расширений данного тихоновского пространства. Описание всех паракомпактных расширений тихоновского пространства посредством проекционных спектров дано в работе [6]. Построение всех тихоновских расширений данного тихоновского пространства на основе специальных семейств открытых фильтров дано в работе [7].

Нам кажется более удобным и естественным путь построения тех или иных классов расширений тихоновского пространства с помощью равномерных структур данного тихоновского пространства, а именно, получить эти расширения тихоновского пространства как пополнение данного тихоновского пространства по соответствующим равномерным структурам. Например, как хорошо известно, бикомпактные расширения тихоновского пространства можно рассматривать как пополнения тихоновского пространства по соответствующим предкомпактным равномерным структурам. В работе [8] посредством равномерных структур построены все паракомпактные, сильно паракомпактные, финально-компактные и полные в смысле Дьедонне расширения данного тихоновского пространства.

В настоящей работе с помощью равномерных структур описываются класс всех вещественно-полных, класс всех локально бикомпактных паракомпактных, локально-бикомпактных линделефовых и другие классы расширений (определенные с точностью до гомеоморфизма) тихоновского пространства. Выясняется, когда существует максимальное расширение среди паракомпактных расширений данного пространства и дается решение одной задачи, поставленной К. Морита в [12], в связи с этим вопросом.

1. Расширения топологических пространств посредством равномерных структур. Все рассматриваемые равномерные пространства предполагаются отделимыми. Через $(X, \mathscr{U})$ обозначим равномерное пространство, где $\mathscr{U}$ — равномерная структура, определенная с помощью покрытий (см. [13, 14]), а X — тихоновское пространство, соответствующее $(X, \mathscr{U})$. Через $\varphi(\mathscr{U})$ обозначим множество всех минимальных фильтров Коши пространства $(X, \mathscr{U})$, а через $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}})$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 15, 1989, с. 63—73.

Пусть X — тихоновское пространство. Наибольшая равномерность на X, порождающая топологию пространства, называется универсальной равномерностью пространства X и обозначается через $\mathcal{U}^*$. Пространство $(X, \mathcal{U}^*)$ называется универсальным равномерным пространством. Элементы универсальной равномерной структуры $\mathcal{U}^*$ пространства X называются нормальными покрытиями пространства X. Равномерность $\mathcal{U}$, порожденная системой всех нормальных счетных покрытий пространства X назовем счетно-универсальной равномерностью пространства X, а $(X, \mathcal{U})$ — счетно-универсальным равномерным пространством. Равномерность $\mathcal{U}$ на X, порождающая топологию пространства X называется равномерностью пространства X.

Определение 1.1. *Пусть X — тихоновское пространство, а $\mathcal{U}$ — произвольная равномерность пространства X. Последовательность $\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ (не обязательно открытых) покрытий пространства X называется $\mathcal{U}$-нормальной, если выполняются следующие условия:*

1) *покрытие α_{n+1} звездно вписано в покрытие α_n при каждом $n \in \mathbb{N}$;*

2) *$\alpha_n \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ для любого $\mathcal{F} \in \varphi(\mathcal{U})$ и для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Покрытие α пространства X называется $\mathcal{U}$ — нормальным покрытием пространства X, если существует такая $\mathcal{U}$ — нормальная последовательность $\{\alpha_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ покрытий пространства X, что покрытие α_1 вписано в покрытие α.

Отметим, что для любой равномерности $\mathcal{U}$ пространства X всякое $\mathcal{U}$ — нормальное покрытие пространства X является нормальным покрытием пространства X. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 1.2. *Равномерность $\mathcal{U}$ пространства X называется*

1) *предуниверсальной, если всякое $\mathcal{U}$ — нормальное покрытие пространства X принадлежит $\mathcal{U}$;*

2) *Q — равномерностью, если всякое $\mathcal{U}$ — нормальное счетное покрытие пространства X принадлежит $\mathcal{U}$ и равномерность $\mathcal{U}$ имеет базу, состоящую из счетных покрытий;*

3) *P — равномерностью, если всякое покрытие α пространства X такое, что $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ для любого $\mathcal{F} \in \varphi(\mathcal{U})$ принадлежит $\mathcal{U}$;*

4) *S — равномерностью, если $\mathcal{U}$ — P — равномерность и имеет базу, состоящую из звездно-конечных покрытий;*

5) *L — равномерностью, если $\mathcal{U}$ — P — равномерность и имеет базу, состоящую из счетных покрытий;*

6) *$\check{C}$ — равномерностью, если существует такая счетная подсистема $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, что если для произвольного фильтра ξ на X выполняется $\xi \cap \alpha \neq \varnothing$ для каждого $\alpha \in \mathcal{U}_0$, то существует такой $\mathcal{F} \in \varphi(\mathcal{U})$, что $A \cap O \neq \varnothing$ для любого $A \in \mathcal{F}$ и для любого $O \in \xi$.*

Предложение 1.1. *Пусть $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство. Через $\mathcal{U}_\varphi$ обозначим систему всех $\mathcal{U}$ — нормальных покрытий пространства X. Тогда*

1) *$\mathcal{U}_\varphi$ — предуниверсальная равномерность на X;*

2) *$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_\varphi$;*

3) *$\mathcal{U}_\varphi$ порождает топологию пространства X;*

4) *$\varphi(\mathcal{U}) = \varphi(\mathcal{U}_\varphi)$.*

5) *$(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}}_\varphi)$ — универсальное равномерное пространство;*

6) *$\mathcal{U}$ является предуниверсальной тогда, и только тогда, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varphi$.*

Доказательство. 1) Если α и β произвольные $\mathcal{U}$ — нормальные покрытия пространства $(X, \mathcal{U})$, то по определению $\mathcal{U}$ — нормальных покрытий, в пространстве X существуют такие $\mathcal{U}$ — нормальные последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, что α_1 вписано в α, а β_1 вписано в β. Тогда $\{\alpha_n \wedge \beta_n\}$ — тоже $\mathcal{U}$-нормальная последовательность в X. Значит $\alpha \wedge \beta$ является $\mathcal{U}$-нормальным покрытием пространства X.

Заметим, что каждый член произвольной $\mathscr{U}$ — нормальной последовательности является $\mathscr{U}$—нормальным покрытием. Следовательно, в любое $\mathscr{U}$ — нормальное покрытие можно звездно вписать $\mathscr{U}$ — нормальное покрытие. Если $\alpha - \mathscr{U}$ — нормальное покрытие пространства X и α вписано в произвольное покрытие γ, то по определению $\mathscr{U}$ — нормальных покрытий γ тоже является $\mathscr{U}$ — нормальным покрытием пространства X. Следовательно, $\mathscr{U}_\varphi$ — равномерность на X. По построению $\mathscr{U}_\varphi$ — предуниверсальная равномерность.

2) Каждое покрытие из $\mathscr{U}$ является $\mathscr{U}$ — нормальным покрытием пространства X, значит $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}_\varphi$.

3) Заметим, что если α есть $\mathscr{U}$ — нормальное покрытие пространства X, то $\operatorname{Int}\alpha = \{\operatorname{Int} A : A \in \alpha\}$ тоже является открытым покрытием пространства X. Следовательно, $\mathscr{U}_\varphi$, также как и $\mathscr{U}$, порождает топологию пространства X.

4. По определению равномерной структуры $\mathscr{U}_\varphi$ для каждого $\mathscr{F} \in \varphi(\mathscr{U})$ имеет место $\mathscr{F} \cap \alpha_\varphi \neq \Phi$ для любого $\alpha_\varphi \in \mathscr{U}_\varphi$. Значит, $\mathscr{F}$ является минимальным фильтром в $(X, \mathscr{U}_\varphi)$. Следовательно, $\varphi(\mathscr{U}) \subseteq \varphi(\mathscr{U}_\varphi)$. Из 2) и 3) следует, что $\varphi(\mathscr{U}_\varphi \subseteq \varphi(\mathscr{U})$ Значит $\varphi(\mathscr{U}_\varphi) = \varphi(\mathscr{U})$.

5) Пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}}_\varphi)$ — пополнение пространства $(X, \mathscr{U}_\varphi)$, а $\{\widetilde{\alpha}_n\}$ — нормальная последовательность открытых покрытий пространства X. Положим $\alpha_n = \{\widetilde{A} \cap X : \widetilde{A} \in \widetilde{\alpha}_n\}$. Тогда $\{\alpha_n\}$ — $\mathscr{U}$ — нормальная последовательность пространства X. По определению $\mathscr{U}_\varphi$, $\alpha_n \in \mathscr{U}_\varphi$ для любого $n \in \mathrm{N}$. Из конструкции пополнения следует, что $\alpha_n \in \widetilde{\mathscr{U}}_\varphi$ для каждого $n \in \mathrm{N}$. (см. например [11]). Следовательно, $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}}_\varphi)$ — универсальное равномерное пространство.

6) Если $\mathscr{U} = \mathscr{U}_\varphi$, то из пункта 1) следует, что $\mathscr{U}$ — предуниверсальная равномерность. Обратно, если $\mathscr{U}$ — предуниверсальная равномерность, то $\mathscr{U} = \mathscr{U}_\varphi$ по определению равномерности $\mathscr{U}_\varphi$.

Предложение 1.2. *Равномерность $\mathscr{U}$ пространства X является Q — равномерностью тогда, и только тогда, когда пополнение $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ пространства $(X, \mathscr{U})$ является счетно-универсальным.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U} - Q$ — равномерность пространства X. Покажем что пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ счетно универсально. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — счетное нормальное покрытие пространства $\widetilde{X}$. Тогда $\alpha = \{A \cap X : \widetilde{A} \in \widetilde{\alpha}\}$ есть $\mathscr{U}$ — нормальное счетное покрытие пространства X. Так как $\mathscr{U} - Q$ — равномерность, то $\alpha \in \mathscr{U}$ из одной конструкции пополнения равномерного пространства (см. [11]) следует, что $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathscr{U}}$. Ясно, что $\mathscr{U}$ имеет базу, состоящую из счетных покрытий. Тогда $\widetilde{\mathscr{U}}$ тоже имеет базу, состоящую из счетных покрытий. Отсюда следует, что $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ счетно универсальное пространство.

Обратно, пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ — счетно универсальное пространство. Тогда $\mathscr{U}$ имеет базу, состоящую из счетных покрытий, Если α есть $\mathscr{U}$ — нормальное счетное покрытие пространства X, то для любого $A \in \alpha$ положим $\widetilde{A} = \{\widetilde{x} \in \widetilde{X} : A \in \mathscr{F}\widetilde{x}\}$, где $\mathscr{F}\widetilde{x}$ — след на X фильтра окрестностей точки $\widetilde{x}$ в $\widetilde{X}$. Тогда с учетом того, что α есть $\mathscr{U}$ — нормальное покрытие пространства X, можно показать, что $\widetilde{\alpha} = \{\widetilde{A} : A \in \alpha\}$ — нормальное счетное покрытие пространства $\widetilde{X}$. Тогда, $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathscr{U}}$ и $\alpha = \{\widetilde{A} \cap X : \widetilde{A} \in \widetilde{\alpha}\}$. Значит $\alpha \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{U} - Q$ — равномерность пространства X.

Предложение 1.3. ([13]). *Тихоновское пространство X является Q — пространством тогда, и только тогда, когда его счетно универсальное равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ полно.*

Пусть X — тихоновское пространство. Если $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ тихоновские расширения пространства X^*, то будем писать $\widetilde{X}' \geqq \widetilde{X}''$ тогда, и только тогда, когда существует такое непрерывное отображение $h: \widetilde{X}' \to \widetilde{X}''$ пространства $\widetilde{X}'$ в пространство $\widetilde{X}''$, что $h(x) = x$ для любого $x \in X$. Если $\widetilde{X}' \geqq \widetilde{X}''$ и $\widetilde{X}'' \geqq \widetilde{X}'$, то $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ гомеоморфные расширения пространства X и, отождествляя их, мы пишем $\widetilde{X}' = \widetilde{X}''$. Тогда множество всех тихоновских расширений (с точностью до эквивалентности) является частично упорядоченным множеством. Аналогично вводится частичный порядок в множество всех вещественно-полных, паракомпактных расширений и другие подмножества множества всех тихоновских расширений пространства X.

Множество всех равномерностей тихоновского пространства X частично упорядочивается по включению.

Расширение $\widetilde{X}$ пространства X называется Q — расширением, если $\widetilde{X}$ является Q — пространством (= вещественно полным пространством).

Теорема 1.1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех Q-расширений данного тихоновского пространства X (определенрых с точностью до эквивалентности) и множеством всех Q-равномерностей пространства X, причем это соответствие является изоморфизмом относительно введенных нами на этих множествах частичных упорядочений.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{X}$—Q— расширение тихоновского пространства X. Тогда по предложению 3 счетно универсальное равномерное пространство $(\widetilde{X}, \mathscr{U})$ полно. По предложению 1.2 равномерность $\mathscr{U}$ на X индуцированная равномерностью $\widetilde{\mathscr{U}}$ является Q — равномерностью, Если $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ являются неэквивалентными Q-расширениями пространства X, то счетно универсальные равномерные пространства $(\widetilde{X}', \widetilde{\mathscr{U}}')$ и $(\widetilde{X}'', \widetilde{\mathscr{U}}'')$ неизоморфны. Поэтому равномерности $\widetilde{\mathscr{U}}'$ и $\widetilde{\mathscr{U}}''$ индуцируют на X различные равномерности $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{U}''$. Обратно, если $\mathscr{U}$ — Q-равномерность пространства X, то по предложению 1.2 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ - счетно универсальное пространство Тогда по предложению 1.3 пространство $\widetilde{X}$ является Q-расширением пространства X. Если $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{U}''$ различные Q-равномерности пространства X, то их пополнение $(\widetilde{X}', \widetilde{\mathscr{U}}')$ и $(\widetilde{X}'', \widetilde{\mathscr{U}}'')$ неизоморфные счетно универсальные пространства. Заметим, что счетно универсальные пространства изоморфны тогда, и только тогда, когда их топологические пространства гомеоморфны. Отсюда и из предложения 1.3. следует, что $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ неэквивалентные Q-расширения пространства X. Если $\widetilde{X}' \geqq \widetilde{X}''$, то существует непрерывное отображение $h: \widetilde{X}' \to \widetilde{X}''$ такое, что $h^{-1}(x) = x$ для любого $x \in X$. Тогда отображение $h: (\widetilde{X}', \widetilde{\mathscr{U}}') \to (\widetilde{X}'', \widetilde{\mathscr{U}}'')$ — равномерно непрерывно где $\widetilde{\mathscr{U}}'$ и $\widetilde{\mathscr{U}}''$-счетно универсальные равномерности. Из равномерной непрерывности отображения h и из того, что $h^{-1}(x) = x$ следует включение $\mathscr{U}' \supseteq \mathscr{U}''$. Обратно, если $\mathscr{U}' \supseteq \mathscr{U}''$, то тождественное отображение $i: (X, \mathscr{U}') \to (X, \mathscr{U}'')$ — равномерно непрерывно. Тогда продолжение $h: (\widetilde{X}', \widetilde{\mathscr{U}}') \to (\widetilde{X}'', \widetilde{\mathscr{U}}'')$ тождественного отображения i равномерно непрерывно и $h^{-1}(x) = x$ для любого $x \in X$. Значит $\widetilde{X}' \geqq \widetilde{X}''$. Следовательно, существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех Q-расширений пространства X и частично упорядоченным множеством всех O-равномерностей пространства X, который каждому Q-расширению $\widetilde{X}$ пространства $\widetilde{X}$ поставляет в соответствие Q-равномерность $\mathscr{U}$ на X, индуцированной счетно универсальной равномерностью пространства $\widetilde{X}$.

Приведем одну теорему, естественным образом дополняющую содержание этого пункта.

---

*) Для простоты под расширением пространства X понимаем пространство $\widetilde{X}$, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства.

Теорема 1.2 (см. [8], [16]). *Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех паракомпактных (сильно паракомпактных, линделефовых) расширений (определенных с точностью до эквивалентности) данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех P — равномерностей (соответственно S — равномерностей, L — равномерностей) пространства X. Причем этот изоморфизм каждой P — равномерности (S — равномерности, L — равномерности) $\mathscr{U}$ пространства X поставит в соответствие паракомпактное (соответственно сильно паракомпактное, линделефово) расширение $\widetilde{X}_{\mathscr{U}}$, полученное как пополнение пространства X по равномерности $\mathscr{U}$.*

Теорема 1.3. *Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально бикомпактных паракомпактных расширений данного тихоновского пространства X (определенных с точностью до эквивалентности) и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих хотя бы одно равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U}$ — такая предуниверсальная равномерность пространства X, что существует покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$, состоящее из предкомпактных подмножеств. Тогда по предложению 1.1 пополнение $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ является универсальным равномерным пространством. Положим $\widetilde{\alpha} = \{[A]_{\widetilde{X}} : A \in \alpha\}$ Тогда $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathscr{U}}$ (см. например [14]). Так как для каждого $A \in \alpha$, $(A, \mathscr{U}_A)$ — предкомпактное пространство, то $([A]_{\widetilde{X}}, \mathscr{U}_{[A]})$ тоже предкомпактное подпространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ (см. [13], стр. 651). Подпространство $([A]_{\widetilde{X}}, \mathscr{U}_{[A]\widetilde{X}})$ как замкнутое подпространство полного пространства $(\widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$ само полно, а значит, бикомпакт. Следовательно, $\widetilde{\alpha}$ состоит из бикомпактных подмножеств. Тогда пространство $\widetilde{X}$ — паракомпактно и локально бикомпактно (см. [15], гл, III, § 4, упр. 9). Значит, $\widetilde{X}$ — локально бикомпактное паракомпактное расширение пространства X. Если $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{U}''$ — различные предуниверсальные равномерности пространства X, содержащие хотя бы одно равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных множеств, то $(\widetilde{X}', \widetilde{\mathscr{U}}')$ и $(\widetilde{X}'', \widetilde{\mathscr{U}}'')$ — неизоморфные универсальные пространства. Следовательно, $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ — неэквивалентные локально бикомпактные паракомпактные расширения пространства X. Причем, заметим, что $\mathscr{U}' \supset \mathscr{U}''$ тогда, и только тогда, когда $\widetilde{X}' \geqq \widetilde{X}''$.

Обратно, пусть $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ — неэквивалентные локально бикомпактные паракомпактные расширения пространства X. Пусть $\widetilde{\mathscr{U}}'$ и $\widetilde{\mathscr{U}}''$—универсальные равномерности пространств $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$, соответственно. Тогда $(\widetilde{X}', \widetilde{\mathscr{U}}')$ и $(\widetilde{X}'', \widetilde{\mathscr{U}}'')$ — неизоморфны как равномерные пространства. Так как $\widetilde{X}'$ и $\widetilde{X}''$ — локально бикомпактны и паракомпактны, то $\widetilde{\mathscr{U}}'$ и $\widetilde{\mathscr{U}}''$ содержат равномерные покрытия, состоящие из бикомпактных подмножеств. Пусть $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{U}''$ равномерности на X, индуцированные соответственно равномерностями $\mathscr{U}'$ и $\widetilde{\mathscr{U}}''$. Тогда $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{U}''$ — различные предуниверсальные равномерности, содержащие хотя бы одно покрытие, состоящее из предкомпактных пространств.

Итак, поставляя в соответствие каждой предуниверсальной равномерности $\mathscr{U}$ пространство X, содержащее покрытие из предкомпактных подмножеств, локально бикомпактное паракомпактное расширение $\widetilde{X}_{\mathscr{U}}$ пространства X, получающееся как пополнение X по $\mathscr{U}$, мы получим искомый изоморфизм.

Заметим, что если в условиях теоремы 1.2 предположить, что равномерность $\mathscr{U}$ имеет базу, состоящую из счетных (соответственно звездно-конечных) покрытий, то $\widetilde{X}$ тоже имеет базу, состоящую из счетных (звездно-конечных) покрытий. Так как $\widetilde{X}$ — паракомпактно, а $\widetilde{\mathscr{U}}$ — универсальная равномерность, то отсюда следует, что $\widetilde{X}$ — линделефово (соответственно сильно паракомпактно), Обратно, если $\widetilde{X}$ — линделефово (соответственно, сильно паракомпактно), то универсальная равномерность $\widetilde{\mathscr{U}}$ пространства $\widetilde{X}$ имеет базу, состоящую из счетных (звездно-конечных) покрытий. Тогда равномерность $\mathscr{U}$, индуцированная равномерностью $\widetilde{\mathscr{U}}$ тоже имеет базу, состоящую из счетных (звездно-конечных) покрытий. Итак, справедлива

Теорема 1.3′. *Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально бикомпактных линделефовых (сильно паракомпактных) расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, имеющих базы, состоящие из счетных (звездно-конечных) покрытий и содержащие хотя бы одно покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.*

Теорема 1.4. *Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех полных по Чеху паракомпактных (соответственно сильно паракомпактных, линделефовых) расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех равномерностей пространства X, одновременно являющихся $\check{C}$ — равномерностью и P — равномерностью (соответственно S — равномерностью L — равномерностью).*

Доказательство. Пусть $\widetilde{X}$ — полное по Чеху и паракомпактное расширение пространства X, а $\widetilde{\mathscr{U}}$ — его универсальная равномерность. Из внутренней характеристики полных по Чеху пространств следует, что существует такая счетная система $\widetilde{\mathscr{U}}_0$ открытых покрытий пространства $\widetilde{X}$, что каждый фильтр ξ на $\widetilde{X}$ такой, что $\widetilde{\alpha}\cap\xi\neq\varnothing$ для каждого $\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{U}}_0$, имеет точку прикосновения в $\widetilde{X}$ (см. [9, 10]). Тогда $\widetilde{\mathscr{U}}_0\subset\widetilde{\mathscr{U}}$. По теореме 1.2 универсальная равномерность $\widetilde{\mathscr{U}}$ индуцирует на X P-равномерность $\mathscr{U}$. Положим $\mathscr{U}_0=\{\widetilde{\alpha}\wedge\{X\}\colon \widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{U}}_0\}$ где $\widetilde{\alpha}\wedge\{X\}=\{\widetilde{A}\cap X\colon \widetilde{A}\in\widetilde{\alpha}\}$. Тогда $\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}$. Покажем, что $\mathscr{U}$ является равномерностью пространства X. Пусть ξ такой фильтр на X, что $\xi\cap\alpha\neq\varnothing$ для каждого $\alpha_0\in\mathscr{U}_0$. Тогда ξ порождает фильтр $\widetilde{\xi}$ на такой, что $\widetilde{\xi}\wedge X=\xi$. Ясно, что $\widetilde{\xi}\cap\widetilde{\alpha}\neq\varnothing$ для каждого $\alpha_0\in\widetilde{\mathscr{U}}_0$. Тогда ξ имеет точку прикосновения $\widetilde{x}$ в пространстве $\widetilde{X}$. Через $\mathscr{F}\widetilde{x}$ обозначим след фильтра окрестностей точки $\widetilde{x}$ на X. Тогда $\mathscr{F}\widetilde{x}\in\varphi(\mathscr{U})$ и $O\cap F\neq\varnothing$ для любого $O\in\mathscr{F}\widetilde{x}$ и $F\in\xi$. Значит, равномерность $\mathscr{U}$ является $\check{C}$ — равномерностью. Обратно, пусть $\mathscr{U}$ одновременно является $\check{C}$-равномерностью и P-равномерностью пространства X. Тогда по теореме 1.2 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ — универсальное равномерное пространство, а $\widetilde{X}$ — паракомпактное расширение пространства X. Пусть $\mathscr{U}_0$ — счетная подсистема равномерности $\mathscr{U}$, удовлетворяющая условию 6) определения 1.2. Тогда существует такая счетная подсистема $\widetilde{\mathscr{U}}_0\subset\widetilde{\mathscr{U}}$, что $\mathscr{U}_0=\{\widetilde{\alpha}\wedge X\colon \widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{U}}_0\}$ Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\widetilde{\mathscr{U}}_0$ состоит из открытых покрытий. Пусть $\widetilde{\xi}$ — такой фильтр на $\widetilde{X}$, что $\widetilde{\xi}\cap\alpha^*\neq\varnothing$ для любого $\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{U}}_0$. Тогда фильтр $\xi=\widetilde{\xi}\wedge X$ имеет общий элемент с каждым $\alpha\in\mathscr{U}_0$. Тогда существует такой фильтр $\mathscr{F}\in\varphi(\mathscr{U})$ что $O\cap F\neq\varnothing$ для любого $O\in\mathscr{F}$ и для любого $F\in\xi$. В силу полноты пространства $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ фильтр $\mathscr{F}$ сходится к некоторой точке $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$. Отсюда следует, что точка $\widetilde{x}$ является точкой прикосновения фильтра $\widetilde{\xi}$. Следовательно, $\widetilde{X}$ полно по Чеху по его внутренней характеристике (см. [9, 10]).

Существование искомого изоморфизма доказывается точно так же, как это было доказано в теореме 1.3 (см. так же доказательство теоремы 1 из [8]). Остальные случаи тоже доказываются аналогично.

Известно, что для любого тихоновского пространства X верно равенство $\dim X = \Delta d(X, \mathscr{U}^*)$ (см. [13, 14]), где $\mathscr{U}^*$ универсальная равномерность пространства X. Если $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ — пополнение равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, то $\Delta d(X, \mathscr{U}) = \Delta d(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{U}})$ (см. [14]). Отсюда и из предложения 1.1 следует следующее предложение.

Предложение 1.4. *Существует взаимооднозначное соответствие между семейством всех предуниверсальных равномерностей размерности n в смысле Δd данного тихоновского пространства X и семейством всех полных по Дьедонне расширений размерности n в смысле $\dim$ пространства X (определенных с точностью до геомеоморфизма).*

2. Об одной задаче К. Мориты. Пусть X—тихоновское пространство. Через μX обозначим пополнение пространства X по его универсальной равномерной структуре. В фундаментальной работе [12] К. Морита доказал, что μX является паракомпактным M — пространством (= паракомпактным перистым пространством) тогда, и только тогда, когда X есть M' — пространство. В этой же работе К. Морита ставит следующую задачу: „Охарактеризовать те пространства X, для которых μX обладает свойством (P)". Как примеры свойств (P) он упоминает „паракомпактность", „локальную компактность", „линделефовость".

Ниже решается задача К. Мориты в этих и других конкретных случаях.

Фильтр $\mathscr{F}$ пространства X назовем фильтром Коши пространства X, если $\mathscr{F} \cap \alpha \neq \varnothing$ для любого локально-конечного функциально открытого покрытия α пространства X. Другими словами фильтр $\mathscr{F}$ называется фильтром Коши пространства X, если $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в универсальном равномерном пространстве $(X, \mathscr{U})$ (так как система локально-конечных функционально открытых покрытий образует базу универсальной равномерности $\mathscr{U}^*$).

Открытое покрытие α тихоновского пространства X назовем псевдонормальным, если $\alpha \cap \mathscr{F} \neq \varnothing$ для любого фильтра Коши $\mathscr{F}$. Всякое локально-конечное функционально открытое покрытие является псевдонормальным покрытием пространства X. Обратное, вообще говоря, неверно.

Лемма 2.1. *Пусть X—тихоновское пространство, а μX — его топологическое пополнение. Если $\widetilde{\alpha}$ — произвольное открытое покрытие пространства μX, то $\alpha = \{\widetilde{O} \cap X \colon \widetilde{O} \in \widetilde{\alpha}\}$ — псевдонормальное открытое покрытие X. Обратно, если α — псевдонормальное покрытие пространства X, состоящее из канонически открытых множеств, то существует такое открытое покрытие $\widetilde{\alpha}$ пространства μX, что $\alpha = \{\widetilde{O} \cap X \colon \widetilde{O} \in \widetilde{\alpha}\}$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольное открытое покрытие пространства μX. Положим $\alpha = \{\widetilde{O} \cap X \colon \widetilde{O} \in \widetilde{\alpha}\}$. Покажем, что α — псевдонормальное открытое покрытие. Пусть $\mathscr{F}$ — произвольный фильтр Коши пространства X. Тогда $\mathscr{F}$ будет базисом некоторого фильтра Коши полного равномерного пространства $(\mu X, \widetilde{\mathscr{U}}^*)$, где $\widetilde{\mathscr{U}}^*$ — максимальная равномерность пространства μX. Тогда $\mathscr{F}$ сходится к некоторой точке $\widetilde{x} \in \mu X$. Пусть $\widetilde{x} \in \widetilde{O} \underset{\text{откр}}{\subset} \mu X$. Тогда существует $F \in \mathscr{F}$ такое, что $F \subset \widetilde{O} \cap \widetilde{X}$. Следовательно, $\widetilde{O} \cap X \in \mathscr{F}$, т. е. α — псевдонормальное покрытие.

Обратно, пусть α — произвольное псевдонормальное канонически открытое покрытие пространства X. Положим $\widetilde{\alpha} = \{\langle [O]_{\mu X} \rangle_{\mu X} \colon O \in \alpha\}$. Ясно, что $\langle [O]_{\mu X} \rangle_{\mu X} \cap X \in \alpha$. Покажем, что $\widetilde{\alpha}$ — покрытие μX. Пусть $\widetilde{x} \in \mu X$ — произвольная точка, а $\mathscr{F}_x$ — след на X фильтра окрестностей точки $\widetilde{x}$ в μX. Тогда $\mathscr{F}_x$ — фильтр Коши пространства μX. Тогда существует $O \in \mathscr{F}_x \cap \alpha$. Значит, существует открытое множество $\widetilde{O} \ni \widetilde{x}$ в μX такое, что $O = \widetilde{O} \cap X$. Тогда $\widetilde{O} \subseteq \langle [O]_{\mu X} \rangle_{\mu X}$. Следовательно, $\widetilde{\alpha}$ — открытое покрытие пространства μX.

Теорема 2.1. *Для тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

1) μX — *паракомпактно (соответственно, сильно паракомпактно, линделефово);*

2) *в любое псевдонормальное канонически открытое покрытие пространства X можно вписать локально-конечное (соответственно, звездно-конечное, счетное) функционально открытое покрытие пространства X.*

Доказательство. Пусть μX — паракомпактно, а α — произвольное псевдонормальное канонически открытое покрытие пространства X. Тогда по лемме 2.1 существует такое открытое покрытие пространства μX, что $\alpha = \{\widetilde{O} \cap X : \widetilde{O} \in \widetilde{\alpha}\}$. В покрытие $\widetilde{\alpha}$ впишем локально-конечное функционально открытое покрытие $\widetilde{\beta}$ паракомпакта μX. Так как след функционально открытого множества на всюду плотном подпространстве снова функционально открыт, то $\beta = \{\widetilde{G} \cap X : \widetilde{G} \in \widetilde{\beta}\}$ — локально конечное функционально открытое покрытие пространства X, вписанного в покрытие α. 2) $\Rightarrow$ 1) Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что μX — паракомпакт. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольное открытое покрытие пространства μX. Не ограничивая общности, мы можем считать, что α — каноническое открытое покрытие. Тогда по лемме 2.1 покрытие $\alpha = \{\widetilde{O} \cap X : \widetilde{O} \in \alpha\}$ — псевдонормальное каноническое открытое покрытие. По условию теоремы впишем в покрытие α локально конечное функционально открытое покрытие β пространства X. Тогда $\beta \in U^*$, где U^* — универсальная равномерность пространства X. Из конструкции пополнения (см. [11]) следует, что $\widetilde{\beta} = \{\langle [\beta]_{\mu X} \rangle_{\mu X} : B \in \beta\}$ — нормальное открытое покрытие пространства μX, причем $\widetilde{\beta}$ вписано в $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, в покрытие $\widetilde{\alpha}$ можно звездно вписать некоторое открытое покрытие пространства μX. Тогда, по известной теореме Стоуна о характеристике паракомпактности, пространство μX — паракомпактно. Остальные случаи теоремы доказываются аналогично, нужно только учитывать, что если след канонически открытого покрытия на всюду плотном подпространстве звездно-конечно (соответственно, счетно, конечно), то само покрытие—звездно-конечно (соответственно, счетно, конечно).

Теорема 2.2. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) μX — *локально-бикомпактно.*

2) *Существует такое псевдонормальное канонически открытое покрытие α пространства X, что для любого $A \in \alpha$ и для любого локально-конечного функционального открытого покрытия β существует конечное подсемейство $\beta_0 \subset \beta$, покрывающее A, т. е. $\cup \beta_0 \supset A$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть μX — локально-бикомпактно. Тогда существует такое канонически открытое покрытие $\widetilde{\alpha}$ пространства μX, что замыкание (A) каждого элемента $\widetilde{A}$ бикомпактно. Положим $\alpha = \{\widetilde{A} \cap X : \widetilde{A} \in \widetilde{\alpha}\}$. Тогда по лемме 1, α — псевдонормальное канонически открытое покрытие пространства X. Пусть β — произвольное локально-конечное функционально открытое покрытие пространства X. Тогда существует такое нормальное открытое покрытие $\widetilde{\beta}$ пространства μX, что $\beta = \{\widetilde{B} \cap X : \widetilde{B} \in \widetilde{\beta}\}$. Пусть $\widetilde{A} \in \widetilde{\alpha}$ — произвольный элемент. Тогда существует конечное подсемейство $\widetilde{\beta}_0 \subset \widetilde{\beta}$ такое, что $\cup \widetilde{\beta}_0 \supset [\widetilde{A}] \supset \widetilde{A}$. Тогда $\beta_0 = \{\widetilde{B} \cap X : \widetilde{B} \in \widetilde{\beta}_0\}$ конечное подсемейство покрытия β_0, покрывающее произвольный элемент $A \in \alpha$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть α такое псевдонормальное канонически открытое покрытие пространства X, удовлетворяющее условию 2) теоремы. Это условие равносильно тому, что универсальная равномерность $\mathscr{U}$ пространства X индуцирует на каждом A предкомпактную равномерность $\mathscr{U}_A$. Тогда по лемме 2.1 существует такое открытое покрытие $\widetilde{\alpha}$ пространства μX, что $\alpha = \{\widetilde{A} \cap X : \widetilde{A} \in \widetilde{\alpha}\}$. Известно, что если $(X, \mathscr{U})$ —

равномерное пространство и $(A, \mathcal{U}_A)$ его предкомпактное равномерное пространство, то $([A], \mathcal{U}_{[A]})$ также предкомпактно (см. [13]). Поэтому $([A]_{\mu X}, \mathcal{U}_{[A]\mu X})$ — предкомпактно, где $\mathcal{U}_{[A]}$ — равномерность, индуцированная на $[A]$ универсальной равномерностью $\tilde{\mathcal{U}}$ пространства μX. Тогда пространство $([A]_{\mu X}, \mathcal{U}_{[A]\mu X})$ — полно как замкнутое подпространство полного пространства $(\mu X, \tilde{\mathcal{U}})$. Следовательно, $([A]_{\mu X}, \mathcal{U}_{[A]\mu X})$ бикомпактное равномерное пространство (см. [19]). Учитывая, что $\tilde{A} \subset [A]_{\beta X}$, для любого $A \in \alpha$ заключаем, что μX — локально-бикомпактно.

Теорема 2.3 *Для тихоновского пространства X следующие условия равносильны:*

1) *μX — локально бикомпактное паракомпактное пространство;*

2) *существует такое нормальное канонически открытое покрытие α пространства X, что для любого $A \in \alpha$ и для любого локально-конечного функционально открытого покрытия β пространства X существует конечное его подсемейство, покрывающее A.*

3) *существует такое нормальное канонически открытое покрытие пространства X, что для любого $A \in \alpha$ и для любого нормально открытого покрытия β пространства X существует конечное подсемейство покрытия β, покрывающее A.*

Доказательство. Легко проверяется равносильность условий 2) и 3). Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть μX — локально-бикомпактное паракомпактное пространство. Тогда существует нормальное канонически открытое покрытие $\tilde{\alpha}$ пространства μX, замыкание каждого элемента которого бикомпактно. Тогда покрытие $\alpha = \{\tilde{A} \cap X : \tilde{A} \in \tilde{\alpha}\}$ нормальное канонически открытое покрытие пространства X. Как в доказательстве теоремы 2.2, доказывается, что для любого $A \in \alpha$ и для любого локально-конечного функционально открытого покрытия β существует его конечное подсемейство, покрывающее A. 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть α — нормальное канонически открытое покрытие пространства X, удовлетворяющее условию 2) теоремы 2.3. Тогда, как и в доказательстве теоремы 2.1, найдется нормальное открытое покрытие пространства μX, замыкание каждого элемента которого бикомпактно. Тогда пространство μX — локально-бикомпактно и паракомпактно (см. [15], гл. 2, § 4, упр. 9).

Хорошо известно [9, 10], что тихоновское пространство полно по Чеху тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\alpha_n\}$ открытых покрытий пространства X, обладающие свойством:

(АФ) если фильтр $\mathcal{F}$ такой, что $\mathcal{F} \cap \alpha_n \neq \emptyset$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то $\cap \{[F] : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$

Отталкиваясь от этого результата дадим следующее определение.

Определение 2.1 *Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется полным по Чеху, если существует нормальная последовательность $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{U}$, обладающая следующим свойством:*

(АФ) *Если фильтр $\mathcal{F}$ такой, что $\mathcal{F} \cap \alpha_n \neq \emptyset$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то $\cap \{[F] : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.*

Ясно, что всякое полное по Чеху равномерное пространство полно. Обратное, вообще говоря, неверно. Но для метризуемых равномерных пространств из полноты следует полнота по Чеху.

Теорема 2.4 *Тихоновское пространство X паракомпактно и полно по Чеху тогда и только, тогда, когда существует такая равномерность $\mathcal{U}$ пространства X, что равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ полно по Чеху.*

Доказательство. Пусть X — паракомпактно и полно по Чеху. Тогда по теореме А. Архангельского — З. Фролика [9, 10] существует нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ открытых покрытий, удовлетворяющая условию (АФ). Тогда равномерное пространство $(X, \mathcal{U}^*)$ будет полным по Чеху. Обратно, пусть $\mathcal{U}$ — равномерность пространства X, делающее пространство $(X, \mathcal{U})$ полным по Чеху. Пусть

$\{\alpha_n\}$ — нормальная последовательность равномерных покрытий, обладающая свойством (АФ). Тогда пространство X по теореме А. Архангельского — З. Фролика [9, 10] полно по Чеху. Покажем, что X — паракомпактно. Для этого достаточно доказать, что X является M — пространством, так как X — полно по Дъедонне, то по теореме К. Мориты [12], полное по Дъедонне M — пространство паракомпактно. Пусть $\{K_n\}$ убывающая по включению последовательность подмножеств пространства X такая, что $K_n \subseteq \alpha_n(x_0)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и некоторого фиксированного $x_0 \subseteq X$.

Пусть $\mathscr{F}$ фильтр, порожденный последовательностью множеств $\{K_n\}$. Тогда $\mathscr{F} \cap \alpha_n \neq \varnothing$ е для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\cap\{[F]: F \in \mathscr{F}\} \neq \varnothing$, а значит $\cap\{[K_n]: n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Следоват льно, X является M-пространством. Теорема 2.4 доказана.

Теорема 2.5. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) μX — *паракомпактное и полное по Чеху пространство;*

2) *Существует нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ открытых покрытий пространства X, обладающая свойством: Если $\mathscr{F}$ такой фильтр, что $\mathscr{F} \cap \alpha_n \neq \varnothing$, то существует фильтр Коши $\mathscr{F}_0$ пространства X такой, что $O \cap F \neq \varnothing$ для любых $O \in \mathscr{F}_0$ и $F \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть μX — паракомпактное и полное по Чеху пространство. Тогда по теореме 4 в μX существует нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ открытых покрытий, обладающее свойством (АФ). Положим $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n \wedge \{X\}$. Пусть $\mathscr{F}$ — такой фильтр в X, что $\mathscr{F} \cap \alpha_n \neq \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{\mathscr{F}}$ такой фильтр в μX, что $\mathscr{F} = \{\tilde{F} \cap X: \tilde{F} \in \tilde{\mathscr{F}}\}$. Тогда $\tilde{\mathscr{F}} \cap \alpha_n \neq \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. По условию (АФ) $\cap\{[\tilde{F}]_{\mu X}: \tilde{F} \in \mathscr{F}\} \ni x_0$ для некоторого $x_0 \in \mu X$. Пусть $\mathscr{F}_0$ след на X фильтра окрестностей точки x_0 в μX. Тогда $O \cap F \neq \varnothing$ для любого $O \in \mathscr{F}_0$ и $F \in \mathscr{F}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{\alpha_n\}$ — нормальная последовательность пространства X, удовлетворяющее условию 2) теоремы. Тогда из конструкции пополнения равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ следует, что найдется нормальная последовательность $\{\tilde{\alpha}_n\}$ пространства μX такая, что $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n \wedge \{X\}$. Покажем, что $\{\alpha_n\}$ обладает свойством (АФ), Пусть — такой фильтр в μX, что $\tilde{\mathscr{F}} \cap \tilde{\alpha}_n \neq \varnothing$. Положим $\mathscr{F} = \{\tilde{F} \cap X: \tilde{F} \in \tilde{\mathscr{F}}\}$. Тогда найдется фильтр Коши $\mathscr{F}_0$ пространства X такой, что $O \cap F \neq \varnothing$ для любых $O \in \mathscr{F}_0$ и $F \in \mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{F}_0$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \mu X$. Тогда $x_0 \in \cap\{[\tilde{F}]: \tilde{F} \in \tilde{\mathscr{F}}\}$.

Теорема 2.6. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны.*

1) μX — *паракомпакт (перистый паракомпакт);*

2) *среди паракомпактных (перистых паракомпактных) расширений пространства X существует максимальное.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно. 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\tilde{X}$ максимальное паракомпактное расширение пространства X. Пусть $\tilde{\mathscr{U}}^*$ — универсальная равномерность пространства $\tilde{X}$, а $\mathscr{U}$ — равномерность на X, индуцированная равномерностью $\tilde{\mathscr{U}}^*$. Для доказательства достаточно показать, что $\mathscr{U}$ — универсальная равномерность пространства X. Пусть α — произвольное нормальное покрытие пространства X. Тогда существует нормальная последовательность покрытий $\{\alpha_n\}$ пространства X такая, что α_1: вписана в α. Пусть d — псевдометрика на X, ассоцированная нормальной последовательностью $\{\alpha_n\}$ (см. [13, 14]). Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство элементами которого являются подмножества $[x] = \{y \in X: d(x, y) = 0\}$, а $\rho([x], [y]) = d(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Пусть $f: X \to Y$ — отображение, определенное по формуле $fx = [x]$, а v_ρ — равномерность на Y порожденной метрикой ρ. Через $\mathscr{U}_\beta$ — обозначим максимальную предкомпактную равномерность пространства X.

Тогда пополнение X по $\mathcal{U}_\beta$ есть Стоун—Чеховское расширение βX пространства X. Пусть i: $(X, \mathcal{U}_\beta) \to (\beta X, \beta\widetilde{\mathcal{U}}_\beta)$ естественное вложение. Рассмотрим диагональное произведение $h = i \times f$: $X \to \beta X \times Y$.

Пусть $\mathcal{U}_m$ — равномерность пространства X, базой которой служит система $\{\gamma \wedge \alpha_n : \gamma \in \mathcal{U}_\beta, \ n \in \mathbb{N}\}$. Легко проверить, что тогда $h : (X, \mathcal{U}_m) \to (\beta X, \widetilde{\mathcal{U}}_\beta) \times (Y, v_\beta)$ — равномерное вложение. Пусть $Z = [h(X)]$. Так как $\beta X \times Y$ — перистый паракомпакт, то Z — тоже перистый паракомпакт, как замкнутое подпространство перистого паракомпакта ([12]). Тогда Z можем считать как паракомпактное расширение пространства X. Пусть w — универсальная равномерность пространства Z. Пусть $\mathcal{U}'$ — равномерность на X, индуцированная равномерностью w. Тогда легко видеть, что $\mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}'$. Тогда $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, так как $\widetilde{X}$ — максимальное паракомпактное перистое паракомпактное расширение пространства X. Следовательно $\mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}$. Отсюда следует, что $\alpha \in \mathcal{U}$, т. е. $\mathcal{U}$ — универсальная равномерность пространства X.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Смирнов. О пространствах близости. *Мат. сб.*, 31, 1952, 543—574.
2. П. С. Александров, В. И. Пономарев. О бикомпактных расширениях топологических пространств. *Вестник МГУ, сер. матем.*, 1959, № 5, 93—108.
3. S. Leader. Local proximity spaces. *Math. Ann.*, 109, 1967, 257—281.
4. V. K. Zacharov. The construction of all locally compact extensions. *General Topology Appl.*, 12, 1981, 221—228.
5. Д. Дойчинов. Супертопологические пространства и расширения топологических пространств. *Плиска Български математически студии*, 6, 1983, 105—120.
6. В. И. Зайцев. Проекционные спектры и расширения топологических пространств. — *Успехи мат. наук*, 36, 1981, № 3, 197—202.
7. Г. Димов. Построение всех регулярных расширений вполне регулярных пространств. Математика и мат. образование, С., 1980, 48—54.
8. А. А. Борубаев. Равномерные структуры и расширения топологических пространств. *Успехи мат. наук*, 37, 1982, № 5, 165—166.
9. А. В. Архангелский. О топологических пространствах полных в смысле Чеха. *Вестник МГУ, сер. матем.*, 1961, № 2, 37—40.
10. З. Фролик. О внутренней характеристике топологически полных пространств в смысле Э. Чеха. *Доклады СССР*, 137, 533—536.
11. Ю. М. Смирнов. О полноте пространств близости, II. *ТР. Моск. матем. о-ва*, 4, 1955, 421—438.
12. K. Morita. Topological completions and *M*-spaces. *Science reports Tokyo Kyocky Daigaku*, 1970, № 271, 271—288.
13. Р. Энгелькинг. Общая топология. М., 1986.
14. J. R. Isbell. Uniform spaces. Providence, 1964.
15. Н. Бурбаки. Общая топология (Основные структуры). М., 1968.
16. А. А. Борубаев. Паракомпактные расширения и равномерные структуры. В: Исслед. по геом. и топологии. Фрунзе, 1982, 21—27.

Поступила 4. 4. 1988

СССР 720024
Фрунзе
Киргизский государственный университет
Математический факультет