

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ДВУСТОРОННИЙ МЕТОД ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ КРАТНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ, АНДРЕЙ С. АНДРЕЕВ

Интерес представляют итерационные методы для одновременного вычисления всех кратных корней алгебраического уравнения, если кратности корней заданы.

Исследованию сходимости таких методов посвящены работы [1—5] и др. В [6] обсуждаются общие приемы конструирования схем повышенного порядка сходимости. Здесь рассмотрим двусторонний аналог этого метода.

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ являются корнями уравнения

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = \prod_{j=1}^m (x - x_j)^{s_j},$$

с кратностями соответственно

$$s_1, \dots, s_m; s_j \geq 1; j = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^m s_j = n.$$

Пусть для итерационного решения уравнения $f(x) = 0$ задан процесс

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{k+1} &= \bar{x}_i^k + \bar{\Delta}_i^{R+1,k}; \quad \underline{x}_i^{k+1} = \underline{x}_i^k + \underline{\Delta}_i^{R+1,k}, \\ (1) \quad \bar{\Delta}_i^{p,k} &= -s_i / \left(\frac{f'(\bar{x}_i^k)}{f(\bar{x}_i^k)} - \sum_{\beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}}{\bar{x}_i^k - \bar{x}_{\beta_0}^k - \bar{\Delta}_{\beta_0}^{p-1,k}} \right), \quad \bar{\Delta}_i^{0,k} = 0, \\ \underline{\Delta}_i^{p,k} &= -s_i / \left(\frac{f'(\underline{x}_i^k)}{f(\underline{x}_i^k)} - \sum_{\beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}}{\underline{x}_i^k - \underline{x}_{\beta_0}^k - \underline{\Delta}_{\beta_0}^{p-1,k}} \right), \quad \underline{\Delta}_i^{0,k} = 0, \\ & i = 1, \dots, m; \quad p = 1, \dots, R+1; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. Если начальные приближения $\{\bar{x}_i^0\}_{i=1}^m, \{\underline{x}_i^0\}_{i=1}^m$ к корням уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяют неравенствам:

$$\underline{x}_1^0 \leq x_1 \leq \bar{x}_1^0 < \underline{x}_2^0 \leq x_2 \leq \bar{x}_2^0 < \dots < \underline{x}_m^0 \leq x_m \leq \bar{x}_m^0,$$

то имеем

$$\underline{x}_1^k \leq x_1 \leq \bar{x}_1^k < \underline{x}_2^k \leq x_2 \leq \bar{x}_2^k < \dots < \underline{x}_m^k \leq x_m \leq \bar{x}_m^k$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по k . Докажем индуктивно и следующие неравенства:

$$(2) \quad 0 \leq \Delta_i^{p,k} \leq x_i - \underline{x}_i^k; \quad x_i - \bar{x}_i^k \leq \bar{\Delta}_i^{p,k} \leq 0, \\ i = 1, \dots, m; \quad p = 0, 1, \dots, R+1.$$

Действительно, для разности $\bar{x}_i^{k+1} - x_i$ и $x_i^{k+1} - x_i$ получаем

$$(3) \quad \bar{x}_i^{k+1} - x_i = (\bar{x}_i^k - x_i)(1 - A_i^{R,k}), \\ x_i^{k+1} - x_i = (x_i^k - x_i)(1 - \bar{A}_i^{R,k}),$$

где

$$(4) \quad A_i^{R,k} = s_i / (s_i + (\bar{x}_i^k - x_i) \sum_{\beta_0+i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}), \\ \bar{A}_i^{R,k} = s_i / (s_i + (x_i^k - x_i) \sum_{\beta_0+i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - \bar{x}_{\beta_0}^k - \bar{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \bar{\Delta}_{\beta_0}^{R,k})}).$$

Можно показать, что

$$(5) \quad \bar{\Delta}_i^{p+1,k} = (x_i - \bar{x}_i^k) A_i^{p,k}; \quad \Delta_i^{p+1,k} = (x_i - x_i^k) \bar{A}_i^{p,k}$$

для $p = 0, 1, \dots, R$. Из (4) и (5) следует, что

$$(6) \quad 0 \leq A_i^{p,k} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{A}_i^{p,k} \leq 1$$

для $i = 1, 2, \dots, m; p = 0, 1, \dots, R$ и неравенства (2) выполняются. Из (3) и (6) получаем $\bar{x}_i^{k+1} - x_i \geq 0, x_i^{k+1} - x_i \leq 0$. Теорема доказана.

Сейчас выясним вопрос о скорости сходимости последовательности $\{x_i^k\}_{i=1}^m$, $\{\bar{x}_i^k\}_{i=1}^m$ из (1). Справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть $0 < q < 1, d = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$ и $c > 0$ такое, что выполнено

$$(7) \quad 0 < c < d / (3 + \sqrt{n}).$$

Если начальные приближения выбраны так, что

$$0 \leq x_i - x_i^0 \leq cq; \quad 0 \leq \bar{x}_i^0 - x_i \leq cq; \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то для каждого $k = 0, 1, \dots$ выполняются неравенства

$$(8) \quad 0 \leq \bar{x}_i^k - x_i \leq cq^{(2R+3)^k}, \quad 0 \leq x_i - x_i^k \leq cq^{(2R+3)^k}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство. Техника установления оценок сходимости не будет существенно отличаться от использовавшейся в [7]. Доказательство проведем методом индукции. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{k+1} - x_i &= (\bar{x}_i^k - x_i)(1 - A_i^{R,k}) = \frac{1}{s_i} (\bar{x}_i^k - x_i)^2 A_i^{R,k} \sum_{\beta_0+i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})} \\ &= \frac{1}{s_i} (\bar{x}_i^k - x_i)^2 A_i^{R,k} \sum_{\beta_0+i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k)(1 - \bar{A}_{\beta_0}^{R-1,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})} \\ &= \frac{1}{s_i} (\bar{x}_i^k - x_i)^2 A_i^{R,k} \sum_{\beta_0+i}^m \frac{(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k)^2 \bar{A}_{\beta_0}^{R-1,k}}{(x_{\beta_0} - x_i^k)(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})} \sum_{\beta_1+\beta_0}^m \frac{s_{\beta_1}(x_{\beta_1} - \bar{x}_{\beta_1}^k - \bar{\Delta}_{\beta_1}^{R-1,k})}{(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1})(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \bar{\Delta}_{\beta_1}^{R-1,k})} \end{aligned}$$

Рекурсивно следует, что для R — четно имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{k+1} - x_i &= \frac{1}{s_i} (\bar{x}_i^k - x_i^k)^2 A_i^{R,k} \sum_{\beta_0 \neq i}^m \frac{(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k)^2 \bar{A}_{\beta_0}^{R-1,k}}{(x_{\beta_0} - x_i^k)(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})} \\ \dots \sum_{\beta_{R-1} \neq \beta_{R-2}}^m \frac{(\bar{x}_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_{R-1}}^k)^2 A_{\beta_{R-1}}^{0,k}}{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_{R-2}}^k)(x_{\beta_{R-2}}^k - \bar{x}_{\beta_{R-1}}^k - \Delta_{\beta_{R-1}}^{1,k})} \cdot \sum_{\beta_R \neq \beta_{R-1}}^m \frac{s_{\beta_R} (x_{\beta_R} - x_{\beta_R}^k)^2}{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}^k)(\bar{x}_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}^k)}, \end{aligned}$$

а для R — нечетно

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{k+1} - x_i &= \frac{1}{s_i} (\bar{x}_i^k - x_i^k)^2 A_i^{R,k} \sum_{\beta_0 \neq i}^m \frac{(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k)^2 \bar{A}_{\beta_0}^{R-1,k}}{(x_{\beta_0} - x_i^k)(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})} \\ \dots \sum_{\beta_{R-1} \neq \beta_{R-2}}^m \frac{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_{R-1}}^k)^2 \bar{A}_{\beta_{R-1}}^{0,k}}{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_{R-2}}^k)(x_{\beta_{R-2}}^k - \bar{x}_{\beta_{R-1}}^k - \Delta_{\beta_{R-1}}^{1,k})} \cdot \sum_{\beta_R \neq \beta_{R-1}}^m \frac{s_{\beta_R} (x_{\beta_R} - x_{\beta_R}^k)^2}{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}^k)(\bar{x}_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}^k)}. \end{aligned}$$

Видно, что

$$\min \{ |x_\mu - \bar{x}_\nu^k|, |x_\mu - x_\nu^k|, |\bar{x}_\nu^k - x_\mu^k - \Delta_\mu^{p,k}|, |x_\nu^k - \bar{x}_\mu^k - \Delta_\mu^{p,k}| \} > d - 3c,$$

и, следовательно, имеем по индукции

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{k+1} - x_i &\leq \frac{1}{s_i} c^2 q^{2(2R+3)^k} \frac{m^{R(c^2)^R} q^{2R(2R+3)^k} c q^{(2R+3)^k} (n - s_{\beta_{R-1}})}{(d-3c)^{R+1}} \\ &\leq c q^{(2R+3)^{k+1}} \frac{n^{R+1} (c^2)^{R+1} (n - s_{\beta_{R-1}})}{n s_i (d-3c)^{R+1}} \leq c q^{(2R+3)^{k+1}} \left(\frac{c^2 n}{(d-3c)^2} \right)^{R+1}. \end{aligned}$$

Из (7) следует, что

$$\bar{x}_i^{k+1} - x_i \leq c q^{(2R+3)^k}.$$

Аналогично можно показать, что $x_i - x_i^k \leq c q^{(2R+3)^k}$. Процесс (1) имеет порядок сходимости $\tau = 2R + 3$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Farmer, G. Loizou. An algorithm for the total, or partial, factorization of a polynomial *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 82, 1977, 427-437.
2. G. Loizou. Une note sur le procédé itératif de Mme Marica Presič. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I*, 295, 1982, 707-710.
3. Хр. Семерджиев. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. *Доклады БАН*, 35, 1982, 1057-1060.
4. I. Gargantini. Parallel square-root iterations for multiple roots. *Comp. Math. Appl.*, 6, 1980, 279-288.
5. M. Petkovič, L. Stefanovič. On some iteration functions for the simultaneous computation of multiple complex polynomial zeros. *BIT*, 27, 1987, 111-122.
6. Н. Кюркчиев, А. Андреев, В. Попов. Методы для одновременного вычисления всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. *Годишник Соф. унив.*, 78, 1, 1984, 191-198.
7. A. Andreev, N. Kjurkchiev. Two-sided methods for solving the polynomial equation. *Math. Balkanica, N. S.*; 1 1987, 72-82.

Математический институт
Болгарской академии наук
1090 София П. Я. 373
Болгария

Поступила 14. 11. 88 г.