Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

НУЛЬМЕРНОСТЬ И ПОЛНОТА В СВОБОДНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ. II

О. В. СИПАЧЕВА

Эта работа является продолжением работы [12]. При помощи результатов из [12] исследуются условия полноты по Вейлю и малой индуктивной нульмерности свободной топологической группы произвольного тихоновского пространства.

В первом разделе доказывается теорема, дающая положительный ответ на вопрос А. В. Архангельского и М. М. Чобана [1]: пусть тихоновское пространство полно по Дьёдонне; верно ли, что его свободная топологическая группа полна по Вейлю? В качестве следствия из доказанной теоремы вытекает, что всякая топологическая группа является фактор-группой некоторой полной по Вейлю топологической группы.

Целью второго раздела является доказательство следующего результата: пусть X — тихоновское пространство, $\dim X=0$. Тогда $\operatorname{ind} F_M(X)=0$. Следует отметить, что Д. Б. Шахматов недавно построил пример нульмерного в смысле ind пространства, свободная топологическая группа которого не нульмерна.

Во всей работе применяются дефиниции и обозначения из [12]. В частности, $1^\circ, 2^\circ, \ldots, 10^\circ$ обозначают условия, введенные в § 1 из [12].

1. О полноте свободных топологических групп

Лемма 1.1. *Пусть $q, p \in \mathsf{N}^+$, $\{\gamma_n \colon n \in \mathsf{N}\}$ — такая последовательность покрытий множества $\widetilde{X}^q$, что для каждого натурального n покрытие $\underbrace{\gamma_n \circ \ldots \circ \gamma_n}_{3^p \text{ раз}}$ вписано в γ_{n-1}. Предположим, что $r \in \mathsf{N}$, $m \in \mathsf{N}^+$, $\{k_1, \cdots, k_{m \cdot p}\} = \{\underbrace{r+1, \ldots, r+1}_{p \text{ раз}}, \cdots, \underbrace{r+m, \cdots, r+m}_{p \text{ раз}}\}$. Тогда покрытие $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_{m \cdot p}}$ вписано в покрытие γ_r.*

Доказательство. Докажем сначала лемму для $p=1$. При $m=1$ утверждение очевидно. Пусть $m>1$ и для меньших m справедливость леммы установлена. Пусть $k_s = \min\{k_1, \cdots, k_m\}$; ясно, что $k_s = r+1$. Пусть $s=1$. По индуктивному предположению покрытие $\gamma_{k_2} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m}$ вписано в покрытие γ_{r+1}; покрытие γ_{k_1} тоже вписано в γ_{r+1}, поскольку $k_1 = k_s = r+1$. Очевидно, что для любых покрытий μ, ξ и η множества $\widetilde{X}^q$ покрытие $\mu \circ \xi \circ \eta$ вписано в покрытие $\mu \circ (\xi \circ \eta)$, поэтому покрытие $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m}$ вписано в покрытие $\gamma_{k_1} \circ (\gamma_{k_2} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m})$, а это покрытие по доказанному вписано в $\gamma_{r+1} \circ \gamma_{r+1}$. Значит, $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m}$ вписано в γ_r.

Если $s=m$, то совершенно аналогичным образом получаем, что и в этом случае $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m}$ вписано в γ_r.

Пусть $1<s<m$. По индуктивному предположению покрытия $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_{s-1}}$ и $\gamma_{k_{s+1}} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m}$ вписаны в покрытие γ_{r+1}, ибо $k_i > k_s = r+1$ при $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$. Значит, покрытие $(\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_{s-1}}) \circ \gamma_{k_s} \circ (\gamma_{k_{s+1}} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m})$ вписано в покрытие $\gamma_{r+1} \circ \gamma_{k_s} \circ \circ \gamma_{r+1} = \gamma_{r+1} \circ \gamma_{r+1} \circ \gamma_{r+1}$, а это покрытие вписано в γ_r. По сделанному выше замечанию относительно порядка произведения операции $\circ$ покрытие $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_m}$ вписано в γ_r.

Пусть теперь p произвольно. Для всех $s, t \in \mathrm{N}$, $t < p$ положим $\xi_{ps+t} = \underbrace{\gamma_s \circ \ldots \circ \gamma_s}_{3^{p-1-t} \text{ раз}}$. Последовательность $\{\xi_n : n \in \mathrm{N}\}$ удовлетворяет условиям леммы при $p=1$. Ясно, что покрытие $\gamma_{k_1} \circ \ldots \circ \gamma_{k_{mp}}$ вписано в покрытие $\xi_{p_1} \circ \cdots \circ \xi_{p_{mp}}$, где $\{p_1, \ldots, p_{mp}\} = \{p \cdot (1+r), \ldots, p \cdot (1+r) + mp - 1\}$; по доказанному это покрытие вписано в покрытие $\xi_{p(1+r)-1} = \xi_{pr+(p-1)} = \gamma_r$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Пусть $(\Gamma, M, D, F) \in \mathfrak{Q}$, $\Gamma = \{\gamma_n(r) : n, r \in \mathrm{N}^+\}$, $F = \{f_n(r) : n, r \in \mathrm{N}^+\}$. Для всех натуральных n и r положим $\widetilde{\gamma}_n(r) = \gamma_n(3r)$, $\widetilde{f}_n(r) = f_n(3r)$. Пусть $\overline{x} = x_1 \ldots x_k \in F_0(X)$, $(r_1, \ldots, r_k)$ — произвольный набор разных натуральных чисел. Положим $G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)} = \{(y_1, \ldots, y_k) : y_1 = \widetilde{f}_1(r_1)(A)$ для некоторого $A \in \widetilde{\gamma}_1(r_1)$ такого, что $x_1 \in A$, или $y_1 = x_1$; $(z_1, y_2) = \widetilde{f}_2(r_2)(A)$ для некоторого $z_1 \in \widetilde{X}$ и $A \in \widetilde{\gamma}_2(r_2)$ такого, что $(y_1, x_2) \in A$, или $y_2 = x_2$; $\ldots$; $(z_1, \ldots, z_{k-1}, y_k) = \widetilde{f}_k(r_k)(A)$ для некоторых $z_1, \ldots, z_{k-1} \in \widetilde{X}$ и $A \in \widetilde{\gamma}_k(r_k)$ такого, что $(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k) \in A$, или $y_k = x_k\}$. Предположим, что r — произвольное натуральное число. Пусть $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$, $i_1 < \ldots < i_n$, $\{j_1, \ldots, j_{k-n}\} = \{1, \ldots, k\} \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$, $j_1 < \ldots < j_{k-n}$. Пусть $\overline{r} = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$ — произвольный набор разных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит r. Через $G_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ обозначим множество $\cup \{G_{\overline{x}}^{(r'_1, \ldots, r'_k)} : (r'_1, \ldots, r'_k)$ — набор разных натуральных чисел, $r'_{i_j} = r_{i_j}$ при $j = 1, \ldots, n$, $r'_{j_i} > r$ при $i = 1, \ldots, k-n\}$. В этих обозначениях имеет место

Лемма 1.2. *Множество $G_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\widetilde{\gamma}_k(p)$, если $p \leq r$.*

Доказательство. Положим $\zeta = \{(r'_1, \ldots, r'_k) : (r'_1, \ldots, r'_k)$ — набор разных натуральных чисел и $r'_{i_j} = r_{i_j}$ при $j = 1, \ldots, n$, $r'_{j_i} > r$ при $i = 1, \ldots, k-n\}$. Положим $\widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}} = \{(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$: для некоторых y_j, $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$ точка $(y_1, \ldots, y_k)$ принадлежит множеству $G_{\overline{x}}^{\overline{r}}\}$.

Индукцией по k докажем, что выполнено условие (1): множество $\widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ конечно и если $(r_1, \ldots, r_k) \in \zeta$, $(y_1, \ldots, y_k) \in G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)}$, то точки $(y_1, \ldots, y_k)$ и $(z_1, \ldots, z_k)$, где $z_{i_j} = y_{i_j}$ для $j = 1, \ldots, n$ и $z_{j_i} = x_{j_i}$ для $i = 1, \ldots, k-n$, содержатся в одном элементе покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_{j_1}) \circ \ldots \circ \widetilde{\gamma}_k(r_{j_{k-n}})$.

Тем самым будет доказана и сама лемма. В самом деле: пусть $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in \widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$. Положим $z_{i_j} = y_{i_j}$ при $j = 1, \ldots, n$, $z_{j_i} = y_{j_i}$ при $i = 1, \ldots, k-n$. В силу (1) для всякого $(r_1, \ldots, r_k) \in \zeta$ $\{(u_1, \ldots, u_k) \in G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)} : (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})\} \subseteq \{(u_1, \ldots, u_k) : (u_1, \ldots, u_k)$ и $(z_1, \ldots, z_k)$ содержатся в одном элементе покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_{j_1}) \circ \ldots \circ \widetilde{\gamma}_k(r_{j_{k-n}})\}$. В силу леммы 1.1 и условия 5° из § 1 [12] покрытие $\widetilde{\gamma}_k(r_{j_1}) \circ \ldots \circ \widetilde{\gamma}_k(r_{j_{k-n}})$ вписано в покрытие $\gamma_k(3r+1)$, поэтому, если $(u_1, \ldots, u_k) \in G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)}$ и $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$, то точка $(u_1, \ldots, u_k)$ содержится в том же элементе покрытия $\gamma_k(3r+1)$, что и $(z_1, \ldots, z_k)$. Покрытие $\gamma_k(3r+1)$ локально и, следовательно, точечно конечно, поэтому лишь конечное число его элементов содержит точку $(z_1, \ldots, z_k)$. Каждый элемент покрытия $\gamma_k(3r+1)$ пересекает не более конечного числа элементов покрытия $\gamma_k(3r)$. Значит, лишь конечное число элементов $\gamma_k(3r)$ может пересекать звезду точки $(z_1, \ldots, z_k)$ относительно покрытия $\gamma_k(3r+1)$. С другой стороны, мы только что показали, что для всякого $(r_1, \ldots, r_k) \in \zeta$ и $(u_1, \ldots, u_k) \in G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)}$ такого, что $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$, точка $(u_1, \ldots, u_k)$ обязана содержаться в звезде точки $(z_1, \ldots, z_k)$ относительно покрытия $\gamma_k(3r+1)$. Заключаем, что для каждого $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in \widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ множество $\{(u_1, \ldots, u_k) \in G_{\overline{x}}^{\overline{r}}: (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})\}$ пересекает лишь конечное число элементов покрытия $\gamma_k(3r) = \widetilde{\gamma}_k(r)$. Поскольку $G_{\overline{x}}^{\overline{r}} = \{\cup\{(u_1, \ldots, u_k) \in G_{\overline{x}}^{\overline{r}}: (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})\}: (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in \widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}\}$, а множество $\widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ конечно в силу (1), множество элементов $\widetilde{\gamma}_k(r) = \gamma_k(3r)$, пересекающих $G_{\overline{x}}^{\overline{r}}$, конечно. Воспользовавшись $3(r-p)$ раз условием 6°, получим, что так же конечно и множество элементов покрытия $\widetilde{\gamma}_k(p) = \gamma_k(3p)$, пересекающих $G_{\overline{x}}^{\overline{r}}$.

Докажем (1). Для $k=0$ $\overline{x} \equiv e$ и $G_{\overline{x}}^{\overline{r}} \equiv \varnothing$. В этом случае утверждение справедливо. Пусть $k>0$ и для меньших k утверждение доказано. Положим $\overline{x}' \equiv x_1 \ldots x_{k-1}$. Ясно, что если $(y_1, \ldots, y_k) \in G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)}$, то $(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in G_{\overline{x}'}^{(r_1, \ldots, r_{k-1})}$. Рассмотрим два возможных случая:

1) $i_n = k$. Положим $\overline{r}' = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_{n-1}})$. В силу индуктивного предположения и вытекающей отсюда справедливости утверждения леммы для $k-1$ число элементов покрытия $\widetilde{\gamma}_{k-1}(r_k)$, содержащих точки из $G_{\overline{x}'}^{\overline{r}'}$, конечно; пусть $A_1, \ldots, A_l$ — эти элементы. Каждый элемент покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_k) = \gamma_k(3r_k)$ имеет вид $A \times B$, где $A \in \gamma_{k-1}(3r_k)$, $B \in \theta_k(3r_k)(A)$ (см. 8°). Положим $\eta = \cup\{\theta_k(3r_k)(A_i): i \leq l\}$; покрытие η локально конечно, ибо все покрытия вида $\theta_k(3r_k)(A)$ локально конечны в силу 8°. Значит, лишь конечное число элементов η содержит точку x_k. Всякий элемент покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_k) = \gamma_k(3r_k)$, содержащий точки из множества $\{(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k): (y_1, \ldots, y_k) \in G_{\overline{x}'}^{\overline{r}'}\}$, имеет вид $A_i \times B$, где $i \leq l$, $B \in \eta$, поэтому лишь конечное число элементов покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_k)$ содержит точки из этого множества. Пусть $C_1, \ldots, C_s$ — эти элементы. Ясно, что для каждого $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in \widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ $(z_1, \ldots, z_{k-1}, y_{i_n}) = (z_1, \ldots, z_{k-1}, y_k) = \widetilde{f}_k(r_k)(C_i)$ для некоторых $i \leq s$, $z_1, \ldots, z_{k-1} \in \widetilde{X}$. Значит, $L = \{y: (y_{i_1}, \ldots, y_{i_{n-1}}, y) \in \widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ для некоторых $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{n-1}} \in \widetilde{X}\}$ конечно. Поскольку $\widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}} = \{(y_{i_1}, \ldots, y_{i_{n-1}}, y_{i_n}): (y_{i_1}, \ldots, y_{i_{n-1}}) \in \widetilde{G}_{\overline{x}'}^{\overline{r}'}, y_{i_n} \in L\}$, а множество $\widetilde{G}_{\overline{x}'}^{\overline{r}'}$ по индуктивному предположению конечно, получаем, что $\widetilde{G}_{\overline{x}}^{\overline{r}}$ тоже конечно.

2) $j_{k-n} = k$. По индуктивному предположению множество $\widetilde{G}_{\overline{x}'}^{\overline{r}}$ конечно. Пусть $(r_1, \ldots, r_k) \in \zeta$, $(y_1, \ldots, y_k) \in G_{\overline{x}}^{(r_1, \ldots, r_k)}$; тогда $(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in G_{\overline{x}'}^{(r_1, \ldots, r_{k-1})}$, $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in \widetilde{G}_{\overline{x}'}^{\overline{r}}$. Положим $z_{i_j} = y_{i_j}$ при $j = 1, \ldots, n$, $z_{j_i} = x_{j_i}$ при $i = 1, \ldots, k-n$. По определе-

нию $z_k = x_k$. По индуктивному предположению точки $(y_1, \ldots, y_{k-1})$ и $(z_1, \ldots, z_{k-1})$ содержатся в одном элементе покрытия $\widetilde{\gamma}_{k-1}(r_{j_1}) \circ \ldots \circ \widetilde{\gamma}_{k-1}(r_{j_{k-n-1}})$. Пусть $A_{j_1} \in \widetilde{\gamma}_{k-1}(r_{j_1})$, A_{j_2}, $B_{j_2} \in \widetilde{\gamma}_{k-1}(r_{j_2}), \ldots, A_{j_{k-n-1}}$, $B_{j_{k-n-1}} \in \widetilde{\gamma}_{k-1}(r_{j_{k-n-1}})$, $A_{j_1} \cap A_{j_2} \neq \varnothing$, $A_{j_1} \cap B_{j_2} \neq \varnothing$, $A_{j_2} \cap A_{j_3} \neq \varnothing$, $B_{j_2} \cap B_{j_3} \neq \varnothing, \ldots, A_{j_{k-n-2}} \cap A_{j_{k-n-1}} \neq \varnothing$, $B_{j_{k-n-2}} \cap B_{j_{k-n-1}} \neq \varnothing$, $(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in A_{j_{k-n-1}}$, $(z_1, \ldots, z_{k-1}) \in B_{j_{k-n-1}}$. В силу условия 3° для каждого $i \in \{1, \ldots, k-n-1\}$ найдутся C_{j_i}, $D_{j_i} \ni x_k$ такие, что $A_{j_i} \times C_{j_i} \in \widetilde{\gamma}_k(r_{j_i}) = \widetilde{\gamma}_k(3r_{j_i})$, $B_{j_i} \times D_{j_i} \in \widetilde{\gamma}_k(r_{j_i}) = \gamma_k(3r_{j_i})$. Положим $A'_{j_i} = A_{j_i} \times C_{j_i}$, $B'_{j_i} = B_{j_i} \times D_{j_i}$. Тогда A'_{j_i}, $B'_{j_i} \in \gamma_k(r_{j_i})$, $A'_{j_1} \cap B'_{j_2} \neq \varnothing$, $A'_{j_i} \cap A'_{j_{i+1}} \neq \varnothing$, $B'_{j_i} \cap B'_{j_{i+1}} \neq \varnothing$, $(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k) \in A'_{j_{k-n-1}}$, $(z_1, \ldots, z_{k-1}, x_k) \in B'_{j_{k-n-1}}$. Значит, точки $(z_1, \ldots, z_{k-1}, x_k) = (z_1, \ldots, z_k)$ и $(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k)$ содержатся в одном элементе покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_{j_1}) \circ \ldots \circ \widetilde{\gamma}_k(r_{j_{k-n-1}})$. По определению точки $(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ содержатся в одном элементе покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_{j_{k-n}})$. Заключаем, что $(y_1, \ldots, y_k)$ и $(z_1, \ldots, z_k)$ содержатся в одном элементе покрытия $\widetilde{\gamma}_k(r_{j_1}) \circ \ldots \circ \widetilde{\gamma}_k(r_{j_{k-n}})$.

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $p \in \mathsf{N}^+$, $(\Gamma, M, D, F) \in \mathfrak{Q}$, $\Gamma = \{\gamma_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$. Тогда найдутся $(\Gamma', M', D', F') \in \mathfrak{Q}$ и $\Psi_n \in (V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ такие, что $\Gamma' = \{\gamma'_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$, для всех натуральных n и r $\gamma'_n(r)$ вписано в $\gamma_n(2r)$ и для $\{\Psi_n\}$, Γ' и F' выполнено условие $\binom{*}{p}$:*

для любых $q \in \mathsf{N}^+$, $\{k_1, \ldots, k_{qp}\} = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{p\text{ раз}}, \ldots, \underbrace{q, \ldots, q}_{p\text{ раз}}\}$ произвольное слово $\bar{x} = x_1 \ldots x_n g_0 g_q^{-1} x_n^{-1} \ldots x_1^{-1}$, представимое в виде $x_1 \ldots x_n g_0 g_1^{-1} x_n^{-1} \ldots x_1^{-1} \odot \cdots \odot x_1 \ldots x_n g_{q-1} g_q^{-1} x_n^{-1} \ldots x_1^{-1}$, принадлежит множеству $\widehat{\Psi}_r(\Gamma')$, если $x_1 \ldots x_n g_{i-1} g_i^{-1} x_n^{-1} \ldots x_1^{-1}$ является F'-сдвинутым на некоторый набор $(r_1^{(i)}, \ldots, r_{n_i}^{(i)})$ разных натуральных чисел и укороченным на $m_i = n_i - n$ элементом множества $\widehat{\Psi}_{k_i+r-1}$ для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$.

В частности, $\binom{*}{1} = (*)$.

Доказательство. Для всех $n, r \in \mathsf{N}^+$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{X}^{n-1}$ положим $\gamma'_n(r) = \gamma_n(3^p r)$, $\mu'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu_n(3^p r)(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $d'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = d_n(3^p r)(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $f'_n(r) = f_n(3^p r)$. Пусть $\Gamma' = \{\gamma'_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$, $M' = \{\mu'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon n, r \in \mathsf{N}^+, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{X}^{n-1}\}$, $D' = \{d'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon n, r \in \mathsf{N}^+, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{X}^{n-1}\}$, $F' = \{f'_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$. Ясно, что $(\Gamma', M', D', F') \in \mathfrak{Q}$. В силу условия 5° для всех натуральных n и r покрытие $\underbrace{\gamma'_n(r+1) \ldots \gamma'_n(r+1)}_{3^p\text{ раз}}$ вписано в покрытие $\gamma'_n(r)$.

Пусть $\bar{x} = x_1 \ldots x_k \in F(X)$. Через $G_{\bar{x}}$ обозначим множество $\{(y_1, \ldots, y_m)\colon m \leq k$, $y_1 \ldots y_m$ является левой половиной F'-сдвинутого на некоторый набор разных чисел и укороченного слова $x_1 \ldots x_k x x^{-1} x_k^{-1} \ldots x_1^{-1}\}$; x — произвольная точка из $\widetilde{X}$. Из определения F'-сдвинутых и укороченных слов вытекает, что для произвольного натурального r, $G_{\bar{x}} = \bigcup \{G^{\bar{r}}_{\bar{y}}\colon m \leq k$, $\bar{y} = y_1 \ldots y_m$, для некоторого набора $\{n_1, \ldots, n_m\}$, $n_1 < \ldots < n_m \leq k$, $y_i = x_{n_i}$ при $i = 1, \ldots, m$, $\bar{r} = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$

— набор разных натуральных чисел, не превосходящих r, $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, m\}\}$, т. е. $G_{\bar{x}}$ есть объединение конечного числа множеств вида $G_{\bar{y}}^{\bar{r}}$, где $\bar{r}$ — наборы разных чисел, не превосходящих r. Из леммы 1.2 вытекает, что общее число элементов покрытий $\gamma'_n(r)$ при $n \leq k$, содержащих точки из $G_{\bar{x}}$, конечно. Пусть $A_1^{(1)}, \ldots, A_{l_1}^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots, A_{l_k}^{(k)}$ — эти элементы, $A_i^{(j)} \in \gamma'_j(r)$ при $i \leq l_j$, $j \leq k$. Положим $\gamma(r-1, \bar{x}) = \Lambda\{\theta'_{j+1}(r)(A)_i^{(j)}: i \leq l_j, j \leq k\}$ ($\theta'_{j+1}(r)(A_i^{(j)})$ — покрытия из условия 8° для четверки (Γ', M', D', F')). Тогда, если x и y содержатся в одном элементе покрытия $\gamma(r-1, \bar{x})$, а слово $y_1 \ldots y_m x y^{-1} y_m^{-1} \ldots y_1^{-1}$ есть F'-сдвинутое и укороченное слово $\bar{x} x y^{-1} \bar{x}$, то $(y_1, \ldots, y_m) \in G_{\bar{x}}$ и, значит, $(y_1, \ldots, y_m) \in A_i^{(m)}$ для некоторого $i \leq l_m$. Поскольку покрытие $\gamma(r-1, \bar{x})$ вписано в $\Lambda\{\theta_{m+1}(r)(A_i^{(m)}): i \leq l_m\}$ и имеет место условие 8°, получаем, что $(y_1, \ldots, y_m, x)$ и $(y_1, \ldots, y_m, y)$ содержатся в одном элементе покрытия $\gamma'_{m+1}(r)$, т. е. $y_1 \ldots y_m x y^{-1} y_m^{-1} \ldots y_1^{-1} \in \Psi_r(\Gamma')$. В силу леммы 1.1 получаем, что, если положить $\Psi_n(\bar{g}) = \gamma(n, \bar{g})$ при $\bar{g} \in F(X)$, то для $\{\Psi_n\}$, Γ' и F' выполнено условие $\binom{*}{p}$.

Очевидно, $\gamma'_n(r) = \gamma_n(3^p r)$ вписано в $\gamma_n(2r)$ при $n, r \in \mathrm{N}^+$ (см. условие 5°).

Лемма доказана.

Доказательство следующей очевидной леммы опущено.

Лемма 1.4. *Пусть $\xi = \{\xi_n: n \in N^+\}$ — любая последовательность открытых нормальных покрытий пространства $\widetilde{X}$. Для любых $n \in \mathrm{N}^+$, $\bar{g} \in F(X)$ положим $\Xi_n(\xi)(\bar{g}) = U_{\xi_n} = \{V \times V: V \in \xi_n\}$. Тогда множество $\langle \widehat{\Xi}_n(\xi) \rangle$ открыто в ρ-топологии на $F(X)$.*

Теперь может быть доказана

Основная лемма. *Для каждой окрестности U единицы в группе $F_M(X)$ найдется такая окрестность V единицы в $F_M(X)$, что замыкание множества, V в ρ-топологии на $F(X)$ содержится в U.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность единицы в группе $F_M(X)$. Будем считать, что $U = \langle \widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F) \rangle$ для некоторого $(\Gamma, M, D, F) \in \mathfrak{Q}$. Пусть $\Gamma = \{\gamma_n(r): n, r \in \mathrm{N}^+\}$. Предположим, что $(\Gamma', M', D', F') \in \mathfrak{Q}$, $\Gamma' = \{\gamma'_n(r): n, r \in \mathrm{N}^+\}$, $F' = \{f'_n(r): n, r \in \mathrm{N}^+\}$, $\Psi_n \in (V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ при $n \in \mathrm{N}^+$, для всех натуральных n и r покрытие $\gamma'_n(r)$ вписано в $\gamma_n(2r)$ и для $\{\Psi_n\}$, Γ' и F' выполнено условие $\binom{*}{2}$. Такие $(\Gamma', M', D' F')$ и $\{\Psi_n\}$ можно найти по лемме 1.3. Пусть для каждого $n \in \mathrm{N}^+$ и $\bar{g} \in F(X)$ множество $\Psi_n(\bar{g})$ определяет покрытие $\xi(\bar{g}, n)$, т. е. $\Psi_n(\bar{g}) = V_{\xi(\bar{g}, n)}$.

Положим $V = \langle \widehat{\Psi}_n \rangle$. Наша цель — показать, что $\bar{V}^\rho \subseteq U$.

Пусть $\bar{g} = g_1 \ldots g_{2p} \in \bar{V}^\rho$. Для каждого слова $\bar{h} \equiv h_1 \ldots h_m x x^{-1} h_m^{-1} \ldots h_1^{-1}$ обозначим через $G_{\bar{h}}(r_1, \ldots, r_m)$ множество всех элементов $\widetilde{X}$, входящих в качестве буквы в левую или правую половину какого-нибудь слова, являющегося F'-сдвинутым на $(r_1, \ldots, r_m)$ и укороченным на некоторое число словом $\bar{h}$. Положим $G = \bigcup \{G_{\bar{h}}(r_1, \ldots, r_m): r_i \leq p$ при $i = 1, \ldots, m$, $m \leq p$, $h_1, \ldots, h_m \in \{g_1, \ldots, g_{2p}\}\}$; ясно, что множество G конечно. Положим $\theta_n = \Lambda\{\xi(\bar{x}, n): m \leq p$, $\bar{x} \equiv x_1 \ldots x_m$, $x_1, \ldots, x_m \in G\}$ для всех натуральных n, $\theta = \{\theta_n: n \in \mathrm{N}^+\}$. Очевидно, θ — последовательность открытых нормальных покрытий пространства $\widetilde{X}$. По лемме 1.4 множество $\langle \widehat{\Xi}_n(\theta) \rangle$ — открытая окрестность единицы в группе $(F(X), \rho)$. Поскольку $\bar{g} \in \bar{V}^\rho$, $\bar{g} \cdot \langle \widehat{\Xi}_n(\theta) \rangle^{-1} \cap V \neq \varnothing$.

Значит, $\bar{g}\in V.\langle\widehat{\Xi}_n(\theta)\rangle$, т. е. найдутся такие слова $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что $\bar{g}=\bar{x}\,\bar{y}$, $\bar{x}=\bar{x}_{\pi(1)}\dots\bar{x}_{\pi(n)}$, $\bar{y}=\bar{y}_{\sigma(1)}\dots\bar{y}_{\sigma(m)}$ для некоторых $n, m\in\mathbb{N}^+$, $\pi\in S_n$, $\sigma\in S_m$, причем $\bar{x}_i\in\widehat{\Psi}_i$ для всех $i\in\{1, \dots, n\}$, а $\bar{y}_i\in\widehat{\Xi}_i(\theta)$ для всех $i\in\{1,\dots,m\}$.

Пусть $x_1^{(i)}\dots x_{n_i}^{(i)}\,x^{(i)}\,\tilde{x}^{(i)-1}\,x_{n_i}^{(i)-1}\dots x_1^{(i)-1}$ — каноническая запись слова $\bar{x}_i$ как элемента множества $\widehat{\Psi}_i$ при $i=1,\dots,n$. Положим $\lambda_i=\xi(x_1^{(i)}\dots x_{n_i}^{(i)}, x)$ для $i=1,\dots,n,\lambda_i=\theta_{i-n}$ при $i>n$. Тогда $\bar{g}=\bar{x}\,\bar{y}\in\langle\widehat{\Xi}_n(\lambda)\rangle$, где $\lambda=\{\lambda_n: n\in\mathbb{N}^+\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\xi(x_1\dots x_k, n)$ вписано в $\xi(x_1\dots\widehat{x_i}\dots x_k, n)$ при $x_1,\dots,x_k\in\widetilde{X}, n\in\mathbb{N}^+$. По лемме 2.1 из [12] канонические записи слов $\bar{x}_i$ как элементов $\widehat{\Psi}_i$ и, следовательно, как элементов $\widehat{\Xi}_i(\lambda)$, можно считать несократимыми. Из тех же соображений будем считать, что канонические записи слов $\tilde{y}_i$ как элементов $\widehat{\Xi}_i(\lambda)$ тоже несократимы. В качестве семейства Γ из условий основной леммы из [12] будем рассматривать семейство $\{\lambda_r^n: n, r\in\mathbb{N}^+\}$, в качестве семейства Γ' — его же, в качестве F будем рассматривать любое семейство отображений Φ такое, что каждое отображение φ_r^n ставит в соответствие любому элементу покрытия λ_r^n содержащийся в нем элемент, $\Phi=\{\varphi_r^n: n, r\in\mathbb{N}^+\}$. Применима основная лемма из [12]: слово $\bar{g}$ можно представить в виде $\bar{g}_{\delta(1)}\odot\dots\odot\bar{g}_{\delta(k)}$, где $\bar{g}_i\in\widehat{\Xi}_i(\lambda)$ для всех $i=1,\dots,k$, $\delta\in S_k, k\in\mathbb{N}^+$ и представление $\bar{g}_{\delta(1)}\odot\dots\odot\bar{g}_{\delta(k)}$ — правильное представление слова $\bar{g}$, построенное по представлению $\bar{x}_{\pi(1)}\odot\dots\odot\bar{x}_{\pi(m)}\odot\bar{y}_{\sigma(1)}\odot\dots\odot\bar{y}_{\sigma(m)}$. Будем считать, что среди слов $\bar{g}_{\delta(1)},\dots,\bar{g}_{\delta(k)}$ нет слов, входящих в пары с номером ω (поскольку слово $\bar{g}$ несократимо, эти слова можно просто вычеркнуть). Рассмотрим строение данного правильного представления.

Множество всех слов $\{\bar{g}_{\delta(1)},\dots,\bar{g}_{\delta(k)}\}$ можно разбить на минимальные группы $\{\bar{g}_{\delta(1)},\dots,\bar{g}_{\delta(k_1)}\},\dots,\{\bar{g}_{\delta(k_{q-1}+1)},\dots,\bar{g}_{\delta(k)}\}$ так, что любая цепочка в слове $\bar{g}$, связывающая две буквы, входящие в слова из разных групп, идеальна. Для удобства положим $k_0=0$, $k_q=k$. Рассмотрим i-ю группу. Найдем в ней слова наименьшей длины (как элементов $F_0(X)$). Ясно, что среди этих слов будет по крайней мере одно из слов $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}$, $\bar{g}_{\delta(k_i)}$. Поскольку буквы из левых и правых половин самых коротких слов входят лишь в идеальные цепочки, каждая из этих букв содержится в множестве $\{g_1,\dots,g_{2p}\}$. Кроме того, если рассматриваемые слова входят в пару $\{\bar{g}_{n_1(j)}, \bar{g}_{n_2(j)}\}$, $\bar{g}_{n_1(j)}\equiv x_1\dots x_t u v^{-1} x_t^{-1}\dots x_1^{-1}$, $\bar{g}_{n_2(j)}\equiv x_1\dots x_t w z^{-1} x_t^{-1}\dots x_1^{-1}$, то $x_1\dots x_t$ и $z^{-1}x_t^{-1}\dots x_1^{-1}$, есть слово $\bar{z}_{k(j)}$, из которого, возможно, вычеркнуты некоторые пары букв, находящихся на одинаковом расстоянии от концов слова $\bar{z}_{k(j)}$ (в применении к рассматриваемому случаю, если $j\le n$, то $\bar{z}_{k(j)}\equiv\bar{x}_{\pi(j)}$ или $\bar{z}_{k(j)}$ есть слово $\bar{x}_{\pi(j)}$, две средние буквы которого переставлены, а, если $j>n$, то $\bar{z}_{k(j)}\equiv\bar{y}_{\sigma(j-n)}$ или $\bar{z}_{k(j)}$ есть слово $\bar{y}_{\sigma(j-n)}$, две средние буквы которого переставлены). Если $j\le n$, то $x_1\dots x_t u z^{-1} x_t^{-1}\dots x_1^{-1}\in\widehat{\Psi}_{\pi(j)}$ в силу того, что мы условились считать покрытия вида $\xi(h_1\dots h_k, r)$ вписанными в $\xi(h_1\dots\widehat{h_s}\dots h_k, r)$, если же $j>n$, то $x_1\dots x_t u z^{-1} x_t^{-1}\dots x_1^{-1}\in\widehat{\Psi}_{\sigma(j-n)}$, поскольку $x_1,\dots,x_t\in\{g_1,\dots,g_{2p}\}\subseteq G$ и, следовательно, покрытие $\lambda_{\sigma(j-n)+n}$ вписано в покрытие $\xi(x_1\dots x_t, \sigma(j-n))$. В дальнейшем если j — номер некоторой пары слов, то $\pi(j)$ условимся называть ее δ-номером при $j\le n$, $\sigma(j-n)$ — при $j>n$.

Предположим, что в число выделенных самых коротких слов входят слова $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s)}$, а слово $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s+1)}$ не входит. Пусть для каждого $r\in\{1, \ldots, s\}$ $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+r)}\equiv x_1 \ldots x_t u_r v_r^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$. Пусть, кроме того, в число выделенных слов входят слова $\bar{g}_{\delta(k_i)}, \bar{g}_{\delta(k_i-1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_i-s')}$, а слово $\bar{g}_{\delta(k_i-s'-1)}$ не входит и $\bar{g}_{\delta(k_i-l)} \equiv x_1 \ldots x_t a_l b_l^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$ при $l=0, \ldots, s'$. Предположим, что цепочка в слове $\bar{g}$, соединяющая буквы u_1 и b_0^{-1}, не квазиидеальна. Через $r^{(i)}$ обозначим наименьшее из чисел p, n_0 и m_0, где n_0 — наименьший из δ-номеров тех состоящих из выделенных слов пар, δ-номера которых не превосходят n, а m_0 — наименьший из δ-номеров тех пар, δ-номера которых больше n, из которого вычтено число n. Положим $A = \{(x_1, \ldots, x_t, u_r) : r\in\{1, \ldots, s\}\} \cup \{(x_1, \ldots, x_t, v_r) : r\in\{1, \ldots, s-1\}\} \cup \{(x_1, \ldots, x_t, a_l) : l\in\{0, \ldots, s'-1\}\} \cup \{(x_1, \ldots, x_t, b_l) : l\in\{0, \ldots, s'\}\}$. Если слова $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s)}$ и $\bar{g}_{\delta(k_i-s')}$ содержатся в разных парах, то положим $A' = A \cup \{(x_1, \ldots, x_t, v_s), (x_1, \ldots, x_t, a_{s'})\}$; в противном случае положим $A'=A$. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что множество A' содержится в одном элементе покрытия

$$\bigcup_{r\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{\{q_1, \ldots, q_{2r}\}=\{1, 1, \ldots, r, r\}} \xi(x_1 \ldots x_t, \ q_1+r^{(i)}-1)\circ\ldots\circ \xi(x_1 \ldots x_t, \ q_{2r}+r^{(i)}-1),$$

которое по определению вписано в покрытие $\gamma'_{t+1}(r^{(i)})$. Значит, найдется элемент U покрытия $\gamma'_{t+1}(r^{(i)})$, содержащий множество A'. Пусть $f'_{t+1}(r^{(i)})(U) = (y_1, \ldots, y_t, u)$. Положим $\bar{u}^{(i)} \equiv x_1 \ldots x_t u_1 u^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar{v}^{(i)} \equiv x_1 \ldots x_t u b_0^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$; в словах $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_i-s'-1)}$ заменим буквы, стоящие на $t+1$-ом месте от левого конца, на букву u, а буквы, стоящие на $t+1$-ом месте от правого конца, — на букву u^{-1}. В результате мы получим слова $\bar{g}'_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar{g}'_{\delta(k_i-s'-1)}$.

Если в число выделенных слов слово $\bar{g}_{\delta(k_i)}$ (или $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}$) не входит, то за b_0 следует принять v_s (соответственно, за $u_1-u_{s'}$), положить $s'=-1$ $(s=0)$ и все то из вышесказанного, что относится к точкам вида $(x_1, \ldots, x_t, a_l)$ и $(x_1, \ldots, x_t, b_l)$ (соответственно, к точкам $(x_1, \ldots, x_t, u_r)$ и $(x_1, \ldots, x_t, v_r)$), игнорировать.

Если цепочка, соединяющая буквы u_1 и b_0^{-1} в слове $\bar{g}$, квазиидеальна, то положим $\bar{u}^{(i)} \equiv x_1 \ldots x_t u_1 u_s^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar{v}^{(i)} \equiv e$ и будем считать, что i-тая группа обработана.

Положим $\bar{g}' = \bar{g}'_{\delta(k_{i-1}+s+1)} \ldots \bar{g}'_{\delta(k_i-s'-1)}$. Так же, как и раньше, разобьем слова $\bar{g}'_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar{g}'_{\delta(k_i-s'-1)}$ на группы и рассмотрим группу с номером j. Для нее проделаем те же самые операции. Единственным изменением будет то, что на $t+1$-ом месте от левого конца в словах из этой группы будет стоять не буква из множества $\{g_1, \ldots, g_{2p}\}$, а буква u. Заметим, что $\{x_1, \ldots, x_t, u_1\}\subseteq\{g_1, \ldots, g_{2p}\}$, поскольку буква u_1 не сокращается в слове $\bar{g}$ (если в качестве u_1 фигурирует буква $a_{s'}$, то не сокращается та буква u_1, которая стоит на $t+1$-ом месте слева в слове $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}$). Поэтому слово $x_1 \ldots x_t u x x^{-1} u^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1$ является F'-сдвинутым на $(r_1, \ldots, r_t, r^{(i)})$ словом $x_1 \ldots x_t u_1 x x^{-1} u_1^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$ для произвольных $x, r_1, \ldots, r_t$ и, следовательно, входит в число слов $\bar{h}$, определяющих множество G. Значит, $u\in G$. Пусть $\bar{y}$ входит в число самых коротких слов из рассматриваемой группы. Положим $\bar{y}'=\bar{y}$, если пара, в которой содержится $\bar{y}$, получена не в результате деления;

если же эта пара получена в результате деления некоторого слова, то через $\overline{y}'$ обозначим это слово. Из того, что $u \in G$, вытекает, что если $\overline{y}$ содержится в паре с δ-номером $l>n$, то $\overline{y}' \in \widehat{\Psi}_{l-n}$ в силу определения покрытия $\lambda_l = \theta_{l-n}$. Если же $l \leqq n$, то заметим, что среди последних координат элементов множества A' находится буква из слова $\overline{z}_l$, которая была заменена на букву v_s (или $a_{s'}^{-1}$) при Ф-сдвиге (см. условие 4) из формулировки леммы 2.2), поэтому $\overline{y}'$ является F'-сдвинутым на некоторый набор $(r_\alpha, \ldots, r_\beta, r^{(i)}, r_\gamma, \ldots, r_\delta)$ и укороченным на некоторое число словом $\overline{z}_l \in \widehat{\Psi}_l$. Поскольку для $\{\Psi_n\}$, Γ' и F' выполнено условие $\binom{*}{2}$, множество, построенное аналогично множеству A', все равно будет содержаться в одном элементе покрытия $\gamma_{l(\overline{y})/2}(r^{(ij)})$, для $r^{(ij)}$, выбранного аналогично $r^{(i)}$.

После того, как мы получим слова $\overline{u}^{(ij)}$ и $\overline{v}^{(ij)}$ аналогично тому, как были получены слова $\overline{u}^{(i)}$ и $\overline{v}^{(i)}$, и набор слов $\overline{g}''_{\delta(k_{i-1}+\widetilde{s}+1)}, \ldots, \overline{g}''_{\delta(k_i-\widetilde{s}'-1)}$, рассмотрим слово $\overline{g}'' = \overline{g}''_{\delta(k_{i-1}+\widetilde{s}+1)} \ldots \overline{g}''_{\delta(k_i-\widetilde{s}'-1)}$. Будем продолжать процесс до тех пор, пока на некотором шаге мы не сможем сказать, что группа обработана; тогда вернемся на шаг назад и рассмотрим еще не рассмотренную группу; если такой не окажется, вернемся на два шага назад, и т. д. Будем продолжать процесс до тех пор, пока это будет возможно. В результате мы получим конечное множество слов вида $\overline{u}^{(i_1 \ldots i_j)}$ и $\overline{v}^{(i_1 \ldots i_j)}$; число j может быть разным для разных слов. Пусть j_0 — максимальное из всех возможных j, i_0 — максимальное число вида i_q. Переобозначим слова вида $\overline{u}^{(i_1 \ldots i_j)}$ и $\overline{v}^{(i_1 \ldots i_j)}$: вместо $\overline{u}^{(i_1 \ldots i_j)}$ будем писать $\overline{w}^{(i_1 \ldots i_j \overbrace{0 \ldots 0}^{j_0-j+1 \text{ раз}})}$, а вместо $\overline{v}^{(i_1 \ldots i_j)}$ — $\overline{w}^{(i_1 \ldots i_j \overbrace{i_0+1 \ldots i_0+1}^{j_0-j+1 \text{ раз}})}$. Будем говорить, что $\overline{w}^{(s_1 \ldots s_{j_0+1})}$ меньше $w^{(t_1 \ldots t_{j_0+1})}$, если набор $(s_1, \ldots, s_{j_0+1})$ меньше набора $(t_1, \ldots, t_{j_0+1})$ относительно лексикографического упорядочения. По построению произведение записанных в порядке возрастания слов вида $\overline{w}^{(i_1 \ldots i_{j_0+1})}$ равно $\overline{g}$. С другой стороны, для каждого возможного набора $(i_1, \ldots, i_j)$ слова $\overline{u}^{(i_1 \ldots i_j)}$ и $\overline{v}^{(i_1 \ldots i_j)}$ встречаются в этом произведении ровно по одному разу; при этом $\overline{u}^{(i_1 \ldots i_j)}, \overline{v}^{(i_1 \ldots i_j)} \in \widehat{\Psi}_{r(i_1 \ldots i_j)}(\Gamma') = \widehat{\Psi}_{r(i_1 \ldots i_j}(\Gamma', M', D', F')$ и если $r^{(i_1 \ldots i_j)}, r^{(t_1 \ldots t_s)} < p$, $(i_1, \ldots, i_j) \neq (t_1, \ldots, t_s)$, то $r^{(i_1 \ldots i_j))} \neq r^{(t_1 \ldots t_s)}$. Заметим, что из вида правильного представления и способа разбиения сомножителей в нем на группы вытекает, что число различных возможных наборов вида $(i_1, \ldots, i_j)$ не превосходит p, ибо для каждого такого набора хотя бы по одной букве каждого из слов $\overline{u}^{(i_1 \ldots i_j)}$ и $\overline{v}^{(i_1 \ldots i_j)}$ входит в слово $\overline{g}$, длина которого равна $2p$. Отсюда и из свойства 5° элементов $\mathfrak{Q}$ следует, что найдутся такое натуральное число $l \leqq p$ и такой набор $\{k_1, \ldots, k_{2l}\}$, что $\{k_1, \ldots, k_{2l}\} = \{1, 1, 2, 2, \ldots, l, l\}$ и $\overline{g} \in \widehat{\Psi}_{k_1}(\Gamma', M', D', F') \cdot \ldots \cdot \widehat{\Psi}_{k_{2l}}(\Gamma', M', D', F')$; свойство 5° необходимо для того, чтобы иметь возможность заменять при необходимости для получения такого произведения множество $\widehat{\Psi}_r(\Gamma', M', D', F')$ на множество $\widehat{\Psi}_s(\Gamma', M', D', F') \supseteq \widehat{\Psi}_r(\Gamma' M', D', F')$ при $s \leqq r$ (точнее, нужно даже не само свойство 5°, а его ослабленный вариант — вписанность $\gamma_i(r+1)$ в $\gamma_i(r)$).

Вспомним, что четверку (Γ', M', D', F') мы выбирали так, чтобы $\gamma'_n(r)$ было вписано в $\gamma_n(2r)$ для всех натуральных n и r. По свойству 5° элементов $\mathfrak{D}$ покрытие

$\gamma'_n(t)$ вписано в покрытие $\gamma_n(2r)\wedge\gamma_n(2r-1)$ для произвольных n, $r\in\mathbb{N}^+$, а это означает, что $\widehat{\Psi}_r(\Gamma', M', D', F')\subseteq\widehat{\Psi}_{2r}(\Gamma, M, D, F)\cap\widehat{\Psi}_{2r-1}(\Gamma, M, D, F)$, если r — любое натуральное число. В произведении $\widehat{\Psi}_{k_1}(\Gamma', M', D', F')\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}_{k_{2l}}(\Gamma', M', D', F')$ для любой пары k_i, k_j одинаковых чисел, где $i<j<2l$, заменим $\widehat{\Psi}_{k_i}(\Gamma', M', D', F')$ на $\widehat{\Psi}_{2k_i}(\Gamma, M, D, F)$, а $\widehat{\Psi}_{k_j}(\Gamma', M', D', F')$ — на $\widehat{\Psi}_{2k_i-1}(\Gamma, M, D, F)$. Из вышесказанного вытекает, что после такой замены слово $\bar{g}$ будет оставаться элементом произведения; индексы у разных сомножителей при этом сделаются разными. Иными словами, найдется перестановка π длины $2l$, для которой $\bar{g}\in\widehat{\Psi}_{\pi(1)}(\Gamma, M, D, F)\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}_{\pi(2l)}(\Gamma, M, D, F)\subseteq\langle\widehat{\Psi}_k(\Gamma, M, D, F)\rangle$, т. е. $\bar{g}\in U$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Основная лемма позволяет доказать главный результат этого раздела:

Теорема 1.1. *Пусть X — полное по Дьедонне тихоновское пространство. Тогда свободная топологическая группа $F_M(X)$ полна по Вейлю.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{V}$ — левая равномерная структура на группе $F_M(X)$. Рассмотрим произвольный фильтр Коши ξ в $(F_M(X), \mathscr{V})$. Из основной леммы вытекает, что фильтр $\xi'=\{\bar{F}^\rho\colon F\in\xi\}$ — тоже фильтр Коши в $(F_M(X), \mathscr{V})$. В самом деле: пусть U — произвольная окрестность единицы в группе $F_M(X)$. Нам нужно показать, что найдется элемент Φ семейства ξ', для которого $\Phi^{-1}\Phi\subseteq U$. Найдем окрестность единицы V и множество $F\in\xi$ такие, что $\bar{V}^\rho\subseteq U$ и $F^{-1}F\subseteq V$. Положим $\Phi=\bar{F}^\rho$. Тогда $\Phi\in\xi'$ и $\Phi^{-1}\Phi=(\bar{F}^\rho)^{-1}\bar{F}^\rho=(\overline{F^{-1}})^\rho\,\bar{F}^\rho\subseteq\overline{F^{-1}F}^\rho\subseteq\bar{V}^\rho\subseteq U$, что и требовалось.

Топология ρ слабее свободной топологии группы $F_M(X)$, поэтому ξ' — фильтр Коши в группе $(F(X), \rho)$, наделенной левой равномерностью. По теореме М. Г. Ткаченко о полноте по Вейлю группы $(F(X), \rho)$ [7] фильтр ξ' сходится. Он состоит из замкнутых в ρ-топологии множеств, значит, $\cap\xi'\neq\varnothing$, поэтому фильтр ξ' сходится и в $(F_M(X), \mathscr{V})$. Всякий фильтр, мажорирующий сходящийся фильтр, сходится [9]; значит, фильтр ξ тоже сходится.

Мы показали, что произвольный фильтр Коши в $(F_M(X), \mathscr{V})$ сходится, что и означает полноту по Вейлю группы $F_M(X)$.

Теорема доказана.

В. Г. Пестов в [10] доказал, что необходимым условием полноты группы $F_M(X)$ является полнота по Дьедонне пространства X. Из этого результата и теоремы 1.1 вытекает эквивалентность полноты по Дьедонне тихоновского пространства X и полноты по Вейлю его свободной топологической группы.

Следствие 1.1. *Всякая отделимая топологическая группа G является фактор-группой некоторой отделимой полной по Вейлю топологической группы.*

Доказательство. Любое тихоновское пространство является образом некоторого паракомпакта при факторном отображении. Пусть X — паракомпакт, $f\colon X\xrightarrow{\text{на}}G$ — факторное отображение. Рассмотрим продолжение f до непрерывного гомоморфизма $\widehat{f}\colon F_M(X)\xrightarrow{\text{на}}G$. Гомоморфизм $\widehat{f}$ открыт, ибо отображение f факторно. Значит, G является фактор-группой группы $F_M(X)$. Пространство X топологически полно как паракомпакт. По теореме 1.1 группа $F_M(X)$ полна по Вейлю.

Доказательство завершено.

2. Нульмерность свободной топологической группы, порожденной нульмерным пространством. Этот раздел посвящен доказательству следующего утверждения:

Теорема 2.1. *Пусть X — тихоновское пространство,* $\dim X=0$. *Тогда* $\operatorname{ind}(F_M(X))=0$.

Нам понадобится база окрестностей единицы в $F_M(X)\mathcal{U}=\{\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle:$ $(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{Q}\}$. Прежде всего заметим, что семейства Γ и M из четверок вида $(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{Q}$ можно считать состоящими из последовательностей дизъюнктных открытых покрытий. В самом деле: имеет место

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{U}_X$ — универсальная равномерность на вполне регулярном пространстве $\widetilde{X}$, $\dim\widetilde{X}=0$. Тогда для всех $U\in\mathcal{U}_{\widetilde{X}}$ существует такое открытое дизъюнктное покрытие γ пространства $\widetilde{X}$, что $U_\gamma\subseteq U$ (напомним, что $U_\gamma=\{V\times V:\ V\in\gamma\}$).*

Доказательство. Пусть $U\in\mathcal{U}_{\widetilde{X}}$. Как и при доказательстве леммы 1.1, из [12] найдем непрерывную псевдометрику d на $\widetilde{X}$, для которой $\{(x, y)\in\widetilde{X}^2:\ d(x, y)<1\}\subseteq U$, отождествим находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга точки, получив метрическое пространство $(Y, \bar{d})$ вместе с непрерывным отображением $\pi:\widetilde{X}\to Y$, покроем пространство Y открытыми шарами радиуса $1/4$ и впишем в него локально конечное открытое покрытие μ. Заметим, что μ функционально открыто (как открытое покрытие метрического пространства), поэтому $\lambda=\{\pi^{-1}(V):\ V\in\mu\}$ — функционально открытое покрытие пространства $\widetilde{X}$, причем λ локально конечно и $U_\lambda\subseteq U$. В работе [11] показано, что в данных условиях в покрытие λ можно вписать дизъюнктное открытое покрытие пространства $\widetilde{X}$. Пусть это покрытие γ. Тогда $U_\gamma\subseteq U$. Лемма доказана.

Замечание. Данная лемма в слегка ослабленном варианте (а именно, для пространств, нульмерных в смысле Ind) была доказана М. Г. Ткаченко в [4]. Проведенные выше рассуждения почти дословно повторяют его доказательство.

При построении семейств $\Gamma=\{\gamma_n(r):\ n,\ r\in\mathbb{N}^+\}$ и $M=\{\mu_n(r)(x_1, \ldots x_{n-1}):\ n, r\in\mathbb{N}^+,$ $(x_1, \ldots, x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}\}$, описанном в первом разделе, в нормальные покрытия вида $\gamma_n^{(n)}(r, x_1, \ldots, x_{n-1})$ будем вписывать не локально конечные, а дизъюнктные открытые покрытия пространства $\widetilde{X}$; в результате все покрытия вида $\theta_n(r)(A)$ окажутся дизъюнктными, а вместе с ними станут дизъюнктными покрытия вида $\gamma_n(r)$ и $\mu_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Каждое открытое дизъюнктное покрытие η пространства $\widetilde{X}$ нормально, будучи локально конечным, поэтому в него можно вписать покрытие λ, открытое относительно некоторой непрерывной псевдометрики на $\widetilde{X}$. Объединяя элементы λ, вписанные в один и тот же елемент η, мы получим само покрытие η - значит, каждое дизъюнктное открытое покрытие пространства $\widetilde{X}$ открыто относительно некоторой непрерывной псевдометрики на $\widetilde{X}$, поэтому с построением семейства D проблем не будет. Доказательство того, что семейство $\mathcal{U}_0=\{\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle$ $(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{Q}_0\}$, где $\mathfrak{Q}_0=\{(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{Q}:\ \Gamma$ и M — семейства дизъюнктных открытых покрытий$\}$, является базой в единице топологии группы $F_M(X)$, аналогично доказательству теоремы 1.1. из [12].

Лемма 2.2. *Пусть $(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{Q}_0$, $\Gamma=\{\gamma_n(r)\}$, $M=\{\mu_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, $D=\{d_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, $F=\{f_n(r)\}$, $\bar{g}=g_1\ldots g_{2p}\in\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle$. Тогда найдутся такое натуральное $l\leqq 2p$ и такая перестановка σ длины l, что $\bar{g}\in\widehat{\Psi}_{\sigma(1)}(\Gamma, M, D, F)\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}_{\sigma(l)}(\Gamma, M, D, F)$.*

Доказательство. Для всех натуральных n и r положим $\eta_n(r)=\widetilde{X}^n$ и $\varphi(r)=\underbrace{(x^*, \ldots, x^*)}_{n\text{ раз}}$, где x^* — произвольно фиксированная точка из $\widetilde{X}$. Пусть $H=\{\eta_n(r)$ $n,\ r\in\mathbb{N}^+\}$ и $\Phi=\{\varphi_n(r):\ n,\ r\in\mathbb{N}^+\}$. Тогда для семейств Γ, H и Φ выполнено усло вие (*). Поскольку $\bar{g} \in \langle \widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle$, найдутся такие $n \in \mathbb{N}^+$ и $\pi \in S_n$, что $\bar{g}=\bar{x}_{\pi(1)} \ldots \bar{x}_{\pi(n)}$, где $\bar{x}_i \in \widehat{\Psi}_i(\Gamma, M, D, F)=\widehat{\Psi}_i(\Gamma)$; по лемме 2.1 из [12] и в силу условия 4° для элементов $\mathfrak{Q}$ (и, следовательно, $\mathfrak{Q}_0$) все $\bar{x}_i$ можно считать несократимыми каноническими элементами $\widehat{\Psi}_i(\Gamma)$. Применим основную лемму из [12]. Пусть $\bar{g}=\bar{g}_{\delta(1)} \odot \cdots \odot \bar{g}_{\delta(k)}$ — правильное представление слова $\bar{g}$, построено по представлению $\bar{x}_{\pi(1)} \odot \cdots \odot \bar{x}_{\pi(n)}$. Заметим, что в силу определения семейства Φ все главные буквы, полученные в результате деления слов, совпадают с x^* или с x^{*-1}. Будем считать, что среди слов $\bar{g}_{\delta(1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k)}$ нет слов, входящих в пары с номером ω (иначе вычеркнем эти слова).

Множество всех слов $\{\bar{g}_{\delta(1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k)}\}$ разобьем на минимальные группы $\{\bar{g}_{\delta(1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_1)}\}, \ldots, \{\bar{g}_{\delta(k_{q-1}+1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k)}\}$ с тем свойством, что любая цепочка в слове $\bar{g}$, связывающая две буквы, входящие в слова из разных групп, идеальна. Рассмотрим i-ю группу. Найдем в ней слова наименьшей длины (под длиной здесь имеется в виду длина в $F_0(X)$). Среди выделенных слов будет по крайней мере одно из слов $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}, \bar{g}_{\delta(k_i)}$ (как и раньше, условимся считать, что $k_0=0$, $k_q=k$). Если рассматриваемые слова содержат слова из пары $\{\bar{g}_{n_1^{(j)}}, \bar{g}_{n_2^{(j)}}\}$, $\bar{g}_{n_1^{(j)}} \equiv x_1 \ldots x_t uv^{-1}x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar{g}_{n_2^{(j)}} \equiv x_1 \ldots x_t wz^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, то слово $x_1 \ldots x_t uz^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$ есть слово $\bar{z}_{\pi(j)}$, из которого, возможно, вычеркнуты некоторые пары букв, находящиеся на одинаковом расстоянии от концов слова $\bar{z}_{\pi(j)}$, причем либо $\bar{z}_{\pi(j)} \equiv \bar{x}_{\pi(j)}$, либо $\bar{z}_{\pi(j)}$ есть слово $\bar{x}_{\pi(j)}$, средние буквы которого переставлены; стало быть, $x_1 \ldots x_t uz^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1} \in \widehat{\Psi}_{\pi(j)}(\Gamma)$.

Предположим, что в число выделенных самых коротких слов входят слова $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s)}$, а слово $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s+1)}$ не входит. Пусть для каждого $r \in \{1, \ldots, s\}$ $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+r)} \equiv x_1 \ldots x_t u_r v_r^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$. Пусть, кроме того, в число выделенных слов входят слова $\bar{g}_{\delta(k_i)}, \bar{g}_{\delta(k_i-1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_i-s')}$, а слово $\bar{g}_{\delta(k_i-s'-1)}$ не входит, и $\bar{g}_{\delta(k_i-l)} \equiv x_1 \ldots x_t a_l b_l^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$ при $l \in \{0, \ldots, s'\}$. Предположим, что цепочка в слове $\bar{g}$, соединяющая буквы u_1 и b_0^{-1}, не квазиидеальна. Если слова $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s)}$ и $\bar{g}_{\delta(k_i-s')}$ входят в разные пары, т. е. ни одно из этих слов не получено в результате деления, то положим $\bar{u}^{(i)} \equiv x_1 \ldots x_t u_1 v_s^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar{v}^{(i)} \equiv x_1 \ldots x_t a_{s'} b_0^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$. Через $r^{(i)}$ обозначим наименьший из δ-номеров пар, содержащих слова $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_{i-1}+s)}$, через $s^{(i)}$ — наименьший из δ-номеров пар, содержащих слова $\bar{g}_{\delta(k_i-s')}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_i)}$ (δ-номер пары, как и раньше, равен $\pi(j)$, если ее номер равен j). Из дизъюнктности элементов семейства Γ, свойства 4° и того, что по свойству 5° покрытие $\gamma_n(r)$ вписано в $\gamma_n(s)$ для всех натуральных n, r и s таких, что $r \geqq s$, вытекает, что $\bar{u}^{(i)} \in \widehat{\Psi}_{r^{(i)}}(\Gamma)$ и $\bar{v}^{(i)} \in \widehat{\Psi}_{s^{(i)}}(\widehat{\Gamma})$, поскольку слова $\bar{g}_{\delta(k_{i-1}+1)}, \ldots, \bar{g}_{(k_{i-1}+s)}$ и $\bar{g}_{\delta(k_i-s')}, \ldots, \bar{g}_{\delta(k_i)}$ являются в этом случае словами вида $\bar{z}_j$ с вычеркнутыми парами некоторых симметричных букв, и $\bar{z}_j \in \widehat{\Psi}_j(\widehat{\Gamma})$. Для всех $j \in \{k_{i-1}+s+1, \ldots, k_i-s'-1\}$ через $\bar{g}'_{\delta(j)}$ обозначим слово $\bar{g}_{\delta(j)}$. Заметим, что буквы, стоящие на расстоянии $\leqq t+1$

от концов слов $\bar g_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar g_{\delta(k_i-s'-1)}$, совпадают с соответствующими буквами слов $\bar z_j$, в результате Ф-сдвига и укорачивания которых были получены эти слова (см. 4) из формулировки леммы 2.2 из [12]), поскольку ни одна из букв в цепочке, содержащей средние буквы самых коротких слов (а, значит, и буквы, стоящие на $t+1$-х местах от концов слов $\bar g_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar g_{\delta(k_i-s'-1)}$), не является главной; цепочки же, содержащие буквы, стоящие на меньших $t+1$ расстояниях от концов этих слов, вообще идеальны.

Пусть слова $\bar g_{\delta(k_{i-1}+s)}$ и $\bar g_{\delta(k_i-s')}$ входят в одну пару, т. е. получены в результате деления слова $x_1, \ldots, x_t u_s b_{s'}^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$; тогда $v_s = a_{s'} = x^*$. В силу условия 4) среди букв вида u_j, v_j^{-1}, a_j, b_j^{-1} при $j \in \{1, \ldots, s\} \cup \{0, \ldots, s'\}$ найдется буква ξ со следующим свойством: если $j' \in \{k_{i-1}+s+1, \ldots, k_i-s'-1\}$ и слово $\bar g_{\delta(j')}$ получено в результате Ф-сдвига и укорачивания слова $\bar z_\theta$, то буква слова $\bar z_\theta$, соответствующая букве $x^*(x^{*-1})$, стоящей на $t+1$-м месте слева (справа) в слове $\bar g_{\delta(j')}$, есть буква ξ, и ξ — левая (соответственно, правая) средняя буква в содержащем ее слове. Предположим для определенности, что ξ — левая средняя буква в слове $\bar g_{\delta(j)}$, $j \in \{k_{i-1}+1, \ldots, k_{i-1}+s\}$. Положим $\bar u^{(i)} \rightleftharpoons x_1 \ldots x_t u_1 v_{j-1}^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar v^{(i)} \rightleftharpoons x_1 \ldots x_t u_j b_0^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, а в словах $\bar g_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar g_{\delta(k_i-s'-1)}$ заменим буквы, стоящие на $k+1$-ом месте слева, на букву ξ, а справа — на букву ξ^{-1}. Получим новые слова $\bar g'_{\delta(k_{i-1}+s+1)}, \ldots, \bar g'_{\delta(k_i-s'-1)}$. Ясно, что если слово $\bar g_{\delta(r)}$ при $r \in \{k_{i-1}+s+1, \ldots, k_i-s'-1\}$ получено в результате Ф-сдвига и укорачивания слова $\bar z_s$ (см. 4)), то слово $\bar g'_{\delta(r)}$ тоже получено в результате Ф-сдвига и укорачивания этого слова, причем буквы, стоящие на расстоянии $\leq t+1$ от концов слова $\bar g'_{\delta(r)}$, совпадают с соответствующими буквами слова $\bar z_s$ (напомним, что эти соответствующие буквы не обязаны находиться на том же расстоянии от концов $\bar z_s$). Пусть $r^{(i)}$ — наименьший из δ-номеров пар, содержащих слова $\bar g_{\delta(r)}$ для $r \in \{k_{i-1}+1, \ldots, k_{i-1}+j-1\}$, $s^{(i)}$ — наименьший из δ-номеров пар, содержащих слова $\bar g_{\delta(r)}$ для $r \in \{k_{i-1}+j, \ldots, k_{i-1}+s, \ldots, k_i-s, \ldots, k_i\}$. Тогда $\bar u^{(i)} \in \widehat{\Psi}_{r^{(i)}}(\Gamma)$ и $\bar v^{(i)} \in \widehat{\Psi}_{s^{(i)}}(\Gamma)$ в силу дизъюнктности элементов Γ и свойств 4°, 5°. Если $j=1$, то полагаем $\bar u^{(i)} \rightleftharpoons e$, а $r^{(i)}$ не определяем.

В случае, когда ξ — правая средняя буква или содержится в слове, находящемся правее слова $\bar g_{\delta(k_i-s'-1)}$, поступим аналогичным образом.

Если в число выделенных самых коротких слов не входит слово $\bar g_{\delta(k_{i-1}+1)}$ (слово $\bar g_{\delta(k_i)}$), то положим $\bar u^{(i)} \rightleftharpoons e$, $\bar v^{(i)} \rightleftharpoons x_1 \ldots x_t a_{s'} b_0^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$ ($\bar u^{(i)} \rightleftharpoons x_1 \ldots x_t u_1 v_s^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar v^{(i)} \rightleftharpoons e$), $\bar g_{\delta(j)} = \bar g_{\delta(j)}$ для $j \in \{k_{i-1}+s'+1, \ldots, k_i-s'-1\}$. Через $s^{(i)}(r^{(i)})$ обозначим наименьший из δ-номеров пар, содержащих слова $\bar g_{\delta(k_i-s')}, \ldots, \bar g_{\delta(k_i)}$ (слова $\bar g_{\delta(k_{i-1}+1)}, \ldots, \bar g_{\delta(k_{i-1}+s)}$). Тогда $\bar v^{(i)} \subseteq \widehat{\Psi}_{s^{(i)}}(\Gamma)(\bar u^{(i)} \in \widehat{\Psi}_{r^{(i)}}(\Gamma))$.

Если цепочка, связывающая буквы u_1 и b_0^{-1}, квазиидеальна, то положим $\bar u^{(i)} \rightleftharpoons x_1 \ldots x_t u_1 b_0^{-1} x_t^{-1} \ldots x_1^{-1}$, $\bar v^{(i)} \rightleftharpoons e$, а через $r^{(i)}$ обозначим наименьший из δ-номеров пар, содержащих слова из i-й группы; тогда $\bar u^{(i)} \in \widehat{\Psi}_{r^{(i)}}(\Gamma)$. В этом случае скажем, что i-я группа обработана.

Если i-я группа не обработана, то положим $\overline{g}' = \overline{g}'_{\delta(k_{i-1}+s+1)} \odot \cdots \odot \overline{g}'_{\delta(k_i-s'-1)}$ (произведены такие же сокращения, как и при получении слова $\overline{x}$ из слова $\overline{g}_{\delta(1)} \odot \cdots \odot \overline{g}_{\delta(k)}$, т. е. сокращаются буквы, стоящие на тех же местах, что и буквы, сокращающиеся в слове $\overline{g}_{\delta(k_{i-1}+s+1)} \odot \cdots \odot \overline{g}_{\sigma(k_i-s'-1)}$. Для слова $\overline{g}'$ проделаем в точности такие же операции: разобьем на группы и т. д. Группу с номером j и полученные при ее обработке числа, аналогичные числам $r^{(i)}$ и $s^{(i)}$, и слова, аналогичные словам $\overline{u}^{(i)}$ и $\overline{v}^{(i)}$, заиндексируем парой (i, j). Рассмотрев группы со всевозможными номерами $(i_1, \ldots, i_j)$, мы получим набор слов вида $\overline{u}^{(i_1, \ldots, i_j)}$ и $\overline{v}^{(i_1, \ldots, i_j)}$; при этом непустым словам $\overline{u}^{(i_1, \ldots, i_j)}$ соответствуют числа $r^{(i_1, \ldots, i_j)}$ такие, что $\overline{u}^{(i_1, \ldots, i_j)} \subseteq \widehat{\Psi}_{r^{(i_1, \ldots, i_j)}}(\Gamma)$, непустым словам $\overline{v}^{(i_1, \ldots, i_j)}$ — числа $s^{(i_1, \ldots, i_j)}$ такие, что $\overline{v}^{(i_1, \ldots, i_j)} \subseteq \Psi_{s^{(i_1, \ldots, i_j)}}(\Gamma)$, и все числа $r^{(i_1, \ldots, i_j)}$ отличаются от чисел $s^{(j_1, \ldots, j_k)}$ и от чисел $r^{(t_1, \ldots, t_s)}$ для произвольных $(j_1, \ldots, j_k)$ и для $(t_1, \ldots, t_s) \neq (i_1, \ldots, i_j)$, а числа $s^{(i_1, \ldots, i_j)}$ отличаются от чисел $r^{(j_1, \ldots, j_k)}$ и от чисел $s^{(t_1, \ldots, t_s)}$ для произвольных $(j_1, \ldots, j_k)$ и для $(t_1, \ldots, t_s) \neq (i_1, \ldots, i_j)$. Выберем максимальную возможную длину j_0 наборов вида $(i_1, \ldots, i_j)$, индексирующих группы, и максимальный элемент i_0 этих наборов. Положим $\overline{u}^{(i_1, \ldots, i_j)} = \overline{w}^{(i_1, \ldots, i_j, \underbrace{0, \ldots, 0}_{j_0-j+1 \text{ раз}})}$, $\overline{v}^{(i_1, \ldots, i_j)} = \overline{w}^{(i_1, \ldots, i_j, \underbrace{i_0+1, \ldots, i_0+1}_{j_0-j+1 \text{ раз}})}$.

Тогда произведение слов вида $\overline{w}^{(i_1, \ldots, i_s)}$, записанных в порядке возрастания их индексов относительно лексикографического порядка, равно $\overline{g}$, и в этом произведении нет квазиидеальных цепочек длины >2, поэтому непустых слов в этом произведении может оказаться не больше $2p$ (ибо хотя бы по одной букве из каждого сомножителя не сокращается в слове $\overline{g}$). Кроме того, все непустые слова вида $\overline{w}^{(i_1, \ldots, i_j, 0, \ldots, 0)}$ содержатся в $\widehat{\Psi}_{r^{(i_1, \ldots, i_j)}}(\Gamma)$, а все непустые слова вида $\overline{w}^{(i_1, \ldots, i_j, i_0+1, \ldots, i_0+1)}$ — в $\widehat{\Psi}_{s^{(i_1, \ldots, i_j)}}(\Gamma)$. Поскольку чисел вида $r^{(i_1, \ldots, i_j)}$ и $s^{(i_1, \ldots, i_j)}$ не более $2p$, каждому из них можно сопоставить числа $r'^{(i_1, \ldots, i_j)}$ и $s'^{(i_1, \ldots, i_j)}$ соответственно так, чтобы было $r'^{(i_1, \ldots, i_j)} \leq r^{(i_1, \ldots, i_j)}$, $s'^{(i_1, \ldots, i_j)} \leq s^{(i_1, \ldots, i_j)}$ и если $(i_1, \ldots, i_j)$, $(j_1, \ldots, j_k)$, $(t_1, \ldots, t_s)$ — произвольные наборы, $(t_1, \ldots, t_s) \neq (i_1, \ldots, i_j)$, то $r'^{(i_1, \ldots, i_j)} \neq s'^{(j_1, \ldots, j_k)}$, $r'^{(i_1, \ldots, i_j)} \neq r'^{(t_1, \ldots, t_s)}$ и $s'^{(i_1, \ldots, i_j)} \neq s'^{(t_1, \ldots, t_s)}$. В силу условия 5° $\widehat{\Psi}_{r'^{(i_1, \ldots, i_j)}(s'^{(i_1, \ldots, i_j)})}(\Gamma) \supseteq \breve{\Psi}_{r^{(i_1, \ldots, i_j)}(s^{(i_1, \ldots, i_j)})}(\Gamma)$, поэтому $\overline{w}^{(i_1, \ldots, i_j, 0 \ldots 0)} \in \widehat{\Psi}_{r'(i_1, \ldots, i_j)}(\Gamma)$ и $\overline{w}^{(i_1, \ldots, i_j, i_0+1, \ldots, i_0+1)} \in \widehat{\Psi}_{s'(i_1, \ldots, i_j)}(\Gamma)$. Мы представили слово $\overline{g}$ в виде элемента произведения $\widehat{\Psi}_{k_1}(\Gamma) \cdot \ldots \cdot \widehat{\Psi}_{k_l}(\Gamma)$, где $l \leq 2p$ и все числа разные, что и требовалось.

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 2.1. Пусть $(\Gamma, M, D, F) \in \mathfrak{G}_0$, $\Gamma = \{\gamma_n(r)\}$, $M = \{\mu_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, $D = \{d_n(r)(x_1, \ldots x_{n-1})\}$, $F = \{f_n(r)\}$. Положим $\gamma'_n(r) = \gamma_n(2r)$, $\mu'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu_n(2r)(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $d'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = d_n(2r)(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $f'_n(r) = f_n(2r)$, $\Gamma' = \{\gamma'_n(r)\}$, $M' = \{\mu'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, $D' = \{d'_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, $F' = \{f'_n(r)\}$. Ясно, что $(\Gamma', M', D', F') \in \mathfrak{G}_0$. Пусть $\overline{g} = g_1 \ldots g_{2p} \notin \langle \widehat{\Psi}_n(\Gamma', M', D', F') \rangle$. Положим $\gamma''_n(r) = \gamma'_n(r)$, при $r \leq 2p$, $\gamma''_n(2p+l) = \gamma_n(4p+i)$, при $i \in \mathrm{N}^+$, $\Gamma'' = \{\gamma''_n(r) : n, r \in N^+\}$. Аналогично определим семейства M'', D'' и F''. Наконец, положим $\gamma_n'''(r)=\gamma_n(2(p+r)-1)$, при n, $r\in\mathbb{N}^+$, $\Gamma'''=\{\gamma_n'''(r): n, r\in\mathbb{N}^+\}$ и аналогично определим M''', D''' и F'''. Очевидно, что $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma', M', D', F')\rangle\cdot\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma''', M''', D''', F''')\rangle\subseteq\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma'', M'', D'', F'')\rangle$. Покажем, что $\bar{g}\cdot\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma''', M''', D''', F''')\rangle^{-1}\cap\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma', M', D', F')\rangle\neq\emptyset$. Предположим, что это не так; тогда $\bar{g}\in\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma'', M'', D'', F'')\rangle$. По лемме 3.2 найдется $l\leqq 2p$ и перестановка $\sigma\in S_l$ такие, что $\bar{g}\in\widehat{\Psi}_{\sigma(1)}(\Gamma'', M'', D'', F'')\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}_{\sigma(l)}(\Gamma'', M'', D'', F'')$. Но для $i\leqq 2p$ $\widehat{\Psi}_i(\Gamma'', M'', D'', F'')=\widehat{\Psi}_i(\Gamma', M', D', F')$. Значит, $\bar{g}\in\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma', M', D', F')\rangle$. Противоречие.

Таким образом, для каждой открытой окрестности $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle$ единицы из базы $\mathscr{U}_0$ найдется меньшая окрестность единицы $U=\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma', M', D', F')\rangle\in\mathscr{U}_0$ такая, что для любого $\bar{g}\notin U$ существует $(\Gamma''', M''', D''', F''')\in\mathfrak{G}_0$, для которого $\bar{g}\cdot\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma''', M''', D''', F''')\rangle^{-1}\cap U=\emptyset$, т. е. U замкнута в $F_M(X)$. Следовательно, у группы $F_M(X)$ есть база окрестностей единицы, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Это и означает нульмерность $F_M(X)$ в смысле ind.

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю профессору А. В. Архангельскому за поддержку и постоянное внимание к работе, а также М. Г. Ткаченко и В. В. Ткачуку за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нерешенные задачи топологической алгебры (препринт). Кишинев, 1985.
2. В. Г. Пестов. Окрестности единицы в свободных топологических группах. *Вестник Моск. у-та, мат., мех.*, 1985, № 3, 8—10.
3. Р. Энгелькинг. Общая топология. М., 1986.
4. М. Г. Ткаченко. О нульмерных топологических группах. *Труды Ленинградской межд. конф. по топологии и ее приложениям*, 1982.
5. Дж. Келли. Общая топология. М., 1981.
6. M. G. Tkačenko. On Topologies on Free Groups. *Czechoslovak Math. J.*, **33**, No 1, 1984, 57—69.
7. М. Г. Ткаченко. О полноте топологических групп. *Сибирский матем. журнал*, 25, № 1, 1984, 146—158.
8. М. Г. Ткаченко. О полноте конечных слоев свободных топологических групп. Препринт, 1985.
9. Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М., 1986.
10. В. Г. Пестов. Некоторые свойства свободных топологических групп. *Вестник Моск. у-та, мат., мех.*, 1982, № 1, 35—37.
11. Б. А. Пасынков. О спектральной разложимости топологических пространств. *Матем. сб.*, **66**, 1965, 35—79.
12. О. В. Сипачева. Нульмерность и полнота в свободных топологических группах, I. *Сердика*, **15**, 1989.

Поступила 24. 10. 1988

Московский государственный университет им. Ломоносова, Механо-математический факультет, Кафедра общей топологии и геометрии, 119899 Москва СССР