Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КОНГРУЭНЦИИ W В БИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Н. П. КОНЕВА

Биаксиальным пространством гиперболического типа называется трехмерное точечное пространство, в котором выделена подгруппа коллинеаций, сохраняющая линейную конгруэнцию прямых гиперболического типа (назовем ее абсолютной).

Пусть абсолют биаксиального пространства составляют прямые l_1 и l_2 (они называются директрисами абсолютной конгруэнции). Репер пространства выбираем таким же образом, как в работе [1]. Пусть ребра тетраэдра A_1A_3, A_2A_4 принадлежат абсолютной конгруэнции. Вершины A_1, A_3 и A_2, A_4 совместим с точками, гармонически сопряженными относительно пар точек пересечения с директрисами абсолютной конгруэнции l_1, l_2. Пронормируем координаты точек A_3, A_4 так, чтобы точки пересечения ребер тетраэдра A_1A_3, A_2A_4 с директрисами абсолютной конгруэнции имели соответственно координаты

$$P_1 = A_1 + A_3, \quad Q_1 = A_2 + A_4,$$
$$P_2 = A_1 - A_3, \quad Q_2 = A_2 - A_4.$$

Инфинитезимальные преобразования тетраэдра, соответствующие переходу от одного луча к другому, определяются такой системой равенств

$$dA_i = w_i^k A_k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

где w_i^k — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$(1) \qquad Dw_i^k = [w_i^j w_j^k], \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Уравнения структуры биаксиального пространства гиперболического типа составляют уравнения (1) и уравнения, полученные из условия стационарности прямых l_1, l_2

$$w_2^4 - w_4^2 = 0, \quad w_3^4 - w_1^2 = 0,$$
$$w_1^3 - w_3^1 = 0, \quad w_4^3 - w_2^1 = 0,$$
$$w_2^3 - w_4^1 = 0, \quad w_3^3 - w_1^1 = 0,$$
$$w_3^2 - w_1^4 = 0, \quad w_2^2 - w_4^4 = 0.$$

Пусть K — некоторая конгруэнция, отличная от абсолютной. Вершины A_1, A_2 подвижного тетраэдра совместим с фокусами текущего луча конгруэнции l. В таком случае, главными формами бесконечно малых перемещений тетраэдра будут формы w_2^3, w_1^4, w_1^3, w_2^4, и дифференциальные уравнения конгруэнции можно записать в следующем виде:

$$w_1^3 = \alpha w_1^4, \quad w_2^4 = \gamma w_2^3. \tag{2}$$

Продолжением системы уравнений (2) будет такая система:

$$\begin{aligned} d\alpha + \alpha(w_1^1 - w_2^2) + w_2^1 - \alpha^2 w_1^2 &= a w_1^4 + b w_2^3, \\ (\alpha\gamma - 1)\, w_1^2 &= b w_1^4 + c w_2^3, \\ d\gamma + \gamma(w_2^2 - w_1^1) + w_1^2 - \gamma^2 w_1^2 &= A w_2^3 + B w_1^4, \\ (\alpha\gamma - 1)\, w_2^1 &= B w_2^3 + P w_1^4. \end{aligned} \tag{3}$$

В первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции выделяется единственный инвариант [1, 3].

$$I = \alpha\gamma. \tag{4}$$

Если еще раз продлить систему уравнений (3), то во второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции выделяются такие инварианты [3]:

$$b,\ B,\ ac,\ aA,\ AP,\ cP. \tag{5}$$

В работе [1] дано определение граничных точек луча конгруэнции в биаксиальном пространстве гиперболического типа. Это определение вводится посредством стрикционных точек [2] линейчатых поверхностей конгруэнции, которые определяются как точки пересечения лучами абсолютной конгруэнции двух бесконечно близких образующих линейчатой поверхности. Произвольная линейчатая поверхность конгруэнции Σ, проходящая через луч A_1A_2, определяется уравнениями (2) и равенством

$$w_1^4 = k w_2^3. \tag{6}$$

Пусть луч абсолютной конгруэнции пересекает луч A_1A_2 в точке $M = A_1 + tA_2$, тогда уравнение точек пересечения лучей абсолютной конгруэнции с A_1A_2, $A_1'A_2'(A_i' = A_i + dA_i,\ i = 1, 2)$ имеет такой вид:

$$t^2 + t(k\alpha - \gamma) - k = 0. \tag{7}$$

Это и есть уравнение стрикционных точек линейчатой поверхности Σ. Пары стрикционных точек всех поверхностей конгруэнции, которые проходят через данный ее луч, принадлежат одной инволюции, двойные точки которой являются граничными точками луча конгруэнции. Граничные точки луча конгруэнции (2) определяются таким уравнением [1]:

$$\alpha x^2 - 2x + \gamma = 0.$$

Главными поверхностями конгруэнции назовем те линейчатые поверхности конгруэнции, у которых двойные стрикционные точки. Они совпадают с граничными точками луча конгруэнции [1].

Выделим среди линейчатых поверхностей конгруэнции (2, 6) главные. Если дискриминант уравнения (4) равен нулю, то стрикционные точки поверхности будут двойными, и главные поверхности конгруэнции будут определяться таким уравнением:

$$\alpha^2 k^2 - 2k(\alpha\gamma - 2) + \gamma^2 = 0. \tag{8}$$

Как известно [5], конгруэнция является конгруэнцией W, если асимптотические линии на ее фокальных поверхностях соответствуют. Асимптотические линии характеризуются тем, что для них соприкасающаяся плоскость в каждой точке совпадает с касательной плоскостью в этой же точке. Аналитически это свойство для точки A_i $(i = 1, 2)$ можно записать так:

$$\Pi_i = (A_i, dA_i, d^2A_i). \tag{9}$$

Раскрывая скобки в (9), для $i=1$, $i=2$ получаем уравнения асимптотических линий на первой и второй фокальных поверхностях конгруэнции

$$\begin{aligned} a(w_1^4)^2 - c(w_2^3)^2 &= 0, \\ P(w_1^4)^2 - A(w_2^3)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Из этих уравнений следует, что конгруэнция является конгруэнцией W, если выполняется условие

$$aA - Pc = 0. \tag{11}$$

Большое внимание в литературе уделено конгруэнциям W. Впервые эти конгруэнции встречаются в работах Бианки, Демулена, Коссера. В частности, в евклидовом пространстве найдено соотношение между кривизнами фокальных поверхностей конгруэнции W и расстоянием между граничными точками луча конгруэнции, полностью характеризующее конгруэнцию W. Приведем формулировку этой теоремы [5].

Произведение кривизн двух фокальных поверхностей конгруэнции в точках касания одного луча равно обратной величине четвертой степени расстояния между граничными точками луча.

Покажем, что аналогичная теорема имеет место в биаксиальном пространстве гиперболического типа.

Определение кривизны поверхности введем так же как и в евклидовом пространстве, посредством квадратичных форм поверхности. Второй квадратичной формой поверхности назовем левую часть уравнения асимптотических линий, а первой — левую часть уравнения линий, которые высекают главные поверхности конгруэнции на ее фокальных поверхностях. Пусть ψ — первая квадратичная форма поверхности (она одна и та же для обеих фокальных поверхностей конгруэнции), φ_1 — вторая квадратичная форма первой фокальной поверхности конгруэнции, φ_2 — вторая квадратичная форма второй фокальной поверхности конгруэнции. Тогда

$$\psi = \alpha^2(w_1^4)^2 - 2(\alpha\gamma - 2)w_1^4w_2^3 + \gamma^2(w_2^3)^2,$$

$$\varphi_1 = a(w_1^4)^2 - c(w_2^3)^2, \quad \varphi_2 = P(w_1^4)^2 - A(w_2^3)^2.$$

Докажем, что формы ψ, φ_1, ψ_2 — инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы. Определим вариации главных форм w_1^4, w_2^3, w_1^3, w_2^4 для изменений вторичных параметров. Внешний дифференциал формы w_1^4 находим, используя формулы (2, 3)

$$Dw_1^4 = [w_1^1 - w_2^2, w_1^4] + \frac{1}{\alpha\gamma - 1}(b\gamma + c\alpha)[w_1^4w_2^3].$$

Выписываем присоединенную билинейную форму для символов дифференцирования d и δ: первый — для изменения только главных параметров, второй — для изменения только вторичных параметров.

$$dw_1^4(\delta) - \delta w_1^4(d) = (w_1^1(d) - w_2^2(d))w_1^4(\delta) - (w_1^1(\delta)$$

$$- w_2^2(\delta))w_1^4(d) + \delta\frac{b\gamma + c\alpha}{\alpha\gamma - 1}(w_1^4(d)w_2^3(\delta) - w_1^4(\delta)w_2^3(d))).$$

Заменяя $w_2^3(\delta)=0$, $w_1^4(\delta)=0$, $w_1^4(d)=w_1^4$, $w_2^3(d)=w_2^3$, $w_1^1(d)=\pi_1^1$, $w_2^2(d)=\pi_2^2$, получаем $\delta w_1^4=(\pi_1^1-\pi_2^2)w_1^4$.
Аналогично имеем $\delta w_2^3=(\pi_2^2-\pi_1^1)w_2^3$, $\delta w_1^3=0$, $\delta w_2^4=0$. Из системы уравнений (3) получаем

$$\delta\alpha=\alpha(\pi_2^2-\pi_1^1), \quad \delta\gamma=\gamma(\pi_1^1-\pi_2^2).$$

Из всего сказанного выше следует, что $\delta\psi=0$, $\delta\varphi_1=0$, $\delta\varphi_2=0$, то есть формы ψ, φ_1, φ_2 не зависят от вторичных параметров и, следовательно, инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы.

Нормальной кривизной поверхности в евклидовом пространстве называется величина, равная отношению второй и первой квадратичных форм поверхности. Рассмотрим величину χ, равную отношению форм φ и ψ. Для первой и второй фокальных поверхностей конгруэнции имеем

$$\chi=\frac{\varphi_1}{\psi}, \quad \chi'=\frac{\varphi_2}{\psi}.$$

Отсюда для первой фокальной поверхности конгруэнции имеем (аналогичные результаты получаются и для второй фокальной поверхности конгруэнции)

$$(\alpha^2\chi-a)(w_1^4)^2-2\chi(\alpha\gamma-2)w_1^4w_2^3+(\gamma^2\chi+c)(w_2^3)^2=0.$$

Продифференцируем это равенство по w_1^4, w_2^3.

$$(\alpha^2x-a)w_1^4-\chi(\alpha\gamma-2)w_2^3=0, \tag{12}$$

$$-\chi(\alpha\gamma-2)w_1^4+(\gamma^2\chi+c)w_2^3=0. \tag{13}$$

Линии на первой фокальной поверхности конгруэнции, линейные формы которых удовлетворяют этим условиям, соответствуют, очевидно, экстремальным значениям χ. В евклидовом пространстве это имеет место для главных направлений. В нашем случае главные направления определены таким уравнением:

$$\alpha^2(w_1^4)^2-2(\alpha\gamma-2)w_1^4w_2^3+\gamma^2(w_2^3)^2=0.$$

Подставляя один из корней этого уравнения в (12, 13) и обозначая соответствующее значение χ через χ_1 и χ_2, получаем

$$\chi_1=\frac{a(1+\sqrt{1-\alpha\gamma})^2}{2\alpha^2\sqrt{1-\alpha\gamma}}, \quad \chi_2=\frac{c\alpha^2}{2\sqrt{1-\alpha\gamma}\,(1+\sqrt{1-\alpha\gamma})}.$$

Величины χ_1 и χ_2 не являются инвариантами конгруэнции. Поэтому полной кривизной фокальной поверхности конгруэнции назовем такую величину:

$$K=(LN-M^2)/(EG-F^2),$$

где $L_1=a$, $N_1=-c$, $M_1=0$ для первой фокальной поверхности конгруэнции, $L_2=P$, $N_2=-A$, $M_2=0$ — для второй и $E=\alpha^2$, $F=\alpha\gamma-2$, $G=\gamma^2$ — для обеих фокальных поверхностей конгруэнции. В таком случае полные кривизны K_1, K_2 фокальных поверхностей конгруэнции, описываемой лучом A_1A_2, определяются так:

$$K_1=ac/4(1-\alpha\gamma), \quad K_2=AP/4(1-\alpha\gamma). \tag{14}$$

Введенная таким образом полная кривизна фокалной поверхности конгруэнции K_1 (а также и K_2) удовлетворяет такому соотношению:

$$K_1=\chi_1\chi_2, \quad (K_2=\chi_1'\chi_2').$$

Этот результат имеет определенную аналогию со свойством полной кривизны поверхности в евклидовом пространстве. Величины K_1 и K_2 являются инвариантами конгруэнции, так как ac, AP — инварианты второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции (5), а $\alpha\gamma$ — инвариант первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции. Если a или c, A или P равны нулю, то соответствующая фокальная поверхность становится развертывающейся и $K_1=0$ или $K_2=0$. В изучаемом биаксиальном пространстве для конгруэнции W справедливо равенство (11). Поэтому для конгруэнции W имеем

$$K_1 K_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{cP}{1-\alpha\gamma}\right)^2.$$

Если в это выражение подставить $(1-\alpha\gamma)$ найденное через U (сложное отношение фокусов луча конгруэнции и граничных точек луча), то для конгруэнции W получаем:

$$K_1K_2 = \frac{1}{16}(cP)^2\left(\frac{U-1}{U+1}\right)^{-4} \quad (U=(1+\sqrt{1+\alpha\gamma})/(1-\sqrt{1-\alpha\gamma})).$$

Из вышеизложенного следует т е о р е м а 1: *произведение полных кривизн фокальных поверхностей конгруэнции W в биаксиальном пространстве гиперболического типа равно $1/16$ отношения квадрата инварианта второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции к четвертой степени инварианта первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции, являющегося функцией сложного отношения фокусов и граничных точек луча конгруэнции.*

Приведем геометрические значения инвариантов ac и AP. Для этого нормализуем фокальные поверхности конгруэнции таким же образом как это сделано в [4]. Нормалью первого рода фокальной поверхности конгруэнции в точке M_0 назовем луч абсолютной конгруэнции, проходящий через эту точку. Тогда нормалью первого рода первой фокальной поверхности конгруэнции в точке A_1 будет луч A_1A_3, а нормалью первого рода второй фокальной поверхности конгруэнции в точке A_2 будет луч A_2A_4. Касательная плоскость в точке A_i фокальной поверхности конгруэнции пересекает директрисы абсолютной конгруэнции в некоторых точках M, N. Следуя терминологии, введенной А. П. Норденом, назовем прямую MN нормалью второго рода фокальной поверхности конгруэнции в точке A_i. Нормалью второго рода первой фокальной поверхности конгруэнции в точке A_1 будет прямая L_1L_1', где точки L_1, L_1' определяются таким образом:

$$L_1 = \alpha(A_1 + A_3) + A_2 + A_4, \quad L_1' = \alpha(A_1 - A_3) + A_2 - A_4.$$

Нормалью второго рода второй фокальной поверхности конгруэнции в точке A_2 будет прямая L_2L_2',

$$L_2 = A_1 + A_3 + \gamma(A_2+A_4), \quad L_2' = A_1 - A_3 + \gamma(A_2 - A_4).$$

О п р е д е л е н и е. *Линии, которые высекают на фокальных поверхностях конгруэнции развертывающиеся поверхности, описываемые нормалями первого рода назовем линиями кривизны первого рода фокальных поверхностей конгруэнции, а линии, которые высекают на фокальных поверхностях конгруэнции развертывающиеся поверхности, описываемые нормалями второго рода, назовем линиями кривизны второго рода.*

Линии кривизны первого рода фокальных поверхностей конгруэнции (2) определяются такими равенствами:

$$(15)\quad \begin{aligned} &(b^2-(1-\alpha\gamma)^2)(w_1^4)^2+2bcw_1^4w_2^3+c^2(w_2^3)^2=0,\\ &(B^2-(1-\alpha\gamma)^2)(w_2^3)^2+2BPw_1^4w_2^3+P^2(w_1^4)^2=0. \end{aligned}$$

Эти кривые будут плоскими, так как они образуются от пересечения пучков плоскостей с осями на директрисах абсолютной конгруэнции l_1, l_2 с фокальными поверхностями конгруэнции. Уравнения линий кривизны второго рода на фокальных поверхностях конгруэнции имеют такой вид:

$$(16)\quad \begin{aligned} &a^2(w_1^4)^2+2abw_1^4w_2^3+(b^2-(1-\alpha\gamma)^2)(w_2^3)^2=0,\\ &A^2(w_2^3)^2+2ABw_1^4w_2^3+(B^2-(1-\alpha\gamma)^2)(w_1^4)^2=0. \end{aligned}$$

Рассмотрим четверку прямых, а именно, касательных в точке A_1 к кривым фокальной сети на первой фокальной поверхности конгруэнции и касательных к линиям кривизны первого рода в точке A_1. Кривые фокальной сети на фокальных поверхностях конгруэнции (2) определяются такими уравнениями:

$$w_1^4=0,\quad w_2^3=0.$$

Обозначим через V_1, V_2 сложное отношение выше рассматриваемой четверки прямых для первой и второй фокальных поверхностей конгруэнции. Тогда

$$(17)\quad V_1=\frac{b+\alpha\gamma-1}{b-\alpha\gamma+1},\qquad V_2=\frac{B+\alpha\gamma-1}{B-\alpha\gamma+1}.$$

В работе [3] найден инвариант поверхности в биаксиальном пространстве гиперболического типа как сложное отношение такой четверки прямых: прямых касательных к асимптотическим линиям поверхности в точке M_0 и касательных к линиям кривизны первого рода в этой же точке. Для фокальных поверхностей изучаемой конгруэнции инварианты этих поверхностей, (обозначим их через W_1 и W_2) определяются следующим образом:

$$(18)\quad W_1=\frac{(\alpha\gamma-1-\sqrt{ac})^2-b^2}{(\alpha\gamma-1+\sqrt{ac})^2-b^2},\qquad W_2=\frac{(\alpha\gamma-1-\sqrt{AP})^2-B^2}{(\alpha\gamma-1+\sqrt{AP})^2-B^2}.$$

Инварианты b, B, ac, AP второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции можно найти из (17, 18) и подставить их значения в K_1, K_2 (14), что и определит геометрическое значение полных кривизн фокальных поверхностей конгруэнции.

Теорема 2. *Если линии кривизны первого и второго рода фокальных поверхностей конгруэнции одновременно сопряжены, то конгруэнция будет конгруэнцией W.*

Действительно, линии кривизны первого и второго рода будут одновременно сопряжены, если выполняются такие условия:

$$a^2=c^2,\quad A^2=P^2.$$

Из этих условий следует справедливость равенства (11), что и доказывает теорему 2.

Теорема 3. *Если линии, высекаемые главными поверхностями конгруэнции на ее фокальных поверхностях сопряжены, то конгруэнция есть конгруэнция W.*

Действительно, из условий сопряженности линий, высекаемых главными поверхностями на фокальных поверхностях конгруэнции

$$(a\gamma^2/\alpha^2)-c=0,\quad (P\gamma^2/\alpha^2)-A=0,$$

следует справедливость равенства (11), что и доказывает теорему 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. І. Кованцов, Г. М. Боровець, Н. М. Любарець. До теорії лінійчатих многостатностей у біаксіальному просторі. *Вісн. Київ. ун-ту*, 1964, № 6, 14—18.
2. М. І. Кованцов, Г. М. Боровець, Н. М. Любарець. До теорії лінійчатих многостатностей у біаксіальному просторі, поверхні. *Вісн. Київ. ун-ту*, 1965, № 7, 25—31.
3. Н. П. Конева. Конгруэнции прямых в биаксиальном пространстве гиперболического типа. Киев, 1982. 18 с. (деп. в ВИНИТИ. № 6486—82).
4. А. П. Норден. Пространство линейной конгруэнции. — *Мат. сб.*, **24**, 1949, № 3, 429—455.
5. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. М., 1956.

Поступила 14. 11. 1988