Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ДИНЧО И. КРИСТЕВ

В этой работе рассматриваются полулинейные эллиптические дифференциальные уравнения и неравенства. Получены ряд качественных оценок для их решений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu(x)=f(x,\ u,\ \nabla u), \tag{1}$$

где L — линейный равномерно эллиптический дифференциальный оператор.

В [1] рассматривался оператор, имеющий недивергентную форму. В этой статье мы будем рассматривать оператор

$$L=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right);\quad a_{ij}=a_{ji}, \tag{2}$$

$$\lambda^{-1}|\xi|^2\leq\sum_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\lambda|\xi|^2, \tag{2'}$$

где $\lambda\geq 1$ и неравенство (2′) выполняется для любого $\zeta\in\mathrm{R}^n$ и для любого $x\in G$ где $G\subset\mathrm{R}^n$ — некоторая, вообще говоря, неограниченная область.

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ предполагаются измеримыми и ограниченными. Рассматривается обобщенное в смысле интегрального тождества решение.

Мы будем предполагать, что $u(x)\in W_2^1(G)\cap L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(G)$. Пусть $\Gamma\subset\partial G$ — замкнутое множество. Скажем, что u удовлетворяет нулевым условиям Дирихле на Γ, если u принадлежит замыканию по норме W_2^1 множества функций из $C^{\infty}(G)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности Γ (у каждой функции окрестность своя).

Относительно функции $f(x,\ u,\ \nabla u)$ предполагается, что она измерима и локально конечна, монотонно возрастает по u.

$f(x,\ 0,\ \nabla u)=0$ и удовлетворяется неравенство

$$f(x,\ u,\ \nabla u)\geq a(-|\nabla u|^{1+\alpha}+u^{1+\beta});\quad a>0,$$

где $\beta>0$ произвольно, а $\alpha>0$ зависит от λ, β, a и размерности пространства n.

Можно рассматривать отдельно каждую из областей постоянства знака функции $u(x)$ и изучать решение в этой области. Поэтому мы будем считать, что $u(x)>0$ в G и удовлетворяет следующему неравенству:

$$-\int_G\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}\varphi_{x_j}dx+a\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}\varphi dx\geq a\int_G u^{1+\beta}\varphi dx, \tag{3}$$

где $a>0$, $u\in W_2^1(G)\cap L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(G)$, удовлетворяет нулевым условиям Дирихле на $\Gamma\subset\partial G$ и неравенство (3) выполнено для любой $\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, $\varphi(x)\geq 0$.

СЕРДИКА, Българско математическо списание, Т. 15, 1989, с. 252—258.

Мы будем обозначать через $B(x, r)$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x, а через $s(x, r)$ — его границу.

В этой статье будут существенно использоваться методы работы [2], в которой рассматривалось уравнение $Lu=f$ где f зависела только от x и u и не зависела от ∇u.

Теорема 1. *Пусть* $\beta>0$ *произвольно и*

$$0<\alpha<\beta/2+\beta. \tag{4}$$

Пусть $G\subset B(0, 2)$, $\Gamma=\overline{\partial G\cap B(0, 2)}$ *и* $u(x)$ — *решение неравенства* (3), *удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле на* Γ. *Существует константа* $C>0$, *зависящая от* λ, α, β, a *и* n *такая, что для любого* $p>1$

$$\| u\|_{L^p(G\cap B(0, 1))}\leqq Cp^{1/\beta}. \tag{5}$$

Доказательство: Фиксируем некоторую неотрицательную функцию $\eta(x)\in C_0^\infty(B(0, 2))$ такую, что $\eta(x)\leqq 1$ и $\eta(x)\equiv 1$ в $B(0, 1)$. Пусть t и s — два числа. Число $t>1$ произвольно, число $s>1$ будет подобрано ниже в зависимости от t (а также от λ, α, β, a и n).

Положим в (3) $\varphi(x)=u^t\cdot\eta^s$. Мы находим тогда

$$-t\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}u^{t-1}\eta^s dx-s\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j}u^t\eta^{s-1}dx$$
$$+a\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}u^t\eta^s dx\geqq a\int_G u^{t+\beta+1}\eta^s dx$$

или, в силу положительности матрицы

$$-t\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}u^{t-1}\eta^s dx+s\int_G\sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}\sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j}}\,u^t\eta^{s-1}dx$$
$$+a\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}u^t\eta^s dx\geqq a\int_G u^{t+\beta+1}\eta^s dx.$$

Отсюда, применяя ко второму интегралу в левой части неравенство $2ab\leqq a^2+b^2$ и используя (2), получаем

$$-C_1t\int_G|\nabla u|^2u^{t-1}\eta^s dx+C_2\frac{s^2}{t}\int_G|\nabla\eta|^2u^{t-1}\eta^{s-2}dx$$
$$+\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}u^t\eta^s dx\geqq a\int_G u^{t+\beta+1}\eta^s dx. \tag{6}$$

Здесь и далее через C_i обозначаются положительные константы, зависящие от λ, α, β, a и n.

Применим к третьему интегралу в левой части неравенства (6) неравенство Гельдера. $a_1b\leqq a_1^{p'}/p'+b^q/q$, где $a_1>0$, $b>0$, $1/p'+1/q=1$. Положим $p'=2/(1+\alpha)$; $g=2/(1-\alpha)$. В силу условия (4) имеем $0<\alpha<1$, так что $1-\alpha>0$. Тогда для $A>0$ имеем следующее неравенство

$$\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}u^t\varphi^s dx\leqq\frac{(1+\alpha)A^{\frac{2}{1+\alpha}}}{2}\int_G|\nabla u|^2u^{t-1}\eta^s dx+\frac{1-\alpha}{2A^{\frac{2}{1-\alpha}}}\int_G u^{t+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\eta^s dx.$$

Фиксируем α и β и подберем A так, чтобы выполнялось

$$\frac{\alpha+1}{2}A^{\frac{2}{1+\alpha}}\leqq\min(C_1, 1).$$

Тогда получим следующее неравенство

$$C_2 \frac{s^2}{t} \int_G |\nabla \eta|^2 u^{t+1} \eta^{s-2} dx + C_3 \int_G u^{t+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \eta^s dx \geq a \int_G u^{t+\beta+1} \eta^s dx. \tag{7}$$

Далее, в силу условия (4)

$$(1+\alpha)/(1-\alpha) < \beta + 1. \tag{8}$$

Обозначим через E множество точек $x \in G$, в которых $u < M$, где число $M > 1$ будет подобрано ниже. Тогда $\int_G u^{t+\beta+1} dx < C_4(M)$. Выберем M столь большим, чтобы выпольнялось

$$C_3 \int_{G \setminus E} u^{t+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \eta^s dx < \frac{1}{2} \int_{G \setminus E} u^{t+\beta+1} \eta^s \, dx,$$

что можно сделать в силу (8) и при этом M зависит от α, β, n. Тогда

$$C_5 \frac{s^2}{t} \int_G |\nabla \eta|^2 u^{t+1} \eta^{s-2} dx + C_6 \geq a \int_G u^{t+\beta+1} \eta^s dx.$$

Положим

$$s = 2(1+t+\beta)/\beta. \tag{9}$$

Так, что $C_5' \frac{s^2}{t} \int_G (u^{1+t+\beta} \eta^s \, dx)^{\frac{1+t}{1+t+\beta}} |\nabla \eta|^2 + C_6' \geq \int_G u^{t+\beta+1} \eta^s \, dx.$

В силу условия (9) и интегрального неравенства Гельдера

$$C_7 \, t (\int_G u^{1+t+\beta} \eta^s \, dx)^{\frac{1+t}{1+t+\beta}} + C_6' \geq \int_G u^{t+\beta+1} \eta^s \, dx$$

и либо

$$(\int_G u^{t+\beta+1} \eta^s \, dx)^{\frac{\beta}{t+\beta+1}} < C_8,$$

либо

$$\int_G u^{t+\beta+1} \eta^s dx < C_9.$$

Полагая $p = t + \beta + 1$, получаем

$$\| u \|_{L^p(G \cap B(0,1))} \leq C p^{1/\beta}. \tag{10}$$

То есть, во всех случаях имеет место (10) при подходящим образом выбранном C (в зависимости от λ, α, β, a и n).

Теорема 2. *Пусть* $\beta > 0$ *и*

$$\alpha = \beta/(2+\beta). \tag{11}$$

Пусть $m > 0$ *целое число,* $m \geq 1 + (1/\beta)$. *Пусть* $G \in \mathbb{R}^n$ *открытое множество в шаре* $B(0, m)$, $\Gamma = \partial G \cap B(0, m)$ *и* $u(x)$ *решение в* G *следующего видоизмененного неравенства* (3):

$$- \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} dx + a_1 \int_G |\nabla u|^{1+\alpha} \varphi dx \geq a_2 \int_G u^{1+\beta} \varphi \, dx \tag{3'}$$

$u(x)$ удовлетворяет нулевым условиям Дирихле на Γ. *Тогда*

(12) $$\|u\|_{L^{m\beta}(G)} \leq C \cdot 1/m^{1/\beta},$$

где $C \neq C(m)$.

На константы $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ в процесе доказательства будут наложены некоторые условия, при которых утверждение теоремы верно (a_i зависит от β, λ, а C от λ, β, n). Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 1. (сравни с леммой 1 из [2]). *Пусть k и l натуральные числа. Рассмотрим два шара: $B(0, l)$ и $B(0, l-1)$. Пусть $G \subset B(0, l)$ — открытое множество, $u(x)$ — положительное решение неравенства* (3), *удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле на $\Gamma = \partial G \cap B(0, l)$ и пусть выполняется равенство* (11). *Тогда при достаточно большом k: $k > k_0$, k_0 зависит от λ, β, n и a справедливо следующее неравенство:*

(13) $$\int_{G \cap B(0,\, l-1)} u^{(1+k)\beta+1}\, dx \leq \frac{C_1}{k\beta} \int_G u^{k\beta+1}\, dx$$

(как и раньше через C_l обозначаем константы, зависящие от λ, β, a, n, число α в силу (11) зависить от β).

Доказательство. Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(B(0, l))$, $0 \leq \eta(x) \leq \delta$, $\eta(x) = \delta$ в $B(0, l-1)$, где число $\delta > 0$ будет выбрано ниже и будет зависеть только от λ, β, a, n. Из (3) мы получаем, положив $\varphi(x) = u^{k\beta}\eta$,

$$-k\beta \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} u^{k\beta-1} \eta\, dx - \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \eta_{x_j} u^{k\beta}\, dx$$
$$+ \int_G |\nabla u|^{1+\alpha} u^{k\beta}\, dx \geq a \int_G u^{k\beta+\beta+1} \eta(x)\, dx$$

или

$$-k\beta \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} u^{k\beta-1} \eta(x)\, dx + \int_G \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_{x_i} \eta_{x_j}}\, u^{k\beta}\, dx$$
$$+ \int_G |\nabla u|^{1+\alpha} u^{k\beta} \eta\, dx \geq a \int_G u^{k\beta+\beta+1} \eta(x)\, dx.$$

Далее, используя неравенство $2a_1 b < a_1^2 + b^2$ и неравенства (2), получаем

(14) $$-C_2 k\beta \int_G |\nabla u|^2 u^{k\beta-1} \eta(x) dx + \frac{C_3}{k\beta} \int_G |\nabla \eta|^2 u^{k\beta+1}$$
$$+ \int_G |\nabla u|^{1+\alpha} u^{k\beta} \eta(x)\, dx \geq \int_G u^{k\beta+\beta+1} \eta(x)\, dx.$$

Применяя к третьему интегралу в левой части последнего неравенства Гельдера $A \cdot B \leq A^{p_1}/p_1 + B^{p_2}/p_2$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ с $p_1 = 2/(\alpha+1)$ и $p_2 = 2/(1-\alpha)$, находим, используя (11),

$$\int_G |\nabla u|^{1+\alpha} u^{k\beta} \eta(x)\, dx$$
$$\leq C_2 k\beta \int_G \left(|\nabla u|^{1+\alpha} u^{\frac{(k\beta-1)(\alpha+1)}{2}}\right)^{\frac{2}{1+\alpha}} dx + C_4 \int_G u^{\left(k\beta - \frac{(k\beta-1)(\alpha+1)}{2}\right)\frac{2}{1-\alpha}} \eta(x)^{\frac{2}{1-\alpha}}\, dx$$

или согласно (11)

(15) $$\int_G |\nabla u|^{1+\alpha} u^{k\beta} \eta(x)\, dx \leq C_2 k\beta \int_G |\nabla u|^2 u^{k\beta-1}\, dx + C_4 \int_G u^{k\beta+\beta+1} \eta^{\frac{2}{1-\alpha}}\, dx.$$

Выберем теперь δ так, что $\delta<1$ и $\delta^{2/(1-\alpha)}<a\delta/2C_4$. Тогда из (14) и (15), учитывая что $\eta\leq\delta$, получаем

$$\frac{C_3}{k\beta}\int_G u^{k\beta+1}|\nabla\eta|^2\,dx\geq\frac{a}{2}\int_{G\cap B(0,\,l-1)} u^{k\beta+\beta+1}dx$$

или, так как $|\nabla\eta|<\text{const}$,

$$\int_{G\cap B(0,\,l-1)} u^{(k+1)\beta+1}\,dx\leq\frac{C_1}{k\beta}\int_G u^{k\beta+1}\,dx.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. (сравни с леммой 2 статьи [2]). *Как и в предыдущей лемме мы предположим, что выполнено* (11). *Фиксируем некоторое произвольное целое число* $m>1+1/\beta$. *Пусть* $G\subset B(0,\,m)$ — *открытое множество и пусть в* G *определено ретение* $u(x)>0$ *неравенства* (3′), *удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле на* $\Gamma=\partial G\cap\overline{B(0,\,m)}$. *Тогда существует константа* $C_1>0$, *зависящая от* λ, β *и* n, *такая, что*

$$\int_{G\cap B(0,\,m-1)} u^{1+\beta}\,dx\leq C_1\,m^{n(\beta+1))\beta+2)^{-2}}. \tag{16}$$

Доказательство. Введем, как и выше, функцию $\eta(x)$, удовлетворяющую условиям $0\leq\eta(x)\leq\delta$, $\eta(x)\in C_0^\infty(B(0,\,m))$, $\eta(x)\equiv\delta$ в $B(0,\,m-1)$, где положительное $\delta<1$ будет подобрано ниже в зависимости от λ, β, n. Положим $\varphi(x)=\eta^s(x)\,u(x)$. Тогда

$$-\int_G\sum_{i,\,j=1}^n a_{ij}(x)\,u_{x_i}u_{x_j}\,\eta^s\,dx+s\left|\int_G\sum_{i,\,j=1}^n a_{ij}(x)\,u_{x_i}\eta_{x_j}\,\eta^{s-1}\,u\,dx\right|$$
$$+a_1\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}u\eta^s\,dx\geq a_2\int_G u^{2+\beta}\eta^s\,dx$$

или

$$-C_2\int_G|\nabla u|^2\eta^s dx+C_3s^2\int_G|\nabla\eta|^2\eta^{s-2}u^2dx+a_1\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}\eta^s u\,dx\geq a_2\int_G u^{2+\beta}\eta^s dx \tag{17}$$

(как и выше константы $C_2>0$ и $C_3>0$ зависят от λ, β и n, а $C_2<1/\lambda$). Используя (11) и неравенство Юнга — Гельдера

$$A\cdot B\leq A^{p_1}/p_1+B^{p_2}/p_2, \tag{18}$$

где $p_1=2/(1+\alpha)$, $p_2=2/(1-\alpha)$ и $1/p_1+1/p_2=1$, получим:

$$\int_G|\nabla u|^{1+\alpha}u\eta^s dx\leq\frac{(1+\alpha)}{2}\int_G|\nabla u|^2\eta^s\,dx+\frac{(1-\alpha)}{2}\int_G u^{2+\beta}\eta^s dx.$$

Заметим, что в (17) константу C_2 можно сделать равную $1/2\lambda$, (это в наших силах, так как в правой части неравенства (18) можно варировать константами). Теперь, используя то, что $|\nabla\eta|<\text{const}$ и то, что $0<\delta<1$ получаем

$$\left(a_1\frac{\beta+1}{\beta+2}-\frac{1}{2\lambda}\right)\int_G|\nabla u|^2\eta^s dx+C_3s^2\int_G|\nabla\eta|^2\eta^{s-2}u^2dx\geq\left(a_2-a_1\frac{1}{\beta+2}\right)\int_G u^{2+\beta}\eta^s dx. \tag{19}$$

Для выполнения этого неравенства потребуем выполнение следующих условий:

$$a_1(\beta+1)/(\beta+2)-1/2\lambda\leq 0 \tag{20}$$

и

$$a_2-a_1/_{\beta+2}>0. \tag{21}$$

Отсюда получаем возможные значения констант $a_1>0$ и $a_2>0$ при выполнение которых будет верна лемма 2 и соответственно теорема 2:

(20) $$a_1 \leqq (\beta+2)/2\lambda(\beta+1)$$

и

(21) $$a_2 > 1/2\lambda\,(\beta+1).$$

Таким образом, при выполнении (20) и (21) продолжим доказательство леммы 2. Теперь спомним, что s еще не фиксирована. Получим следующее неравенство

$$\int_G u^{2+\beta}\eta^s\,dx \leqq C_5\,s^2 \int_G \eta^{s-2} u^2\,dx.$$

Положим $s=2(2+\beta)/\beta$ или $(s-2)(2+\beta)/2=s$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, находим

$$C_6\,s^2\Big(\int_G u^{2+\beta}\eta^s\,dx\Big)^{\frac{2}{2+\beta}} (\operatorname{mes} G)^{\frac{\beta}{2+\beta}} \geqq \int_G u^{2+\beta}\eta^s\,dx$$

или

$$\Big(\int_{G\cap B(0,\,m-1)} u^{2+\beta}\,dx\Big)^{\frac{\beta}{2+\beta}} < C_7 m^{n\frac{\beta}{2+\beta}}$$

и, так как

$$C_7'\,\|u\|_{L^{2+\beta}(G\cap B(0,\,m-1))} \geqq \|u\|_{L^{1+\beta}(G\cap B(0,\,m-1))},$$

то

$$\int_{G\cap B(0,\,m-1)} u^{1+\beta}\,dx \leqq C_1\,m^{n(1+\beta)/(2+\beta)}.$$

Доказательство теоремы 2. После того, как мы доказали лемму 1 и лемму 2, аналогичные лемам 1 и 2 из [2], доказательство теоремы 2 практически совпадает с доказательством теоремы 2 из [2]. Для удобства мы его здесь полностью воспроизводим.

Докажем по индукции, что

(18) $$\int_{G\cap B(0,\,m-k)} u^{1+k\beta}\,dx \leqq \frac{C_1^{k-1}}{k!\,\beta^{k-1}}\,m^{n(\beta+1)/(2+\beta)}.$$

Действительно, при $k=1$ неравенство (18) справедливо по лемме 2. Пусть

$$\int_{G\cap B(0,\,m-(k-1))} u^{1+(k-1)\beta}\,dx \leqq \frac{C_1^{(k-1)-1}}{(k-1)!\,\beta^{(k-1)-1}}\,m^{n(\beta+1)/(\beta+2)}.$$

Тогда по лемме 1 имеем

$$\int_{G\cap B(0,\,m-k)} u^{1+k\beta}\,dx \leqq \frac{C_1^{k-1}}{k!\,\beta^{k-1}}\,m^{n(\beta+1)/(\beta+2)}.$$

Таким образом, неравенство (18) верно при всех k. При $k=m-1$ получаем

$$\|u\|_{L^{m\beta}(G\cap B(0,\,1))} \leqq \|u\|_{L^{m\beta+1}(G\cap B(0,\,1))} \leqq \Big(\frac{C_1^{m-1}}{m!\,\beta^{m-1}}\,C_2 m^{n\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)^2}}\Big)^{\frac{1}{m\beta+1}} < C\frac{1}{m^{1/\beta}}.$$

Теорема доказана.

Как следствие из теоремы 2 получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть* $G \subset R^n$ *неограниченная область и пусть* $u(x)$ *решение уравнения* (1) *в* G *(в слабом смысле), обращающееся в нуль на* ∂G. *Тогда* $u(x) \equiv 0$.

Действительно, рассмотрим каждую область постоянства знака $u(x)$ и применим к ней теорему 2, устремляя при этом m к бесконечности. Результат очевиден.

Отсюда, в частности следует, что если $u(x)$ решение уравнения (1) в R^n, то $u(x) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Кристев. О поведении решений некоторых полулинейных эллиптических и параболических уравнений. (в печати)
2. В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис. Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. *Мат. заметки*, 44, 1988, 457—468.

Болгарская Академия Наук,
Институт математики
1000 София, п. я. 373
Болгария

Поступила 08. 01. 1989