

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Mathematical Journal
which is the new series of
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

EPICONVERGENCE D'UNE SUITE DE SOMMES EN NIVEAUX DE FONCTIONS CONVEXES

S. Traore, M. Volle

Communicated by R. Lucchetti

ABSTRACT. We consider the problem of minimizing the max of two convex functions from both approximation and sensitivity point of view. This lead up to study the epiconvergence of a sequence of level sums of convex functions and the related dual problems.

1. Introduction. Etant données deux fonctions convexes, propres, semicontinues inférieurement (s.c.i.) f et h sur l'espace $X = \mathbb{R}^p$ (ce que l'on note $f, h \in \Gamma_{\circ}(\mathbb{R}^p)$) on s'intéresse au problème d'optimisation,

$$(\mathcal{P}) : \text{minimiser } (f(x) \vee h(x)) \text{ pour } x \in X$$

où $f(x) \vee h(x) = \max(f(x), h(x))$.

Nous supposons l'existence d'une suite de problèmes "approximant" le problème initial (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{P}_n) : \text{minimiser } f_n(x) \vee h_n(x) \text{ pour } x \in X.$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 52A41, 90C25, 90C31

Key words: variational convergence, convex duality, sensitivity analysis

Il s'agit alors d'étudier les relations entre la valeur des (\mathcal{P}_n) et celle de (\mathcal{P}) , ainsi que les relations entre les solutions optimales des (\mathcal{P}_n) :

$$\operatorname{argmin}(f_n \vee h_n) = \{x \in X : f_n(x) \vee h_n(x) = \inf_X (f_n \vee h_n)\},$$

et les solutions optimales de (\mathcal{P}) :

$$\operatorname{argmin}(f \vee h) = \{x \in X : f(x) \vee h(x) = \inf_X (f \vee h)\}.$$

Pour cela il convient de faire appel à la notion d'épiconvergence dont nous rappelons ci-après la définition.

Etant donnée une suite (C_n) de parties de $X = \mathbb{R}^p$, les notions de limite inférieure et de limite supérieure au sens de Kuratowski-Painlevé de la suite (C_n) sont classiquement définies par

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} C_n &= \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in C_n \right\} \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} C_n &= \left\{ \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} : \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \in C_{n_k} \right\}. \end{aligned}$$

On dit alors que (C_n) converge vers C , et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = C$, si

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} C_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} C_n = C_n = C.$$

Etant données des fonctions $\ell, \ell_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ($n \in \mathbb{N}$), on dit que la suite (ℓ_n) épiconverge vers ℓ si, dans l'espace produit $X \times \mathbb{R}$, la suite des épigraphes $\operatorname{epi} \ell_n = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : \ell_n(x) \leq r\}$ converge vers l'épigraphe de ℓ . Cela se traduit par les relations suivantes ([1], [4], [6], ...) :

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \forall (x_n) \rightarrow x & : \liminf_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(x_n) \geq \ell(x) \\ \forall x \in X, \exists (x_n) \rightarrow x & : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(x_n) \leq \ell(x). \end{aligned}$$

On note alors $\ell = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$.

2. Approximation. Au regard des problèmes (\mathcal{P}) , (\mathcal{P}_n) , une situation intéressante est celle où $(f_n \vee h_n)$ épiconverge vers $(f \vee h)$, ce qui se traduit par la relation $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\operatorname{epi} f_n \cap \operatorname{epi} h_n) = \operatorname{epi} f \cap \operatorname{epi} h$. Les épigraphes ci-dessus étant convexes, on sait

que cette relation est vérifiée lorsque $f = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$, $h = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$ et que $0 \in \text{int}(\text{epi } f - \text{epi } h)$ (voir par exemple [2], [3], [9], [12]).

En désignant par $\text{dom } \ell = \{x \in X : \ell(x) < +\infty\}$ le domaine d'une fonction $\ell : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, la condition $0 \in \text{int}(\text{epi } f - \text{epi } h)$ équivaut à $0 \in \text{int}(\text{dom } f - \text{dom } h)$. En appliquant les propriétés variationnelles usuelles de l'épiconvergence (cf. [1], [6], [7], ...) on obtient alors :

Théorème 2.1 *Soient $f, f_n, h, h_n, (n \in \mathbb{N})$, des fonctions dans $\Gamma_o(X)$ telles que $f = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $h = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$. On suppose en outre que*

$$(0) \quad 0 \in \text{int}(\text{dom } f - \text{dom } h).$$

Alors $(f_n \vee h_n)$ épiconverge vers $f \vee h$ et on a donc :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) \leq \inf_X (f \vee h)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{argmin}(f_n \vee h_n) \subset \text{argmin}(f \vee h).$$

Remarque 1 : Comme le montre l'exemple suivant, la condition (0) n'entraîne pas la convergence de $(\inf_X (f_n \vee h_n))$ vers $\inf_X (f \vee h)$. Prenons $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+n)/n$, $h_n(x) = -(x+n)/n$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On voit que $e - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1$, $e - \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = -1$, $e - \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n \vee h_n) = f \vee h = 1$; cependant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) = 0 < 1 = \inf_X (f \vee h)$.

Pour avoir la convergence des valeurs des (\mathcal{P}_n) vers la valeur de (\mathcal{P}) à partir de l'épiconvergence de $(f_n \vee h_n)$ vers $f \vee h$, une condition suffisante est que la suite $(f_n \vee h_n)$ soit équicoercive. Rappelons qu'une suite (ℓ_n) de fonctions numériques définies sur X est équicoercive s'il existe une fonction coercive $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$) telle qu'on ait $\ell_n \geq \varphi$ pour n assez grand. On sait que la coercivité d'une fonction appartenant à $\Gamma_o(X)$ se traduit à l'aide de la fonction conjuguée. A ce propos, rappelons que la conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction $\ell : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction ℓ^* définie sur X par $\ell^*(y) = \sup_{x \in X} (\langle x, y \rangle - \ell(x))$, pour tout $y \in X$. On sait que cette conjugaison est une involution sur $\Gamma_o(X)$. Un résultat fondamental que nous utiliserons est la continuité de cette involution relativement à l'épiconvergence ([11]).

La coercivité d'une fonction $\ell \in \Gamma_o(X)$ se traduit par le fait que $0 \in \text{int}(\text{dom } \ell^*)$ ([13, Cor. 14.2.2]). Nous allons voir qu'une telle caractérisation subsiste pour une suite

de fonctions convexes épiconvergente et équicoercive. Nous aurons pour cela besoin du résultat suivant :

Lemme 2.2 ([14, Cor 3 B], [13, Th 10.8]). *Soient $\ell, \ell_n, (n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_o(X)$ telles que $\ell = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$. Dès lors, (ℓ_n) converge uniformément vers ℓ sur tout compact inclus dans $\text{int}(\text{dom } \ell)$.*

Voici maintenant le critère d'équicoercivité faisant intervenir la conjuguée de l'épi-limite.

Proposition 2.3. *Soient $\ell, \ell_n, (n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_o(X)$ telles que $\ell = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$. La suite (ℓ_n) est équicoercive si et seulement si*

$$(1) \quad 0 \in \text{int}(\text{dom } \ell^*).$$

Preuve. La condition est nécessaire car si φ est une fonction coercive telle que $\ell_n \geq \varphi$ pour n assez grand, alors $\ell \geq \varphi$ et de ce fait ℓ est aussi coercive, d'où $0 \in \text{int}(\text{dom } \ell^*)$. Montrons que la condition est suffisante. On a aussi $\ell^* = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n^*$, d'où il résulte que $\text{dom } \ell^* \subset \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dom } \ell_n^*$. Puisque 0 est dans l'intérieur de $\text{dom } \ell^*$ et que les ensembles $\text{dom } \ell_n^*, \text{dom } \ell^*$ sont convexes, on sait que l'inclusion ci-dessus implique l'existence de $\epsilon > 0$ tel que, pour n assez grand, on ait $\{y \in X : \|y\| < 2\epsilon\} \subset \text{dom } \ell_n^* \cap \text{dom } \ell^*$. D'après le Lemme 2.2, (ℓ_n^*) converge uniformément vers ℓ^* sur $\epsilon B = \{y \in X : \|y\| \leq \epsilon\}$. Ainsi, $c_n = \sup_{\epsilon B} \ell_n^*$ tend vers $c = \sup_{\epsilon B} \ell^*$, de sorte que, pour n assez grand et pour tout $y \in \epsilon B$, $\ell_n^*(y) \leq c + 1$; il en résulte que, pour tout $x \in X$,

$$\ell_n(x) \geq \sup_{y \in \epsilon B} \langle x, y \rangle - c - 1 = \epsilon \|x\| - c - 1,$$

ce qui montre que (ℓ_n) est équicoercive. \square

La coercivité d'une fonction $\ell \in \Gamma_o(X)$ se traduit aussi à l'aide de sa fonctionnelle asymptote. Rappelons que celle ci est la fonction $\ell 0^+$ définie sur X par $(\ell 0^+)(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ell(a + tx)}{t}$ pour tout x dans X , où a peut être choisi arbitrairement dans $\text{dom } \ell$.

Dès lors le cône convexe

$$\{\ell 0^+ \leq 0\} := \{x \in X : (\ell 0^+)(x) \leq 0\}$$

coïncide avec le cône polaire négatif du cône engendré par $\text{dom } f^*$ ([13, Th 14.2]). Vu que X est de dimension finie, il en résulte que la condition (1) équivaut à $\{\ell 0^+ \leq 0\} = \{0\}$. Ceci étant on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.4. *Soient $f, f_n, h, h_n, (n \in \mathbb{N})$, des fonctions dans $\Gamma_o(X)$ telles que $f = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $h = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$. On suppose en outre que les conditions ci-dessous sont satisfaites :*

$$(2) \quad 0 \in \text{int}(\text{dom } f - \text{dom } h)$$

$$(3) \quad \{f 0^+ \leq 0\} \cap \{h 0^+ \leq 0\} = \{0\}.$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) = \inf_X (f \vee h).$$

De plus, pour n assez grand, les ensembles $\text{argmin}(f_n \vee h_n)$ et $\text{argmin}(f \vee h)$ sont convexes non vides et compacts. Enfin, pour tout ouvert Ω contenant $\text{argmin}(f \vee h)$ on a, pour n assez grand, $\text{argmin}(f_n \vee h_n) \subset \Omega$.

Preuve. D'après le Théorème 2.1, $(f_n \vee h_n)$ épiconverge vers $f \vee h$. Il reste à prouver que la suite $(f_n \vee h_n)$ est équicoercive, c'est-à-dire, d'après le Lemme 2.3, que $0 \in \text{int dom } (f \vee h)^*$, ou encore que $\{(f \vee h) 0^+ \leq 0\} = \{0\}$. Or, d'après (2), il existe $a \in \text{dom } f \cap \text{dom } h$. Dès lors, pour tout $x \in X$, $[(f \vee h) 0^+](x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(f \vee h)(a + tx)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(a + tx) \vee h(a + tx)}{t} = (f 0^+)(x) \vee (h 0^+)(x)$. Ainsi, $\{(f \vee h) 0^+ \leq 0\} = \{f 0^+ \leq 0\} \cap \{h 0^+ \leq 0\} = \{0\}$, et $(f_n \vee h_n)$ est bien équicoercive. Les résultats annoncés découlent alors des propriétés variationnelles classiques de l'épiconvergence ([6, Th. 7.8, Th. 7.23]). \square

3. Sensibilité. Un schéma de perturbation classique du problème (\mathcal{P}) nous conduit à considérer, pour tout z dans X , le problème

$$(\mathcal{P}_z) : \text{minimiser } f(x) \vee h(x - z) \quad \text{pour } x \in X,$$

et la fonction valeur v correspondante,

$$z \in X \mapsto v(z) = \inf_{x \in X} (f(x) \vee h(x - z)) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

En introduisant la fonction g définie par

$$g(x) = h(-x) \quad \text{pour tout } x \in X,$$

la fonction valeur v n'est autre que la somme en niveaux de f et de g , à savoir,

$$(4) \quad v(z) = (f \Delta g)(z) := \inf_{x \in X} (f(x) \vee g(z - x))$$

pour tout $z \in X$. Pour justifier l'appellation de somme en niveaux introduisons les notations suivantes : étant donné une fonction $\ell := X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et un nombre réel t posons $\{\ell < t\} = \{x \in X : \ell(x) < t\}$, $\{\ell \leq t\} = \{x \in X : \ell(x) \leq t\}$. On a alors ([13, p. 40])

$$\{f \Delta g < t\} = \{f < t\} + \{g < t\} := \{u + v : f(u) < t, \quad g(v) < t\}$$

pour tout réel t , ainsi que

$$(5) \quad \text{dom}(f \Delta g) = \text{dom } f + \text{dom } g.$$

Lorsque $f \Delta g$ est exacte, c'est à dire lorsque dans (4) la borne inférieure est atteinte pour chaque $z \in X$, on a de plus ([16, Prop. 2.2])

$$\{f \Delta g \leq t\} = \{f \leq t\} + \{g \leq t\}$$

pour tout réel t .

Les fonctions f et g étant convexes, on sait aussi que $f \Delta g$ est convexe. Pour d'autres propriétés de la somme en niveaux on pourra consulter [15].

L'étude de la sensibilité du problème (\mathcal{P}) nous conduit à nous demander quand est-ce qu'une somme en niveaux est s.c.i. et exacte. La réponse est fournie par le résultat suivant ([17, Cor. V-1]) :

Théorème 3.1. *Soient f et g deux fonctions dans $\Gamma_{\circ}(X)$. On suppose que*

$$(6) \quad \{f0^+ \leq 0\} \cap (-\{g0^+ \leq 0\}) \quad \text{est un sous - espace vectoriel.}$$

Alors $f \Delta g$ est convexe, s.c.i., propre et exacte.

Pour étudier l'épiconvergence d'une suite de sommes en niveaux nous ferons appel au résultat ci-après, qui découle immédiatement de [10, Th. 7] (voir aussi [5, Th. 4.1.1.]).

Théorème 3.2. Soient $F, F_n, (n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_o(X \times X)$ telles que $F = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$. On suppose que $\{x \in X : (F0^+)(x, 0) \leq 0\} = \{0\}$. Dans ces conditions, les fonctions marginales $z \in X \mapsto \mu(z) := \inf_{x \in X} F(x, z)$ et, pour n assez grand, $z \in X \mapsto \mu_n(z) := \inf_{x \in X} F_n(x, z)$ sont convexes, s.c.i., propres et exactes ; de plus la suite (μ_n) épiconverge vers μ .

Nous allons ici considérer le cas où les fonctions F, F_n sont données par

$$(7) \quad F(x, z) = f(x) \vee g(z - x)$$

$$(8) \quad F_n(x, z) = f_n(x) \vee g_n(z - x).$$

Le lemme suivant fournit l'expression de la fonctionnelle asymptote de F .

Lemme 3.3. Soient f, g dans $\Gamma_o(X)$ et F la fonction définie en (7). On a alors

$$(F0^+)(u, v) = (f0^+)(u) \vee (g0^+)(v - u)$$

pour tout $(u, v) \in X \times X$.

Preuve. Choisissons $x \in \text{dom } f$ et $z \in x + \text{dom } g$. On a alors

$$\begin{aligned} (F0^+)(u, v) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x + tu) \vee g(z - x + t(v - u))}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x + tu)}{t} \vee \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(z - x + t(v - u))}{t} = \\ &= (f0^+)(u) \vee (g0^+)(v - u). \quad \square \end{aligned}$$

On doit maintenant étudier l'épiconvergence des fonctions de perturbation. Cela fait l'objet de la proposition suivante où, d'une manière assez inattendue, la convexité des fonctions n'intervient pas.

Proposition 3.4. Soient $f, g, f_n, g_n, (n \in \mathbb{N})$, des fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $f = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $g = e - \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$. Dans ces conditions, la suite (F_n) définie en (8) épiconverge vers la fonction F définie en (7).

Preuve. Pour toute suite (x_n, z_n) dans $X \times X$ on a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n, z_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) \vee \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n(z_n - x_n).$$

Supposons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, z_n) = (x, z)$. On obtient alors :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n, z_n) \geq f(x) \vee g(z - x) = F(x, z).$$

Soit maintenant (x, z) dans $X \times X$. Par hypothèse il existe $(x_n) \rightarrow x$ et $(u_n) \rightarrow (z - x)$ telles que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) \leq f(x) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} g_n(u_n) \leq g(z - x).$$

Dès lors,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n, x_n + u_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) \vee \limsup_{n \rightarrow +\infty} g_n(u_n) \leq f(x) \vee g(z - x) = F(x, z). \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3.5. Soient $f, g, f_n, g_n, (n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $g = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$. Supposons que

$$(9) \quad \{f0^+ \leq 0\} \cap -\{g0^+ \leq 0\} = \{0\}.$$

Dans ces conditions, $(f_n \Delta g_n)$ épiconverge vers $f \Delta g$, et, pour n assez grand, $f_n \Delta g_n$ est convexe, s.c.i., propre et exacte.

Preuve. Résulte sans difficulté du Théorème 3.2, du Lemme 3.3, et de la proposition 3.4. \square

Remarque 2 : Si, dans le Théorème 3.5, on remplace l'hypothèse (9) par (6), le résultat n'est plus vrai. Pour le voir, reprenons l'exemple de la Remarque 1, ce qui donne $g_n(x) = h_n(-x) = (x - n)/n$, et $e-\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = -1$, d'où $g0^+ = f0^+ = 0$, de sorte que $\{f0^+ \leq 0\} \cap -\{g0^+ \leq 0\} = \mathbb{R}$. Par ailleurs, $(f_n \Delta g_n)(z) = z/2n$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, la suite $(f_n \Delta g_n)$ épiconverge vers 0, alors que $f \Delta g = 1$.

Corollaire 3.6. Soient $f, g, f_n, g_n, (n \in \mathbb{N})$, comme dans le Théorème 3.5. Alors, pour tout $z \in \text{int}(\text{dom } f + \text{dom } g)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n \Delta g_n)(z) = (f \Delta g)(z)$.

Preuve. Cela résulte de (5) et du fait qu'en tout point intérieur au domaine de l'épilimite d'une suite de fonctions convexes, on a la convergence simple (cf. Lemme 2.2). \square

Remarque 3 : Dans le cas où $z = 0$, le Corollaire 3.6 permet de retrouver une des conclusions du Théorème 2.4, à savoir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_X (f_n \vee h_n) = \inf_X (f \vee h)$ (rappelons que $h_n(x) = g_n(-x), h(x) = g(-x)$).

4. Approche duale. Soient $f, f_n, h, h_n, (n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_o(X)$. A l'aide de la fonction de perturbation Φ (resp. Φ_n)

$$(10) \quad (x, z) \in X \times X \mapsto \Phi(x, z) := f(x) \vee h(x - z)$$

$$(11) \quad (\text{resp. } \Phi_n(x, z) = f_n(x) \vee h_n(x - z))$$

la théorie de la dualité permet d'associer au problème

$$(\mathcal{P}) \quad : \quad \text{minimiser } f(x) \vee h(x) \text{ pour } x \in X$$

$$(\text{resp. } (\mathcal{P}_n) \quad : \quad \text{minimiser } f_n(x) \vee h_n(x) \text{ pour } x \in X)$$

le problème dual

$$(\mathcal{Q}) \quad : \quad \text{maximiser } -\Phi^*(0, y) \text{ pour } y \in X$$

$$(\text{resp. } (\mathcal{Q}_n) \quad : \quad \text{maximiser } -\Phi_n^*(0, y) \text{ pour } y \in X).$$

La fonction marginale primale μ (resp. μ_n) est donnée par $\mu(z) = \inf_{x \in X} \Phi(x, z)$ (resp. $\mu_n(z) = \inf_{x \in X} \Phi_n(x, z)$) pour tout $z \in X$. On a donc, avec $g(x) = h(-x)$ (resp. $g_n(x) = h_n(-x)$),

$$\mu = f \triangle g \quad (\text{resp. } \mu_n = f_n \triangle g_n).$$

Pour expliciter les problèmes duaux il nous faut calculer les fonctions conjuguées Φ^*, Φ_n^* . Dans ce but nous introduisons les notations suivantes. Etant donnée une fonction $\ell \in \Gamma_o(X)$ et un réel $a \geq 0$ on pose, pour tout $x \in X$,

$$(\ell a)(x) = a \ell \left(\frac{x}{a} \right) \quad \text{si } a > 0$$

$$\ell 0 = \ell 0^+ \quad \text{si } a = 0.$$

Moyennant un théorème de minimax on obtient alors, en notant $S = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$:

Lemme 4.1 ([16, Lemme 3.2]). *Soient f et h dans $\Gamma_\circ(X)$. La conjuguée de la fonction Φ définie en (10) est donnée par*

$$\Phi^*(w, y) = \min_{(\alpha, \beta) \in S} ((f^* \alpha)(w + y) + (h^* \beta)(-y))$$

pour tout $(w, y) \in X \times X$.

Ainsi le problème dual de (\mathcal{P}) (resp. (\mathcal{P}_n)) s'écrit

$$(\mathcal{Q}) : \text{maximiser } - \min_{(\alpha, \beta) \in S} (f^* \alpha)(y) + (h^* \beta)(-y) \text{ pour } y \in X$$

$$(\text{resp. } (\mathcal{Q}_n)) : \text{maximiser } - \min_{(\alpha, \beta) \in S} (f_n^* \alpha)(y) + (h_n^* \beta)(-y) \text{ pour } y \in X).$$

Les fonctions marginales duales sont respectivement définies pour tout $w \in X$ par

$$(12) \quad \nu(w) = \inf_{y \in X} \min_{(\alpha, \beta) \in S} ((f^* \alpha)(w + y) + (h^* \beta)(-y))$$

$$(13) \quad \nu_n(w) = \inf_{y \in X} \min_{(\alpha, \beta) \in S} ((f_n^* \alpha)(w + y) + (h_n^* \beta)(-y)).$$

Voici un premier résultat de stabilité primale-duale.

Proposition 4.2. *Soient $f, h, f_n, h_n, (n \in \mathbb{N})$ dans $\Gamma_\circ(X)$ telles que $f = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $h = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$. On suppose que*

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap \{h0^+ \leq 0\} = \{0\}.$$

Dans ces conditions, les problèmes (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) (resp. (\mathcal{P}_n) et (\mathcal{Q}_n) pour n assez grand) ont des valeurs égales, et les problèmes (\mathcal{P}) (resp. (\mathcal{P}_n) pour n assez grand) ont des solutions optimales :

$$-\infty < \min(\mathcal{P}) = \sup(\mathcal{Q}) \leq +\infty$$

$$(\text{resp. } -\infty < \min(\mathcal{P}_n) = \sup(\mathcal{Q}_n) \leq +\infty).$$

Preuve. D'après le Théorème 3.1 (resp. Théorème 3.5), la fonction marginale μ (resp. μ_n pour n assez grand) est exacte et appartient à $\Gamma_o(X)$. Le résultat découle alors de la relation classique $\sup(\mathcal{Q}) = \mu^{**}(0)$ (resp. $\sup(\mathcal{Q}_n) = \mu_n^{**}(0)$). \square

En complément du Théorème 2.4 nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.3. *Soient $f, h, f_n, h_n, (n \in \mathbb{N})$, vérifiant les mêmes hypothèses que dans le Théorème 2.4. On a alors $\min(\mathcal{P}) = \max(\mathcal{Q}) \in \mathbb{R}$ et, pour n assez grand, $\min(\mathcal{P}_n) = \max(\mathcal{Q}_n) \in \mathbb{R}$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(\mathcal{Q}_n) = \max(\mathcal{Q})$. Enfin, tout ouvert contenant l'ensemble (convexe compact non vide) des solutions optimales de (\mathcal{Q}) contient, pour n assez grand, l'ensemble (convexe compact non vide) des solutions optimales de (\mathcal{Q}_n) .*

Preuve. Considérons les fonctions Φ et Φ_n définies en (10), (11). En vertu du Théorème 2.4 et de la Proposition 4.2, il suffit de montrer que la suite $(\Phi_n^*(0, \cdot))$ est équicoercive et épiconverge vers $\Phi^*(0, \cdot)$. Or, $\Phi_n^*(0, \cdot) = \mu_n^*$ et $\Phi^*(0, \cdot) = \mu^*$. Du Théorème 3.5 résulte alors que $(\Phi_n^*(0, \cdot))$ épiconverge vers $\Phi^*(0, \cdot)$. Enfin, l'équicoercivité de la suite (μ_n^*) résulte de la Proposition 2.3 moyennant (2). \square

Nous terminons par l'étude de l'épiconvergence des fonctions marginales duales.

Théorème 4.4. *Soient $f, h, f_n, h_n, (n \in \mathbb{N})$, dans $\Gamma_o(X)$ telles que $f = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $h = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$. On suppose que $0 \in \text{int}(\text{dom } f - \text{dom } h)$. Alors les fonctions marginales duales ν et, pour n assez grand, ν_n , sont convexes, s.c.i., propres, exactes, et on a $\nu = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n$.*

Preuve. D'après la Proposition 3.4, la suite de fonctions (Φ_n) définies en (10), (11) épiconverge vers Φ dans $\Gamma_o(X \times X)$. Il en résulte que $\Phi^* = e-\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n^*$. Appliquons maintenant la version duale du Théorème 3.2. Pour cela on doit vérifier que $\{y \in X : (\Phi^*0^+)(0, y) \leq 0\} = \{0\}$. Mais Φ^*0^+ n'est autre que la fonction d'appui ([13, Th. 3.3]) de $\text{dom } \Phi = \{(x, z) \in X \times X : x \in \text{dom } f \text{ et } x - z \in \text{dom } h\} : (\Phi^*0^+)(0, y) = \sup(\langle 0, x \rangle + \langle y, z \rangle : x \in \text{dom } f, x - z \in \text{dom } h) = \sup(\langle y, z \rangle : z \in \text{dom } f - \text{dom } h)$. Du fait que $0 \in \text{int}(\text{dom } f - \text{dom } h)$ résulte alors que, pour tout $y \neq 0$, $(\Phi^*0^+)(0, y) > 0$. \square

5. Etude d'un exemple. Considérons deux suites (A_n) et (B_n) d'opérateurs linéaires symétriques semi-définis positifs de l'espace euclidien X , ainsi que deux suites (v_n) et (w_n) d'éléments de X convergeant respectivement vers v et w , et enfin deux

suites de nombres réels (r_n) et (s_n) convergeant vers r et s respectivement. On suppose que les suites d'opérateurs (A_n) et (B_n) convergent simplement. Il existe donc deux opérateurs (linéaires, symétriques, semi-définis positifs) A et B tels que, pour tout $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(x) = A(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(x) = B(x)$. Les suites de fonctions (f_n) et (h_n) définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \langle A_n x, x \rangle - \langle v_n, x \rangle - r_n = q_{A_n}(x) - \langle v_n, x \rangle - r_n,$$

$$h_n(x) = \frac{1}{2} \langle B_n x, x \rangle - \langle w_n, x \rangle - s_n = q_{B_n}(x) - \langle w_n, x \rangle - s_n$$

convergent donc simplement vers les fonctions f et h données par

$$f(x) = q_A(x) - \langle v, x \rangle - r, \quad h(x) = q_B(x) - \langle w, x \rangle - s, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Soient alors les problèmes d'optimisation (\mathcal{P}_n) et (\mathcal{P}) correspondants :

$$(\mathcal{P}_n) : \text{ minimiser } (q_{A_n}(x) - \langle v_n, x \rangle - r_n) \vee (q_{B_n}(x) - \langle w_n, x \rangle - s_n) \text{ pour } x \in X$$

$$(\mathcal{P}) : \text{ minimiser } (q_A(x) - \langle v, x \rangle - r) \vee (q_B(x) - \langle w, x \rangle - s) \text{ pour } x \in X.$$

Proposition 5.1. *Soient $A, A_n, B, B_n, v, v_n, w, w_n, r, r_n, s, s_n$ comme ci-dessus.*

Supposons en outre que

$$(14) \quad \text{Im}A + \text{Im}B + R_+v + R_+w = X.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf(\mathcal{P}_n) = \inf(\mathcal{P})$. D'autre part, $\text{argmin}(\mathcal{P})$ et, pour n assez grand, $\text{argmin}(\mathcal{P}_n)$ sont compacts non vides; enfin, tout ouvert contenant $\text{argmin}(\mathcal{P})$ contient $\text{argmin}(\mathcal{P}_n)$ pour n assez grand.

Preuve. Comme les fonctions $f, f_n, (n \in \mathbb{N})$, sont convexes et à valeurs finies, la convergence simple de (f_n) vers f équivaut à l'épiconvergence de (f_n) vers f ; on a de même $e- \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = h$. La condition (2) du Théorème 2.4 est évidemment vérifiée. Pour ce qui est de la condition (3) observons que

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap \{h0^+ \leq 0\} = \text{Ker}A \cap \{v \geq 0\} \cap \text{Ker}B \cap \{w \geq 0\}.$$

Le passage aux cônes polaires permet alors d'obtenir (3) à partir de (14). On conclut en appliquant le Théorème 2.4. \square

Pour écrire les problèmes duaux rappelons que, pour tout $y \in X$,

$$f^*(y) = q_{A^{-1}}(v + y) + r \text{ si } v + y \in \text{Im}A, f^*(y) = +\infty \text{ si } y \in X \setminus \text{Im}A,$$

où A^{-1} désigne le pseudoinverse de A ([8, Th. 3]).

On obtient ainsi

$$(\mathcal{Q}) : \text{maximiser } - \min_{\substack{(\alpha, \beta) \in S \\ \alpha v + y \in \text{Im}A \\ \beta w - y \in \text{Im}B}} \left\{ \frac{1}{\alpha} q_{A^{-1}}(\alpha v + y) + \frac{1}{\beta} q_{B^{-1}}(\beta w - y) + r + s \right\} \text{ pour } y \in X$$

et de même pour (\mathcal{Q}_n) .

Précisons que dans l'écriture de (\mathcal{Q}) on doit, pour $\alpha = 0$, remplacer $\frac{1}{\alpha} q_{A^{-1}}(\alpha v + y)$ par 0 si $y = 0$ et par $+\infty$ si $y \neq 0$. De même pour la valeur de $\frac{1}{\beta} q_{B^{-1}}(\beta w - y)$ lorsque $\beta = 0$.

Proposition 5.2. *Soient $A, A_n, B, B_n, v, v_n, w, w_n, r, r_n, s, s_n$ comme dans la Proposition 5.1. Alors les conclusions du Théorème 4.3 ont lieu.*

Preuve. Il suffit d'observer que les conditions (2) et (3) sont satisfaites. \square

REFERENCES

- [1] H. ATTOUCH. Variational Convergence for Functions and Operators. Pitman, 1984.
- [2] D. AZE, J.-P. PENOT. Operations on convergent families of sets and functions. *Optimization* **21** (1990), 521-534.
- [3] D. AZE, M. VOLLE. A stability result in quasiconvex programming. *J. Optim. Theory Appl.* **67** (1990), 175-184.
- [4] G. BEER. Topologies on Closed and Closed Convex Sets. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [5] R. C. BERGSTROM. Optimization, convergence and duality. Thesis, 1980.
- [6] G. DAL MASO. An Introduction to Γ -Convergence. Birkhäuser, 1993.
- [7] A. L. DONTCHEV, T. ZOLEZZI. Well-Posed Optimization Problems. Lecture Notes in Mathematics vol. **1543**, 1993.

- [8] J.-B. HIRIART-URRUTY, M.-L. MAZURE. Formulations variationnelles de l'addition parallèle et de la soustraction parallèle d'opérateurs semi-définis positifs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, No 15 (1986), 527-530.
- [9] R. LUCCHETTI, F. PATRONE. Closure and upper semicontinuity results in mathematical programming, Nash and economic equilibria. *Optimization* **17** (1986), 619-628.
- [10] MC. LINDEN, R. C. BERGSTROM. Preservation of convergence of sets and functions in finite dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **268** (1981), 127-142.
- [11] V. MOSCO. On the continuity of the Young-Fenchel transform. *J. Math. Anal. Appl.* **35** (1971), 518-535.
- [12] J.-P. PENOT. Preservation of persistence and stability under intersections and operations, Part 1 : persistence. *J. Optim. Theory Appl.* **79**, No 3 (1993), 525-550.
- [13] R. T. ROCKAFELLAR. *Convex Analysis*. Princeton, 1970.
- [14] G. SALINETTI, R. J.-B. WETS. On the relations between two types of convergence for convex functions. *J. Math. Anal. Appl.* **60**, (1977) 211-226.
- [15] A. SEEGER, M. VOLLE. On a convolution operation obtained by adding level sets : classical and new results. *Oper. Res.* **29**, No 2 (1995), 131-154.
- [16] S. TRAORE, M. VOLLE. Subdifferentiability, lower semicontinuity and exactness of the level sum of two convex functions on a locally convex space. Proceedings of the 7th, French-German Conference on Optimization, Dijon 1994. In *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, R. Durier, C. Michelot (eds.), v. **429**, 1995, 346-356.
- [17] S. TRAORE, M. VOLLE. On the level sum of two convex functions on Banach spaces. *J. Convex Anal.* **3**, 1 (1996), Part II of the Special Issue in Honor of R. T. Rockafellar, (to appear).

Université d'Avignon
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
33, Rue Louis Pasteur
84000 Avignon
France

Received November 27, 1995