Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ДВУСТОРОННИЙ МЕТОД ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ КРАТНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ, АНДРЕЙ С. АНДРЕЕВ

Интерес представляют итерационные методы для одновременного вычисления всех кратных корней алгебраического уравнения, если кратности корней заданы.

Исследованию сходимости таких методов посвящены работы [1—5] и др. В [6] обсуждаются общие приемы конструирования схем повышенного порядка сходимости. Здесь рассмотрим двусторонний аналог этого метода.

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ являются корнями уравнения

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=\prod_{j=1}^m (x-x_j)^{s_j},$$

с кратностями соответственно

$$s_1,\ldots,s_m;\ s_j\geqq 1;\ j=1,\ldots,m;$$
$$\sum_{j=1}^m s_j=n.$$

Пусть для итерационного решения уравнения $f(x)=0$ задан процесс

$$\overline{x}_i^{k+1}=\overline{x}_i^k+\overline{\Delta}_i^{R+1,k};\quad \underline{x}_i^{k+1}=\underline{x}_i^k+\underline{\Delta}_i^{R+1,k},$$

$$\overline{\Delta}_i^{p,k}=-s_i/\Big(\frac{f'(\overline{x}_i^k)}{f(\overline{x}_i^k)}-\sum_{\beta_0\neq i}^m\frac{s_{\beta_0}}{\overline{x}_i^k-\underline{x}_{\beta_0}^k-\underline{\Delta}_{\beta_0}^{p-1,k}}\Big),\quad \overline{\Delta}_i^{0,k}=0, \tag{1}$$

$$\underline{\Delta}_i^{p,k}=-s_i/\Big(\frac{f'(\underline{x}_i^k)}{f(\underline{x}_i^k)}-\sum_{\beta_0\neq i}^m\frac{s_{\beta_0}}{\underline{x}_i^k-\overline{x}_{\beta_0}^k-\overline{\Delta}_{\beta_0}^{p-1,k}}\Big),\quad \underline{\Delta}_i^{0,k}=0,$$

$$i=1,\ldots,m;\ p=1,\ldots,R+1;\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Если начальные приближения* $\{\underline{x}_i^0\}_{i=1}^m$, $\{\overline{x}_i^0\}_{i=1}^m$ *к корням уравнения* $f(x)=0$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$\underline{x}_1^0\leqq x_1\leqq\overline{x}_1^0<\underline{x}_2^0\leqq x_2\leqq\overline{x}_2^0<\cdots<\underline{x}_m^0\leqq x_m\leqq\overline{x}_m^0,$$

то имеем

$$\underline{x}_1^k\leqq x_1\leqq\overline{x}_1^k<\underline{x}_2^k\leqq x_2\leqq\overline{x}_2^k<\cdots<\underline{x}_m^k\leqq x_m\leqq\overline{x}_m^k$$

для всех $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по k. Докажем индуктивно и следующие неравенства:

$$0 \leqq \underline{\Delta}_i^{p,k} \leqq x_i - \underline{x}_i^k\,; \quad x_i - \overline{x}_i^k \leqq \overline{\Delta}_i^{p,k} \leqq 0, \tag{2}$$

$$i = 1, \ldots, m\,; \quad p = 0,\ 1, \ldots, R+1.$$

Действительно, для разности $\overline{x}_i^{k+1} - x_i$ и $\underline{x}_i^{k+1} - x_i$ получаем

$$\overline{x}_i^{k+1} - x_i = (\overline{x}_i^k - x_i)(1 - \underline{A}_i^{R,k}), \tag{3}$$

$$\underline{x}_i^{k+1} - x_i = (\underline{x}_i^k - x_i)(1 - \overline{A}_i^{R,k}),$$

где

$$\underline{A}_i^{R,k} = s_i / \Big(s_i + (\overline{x}_i^k - x_i) \sum_{\beta_0 \neq i}^{m} \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}{(\overline{x}_i^k - x_{\beta_0})(\overline{x}_i^k - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}\Big),$$

$$\overline{A}_i^{R,k} = s_i / \Big(s_i + (\underline{x}_i^k - x_i) \sum_{\beta_0 \neq i}^{m} \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - \overline{x}_{\beta_0}^k - \overline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}{(\underline{x}_i^k - x_{\beta_0})(\underline{x}_i^k - \overline{x}_{\beta_0}^k - \overline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}\Big). \tag{4}$$

Можно показать, что

$$\overline{\Delta}_i^{p+1,k} = (x_i - \overline{x}_i^k)\underline{A}_i^{p,k}\,; \quad \underline{\Delta}_i^{p+1,k} = (x_i - \underline{x}_i^k)\,\overline{A}_i^{p,k} \tag{5}$$

для $p = 0, 1, \ldots, R$. Из (4) и (5) следует, что

$$0 \leqq \underline{A}_i^{p,k} \leqq 1, \quad 0 \leqq \overline{A}_i^{p,k} \leqq 1 \tag{6}$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$; $p = 0, 1, \ldots, R$ и неравенства (2) выполняются. Из (3) и (6) получаем $\overline{x}_i^{k+1} - x_i \geqq 0$, $\underline{x}_i^{k+1} - x_i \leqq 0$. Теорема доказана.

Сейчас выясним вопрос о скорости сходимости последовательности $\{\underline{x}_i^k\}_{i=1}^m$, $\{\overline{x}_i^k\}_{i=1}^m$ из (1). Справедлив следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $0 < q < 1$, $d = \min\limits_{i \neq j} |x_i - x_j|$ *и* $c > 0$ *такое, что выполнено*

$$0 < c < d/(3 + \sqrt{n}). \tag{7}$$

Если начальные приближения выбраны так, что

$$0 \leqq x_i - \underline{x}_i^0 \leqq cq\,; \quad 0 \leqq \overline{x}_i^0 - x_i \leqq cq\,; \quad i = 1,\ 2, \ldots, m,$$

то для каждого $k = 0,\ 1, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$0 \leqq \overline{x}_i^k - x_i \leqq cq^{(2R+3)^k}, \quad 0 \leqq x_i - \underline{x}_i^k \leqq cq^{(2R+3)^k}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Техника установления оценок сходимости не будет существенно отличаться от использовавшейся в [7]. Доказательство проведем методом индукции. Имеем

$$\overline{x}_i^{k+1} - x_i = (\overline{x}_i^k - x_i)(1 - \underline{A}_i^{R,k}) = \frac{1}{s_i}(\overline{x}_i^k - x_i)^2 \underline{A}_i^{R,k} \sum_{\beta_0 \neq i}^{m} \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}{(\overline{x}_i^k - x_{\beta_0})(\overline{x}_i^k - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}$$

$$= \frac{1}{s_i}(\overline{x}_i^k - x_i)^2 \underline{A}_i^{R,k} \sum_{\beta_0 \neq i}^{m} \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - \underline{x}_{\beta_0}^k)(1 - \overline{A}_{\beta_0}^{R-1,k})}{(\overline{x}_i^k - x_{\beta_0})(\overline{x}_i^k - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}$$

$$= \frac{1}{s_i}(\overline{x}_i^k - x_i)^2 \underline{A}_i^{R,k} \sum_{\beta_0 \neq i}^{m} \frac{(x_{\beta_0} - \underline{x}_{\beta_0}^k)^2 \overline{A}_{\beta_0}^{R-1,k}}{(x_{\beta_0} - \overline{x}_i^k)(\overline{x}_i^k - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})} \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^{m} \frac{s_{\beta_1}(x_{\beta_1} - \overline{x}_{\beta_1}^k - \overline{\Delta}_{\beta_1}^{R-1,k})}{(\underline{x}_{\beta_0}^k - x_{\beta_1})(\underline{x}_{\beta_0}^k - \overline{x}_{\beta_1}^k - \overline{\Delta}_{\beta_1}^{R-1,k})}.$$

Рекурсивно следует, что для R — четно имеем

$$\overline{x}_i^{k+1}-x_i=\frac{1}{s_i}(\overline{x}_i^k-x_i)^2\underline{A}_i^{R,k}\sum_{\beta_0\neq i}^{m}\frac{(x_{\beta_0}-\underline{x}_{\beta_0}^k)^2\overline{A}_{\beta_0}^{R-1,k}}{(x_{\beta_0}-\overline{x}_i^k)(\overline{x}_i^k-\underline{x}_{\beta_0}^k-\underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}$$

$$\ldots\sum_{\beta_{R-1}\neq\beta_{R-2}}^{m}\frac{(\overline{x}_{\beta_{R-1}}^k-x_{\beta_{R-1}})^2\underline{A}_{\beta_{R-1}}^{0,k}}{(x_{\beta_{R-1}}-\underline{x}_{\beta_{R-2}}^k)(\underline{x}_{\beta_{R-2}}^k-\overline{x}_{\beta_{R-1}}^k-\overline{\Delta}_{\beta_{R-1}}^{1,k})}\cdot\sum_{\beta_R\neq\beta_{R-1}}^{m}\frac{s_{\beta_R}(x_{\beta_R}-\underline{x}_{\beta_R}^k)}{(\overline{x}_{\beta_{R-1}}^k-x_{\beta_R})(\overline{x}_{\beta_{R-1}}^k-\underline{x}_{\beta_R}^k)},$$

а для R — нечетно

$$\overline{x}_i^{k+1}-x_i=\frac{1}{s_i}(\overline{x}_i^k-x_i)^2\underline{A}_i^{R,k}\sum_{\beta_0\neq i}^{m}\frac{(x_{\beta_0}-\underline{x}_{\beta_0}^k)^2\overline{A}_{\beta_0}^{R-1,k}}{(x_{\beta_0}-\overline{x}_i^k)(\overline{x}_i^k-\underline{x}_{\beta_0}^k-\underline{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}$$

$$\ldots\sum_{\beta_{R-1}\neq\beta_{R-2}}^{m}\frac{(x_{\beta_{R-1}}-\underline{x}_{\beta_{R-1}}^k)^2\overline{A}_{\beta_{R-1}}^{0,k}}{(x_{\beta_{R-1}}-\overline{x}_{\beta_{R-2}}^k)(\overline{x}_{\beta_{R-2}}^k-\underline{x}_{\beta_{R-1}}^k-\underline{\Delta}_{\beta_{R-1}}^{1,k})}\cdot\sum_{\beta_R\neq\beta_{R-1}}^{m}\frac{s_{\beta_R}(x_{\beta_R}-\overline{x}_{\beta_R}^k)}{(\underline{x}_{\beta_{R-1}}^k-x_{\beta_R})(\underline{x}_{\beta_{R-1}}^k-\overline{x}_{\beta_R}^k)}.$$

Видно, что

$$\min\{|x_\mu-\overline{x}_\nu^k|,\ |x_\mu-\underline{x}_\nu^k|,\ |\overline{x}_\nu^k-\underline{x}_\mu^k-\underline{\Delta}_\mu^{p,k}|,\ |\underline{x}_\nu^k-\overline{x}_\mu^k-\overline{\Delta}_\mu^{p,k}|\}>d-3c,$$

и, следовательно, имеем по индукции

$$\overline{x}_i^{k+1}-x_i\leqq\frac{1}{s_i}c^2q^{2(2R+3)^k}\frac{m^R(c^2)^R q^{2R(2R+3)^k}cq^{(2R+3)^k}(n-s_{\beta_{R-1}})}{((d-3c)^2)^{R+1}}$$

$$\leqq cq^{(2R+3)^{k+1}}\frac{n^{R+1}(c^2)^{R+1}(n-s_{\beta_{R-1}})}{ns_i((d-3c)^2)^{R+1}}\leqq cq^{(2R+3)^{k+1}}\left(\frac{c^2n}{(d-3c)^2}\right)^{R+1}.$$

Из (7) следует, что

$$\overline{x}_i^{k+1}-x_i\leqq cq^{(2R+3)^k}.$$

Аналогично можно показать, что $x_i-\underline{x}_i^k\leqq cq^{(2R+3)^k}$. Процесс (1) имеет порядок сходимости $\tau=2R+3$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Farmer, G. Loizou. An algorithm for the total, or partial, factorization of a polynomial *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 82, 1977, 427-437.
2. G. Loizou. Une note sur le procédé iteratif de Mme Marica Presič. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I*, **295**, 1982, 707-710.
3. Хр. Семерджиев. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. *Доклады БАН*, 35, 1982, 1057-1060.
4. I. Gargantini. Parallel square-root iterations for multiple roots. *Comp. Math. Appl.*, **6**, 1980, 279-288.
5. M. Petkovič, L. Stefanovič. On some iteration functions for the simultaneous computation of multiple complex polynomial zeros. *BIT*, 27, 1987, 111-122.
6. Н. Кюркчиев, А. Андреев, В. Попов. Методы для одновременного вычисления всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. *Годишник Соф. унив.*, 78, 1, 1984, 191-198.
7. A. Andreev, N. Kjurkchiev. Two-sided methods for solving the polynomial equation. *Math. Balkanica, N. S.*, 1 1987, 72-82.

Математический институт
Болгарской академии наук
1090 София П. Я. 373
Болгария

Поступила 14. 11. 88 г.