Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **24** (1998), 289-306

Serdica
Mathematical Journal

Institute of Mathematics
and Informatics, Bulgarian
Academy of Sciences

DIRECTIONS DE MAJORATION D'UNE FONCTION QUASICONVEXE ET APPLICATIONS

Charki Amara

Communicated by R. Lucchetti

Abstract. We introduce the convex cone constituted by the directions of majoration of a quasiconvex function. This cone is used to formulate a qualification condition ensuring the epiconvergence of a sequence of general quasiconvex marginal functions in finite dimensional spaces.

1. Introduction. Dans les problèmes de sensibilité et de convergence le comportement à l'infini des fonctions considérées joue un rôle important. Ce comportement est en général décrit par la notion de fonctionnelle asymptote ([5], [10], [26],...). Dans ce travail, qui se situe en dimension finie, on introduit la notion de direction de majoration d'une fonction. Il s'agit d'une définition très naturelle qui est particuliérement bien adaptée aux fonctions quasiconvexes. Pour de telles fonctions l'ensemble des directions de majoration est un cône convexe qui est inclus, en général strictement, dans l'ensemble des points où la fonctionnelle asymptote de la fonction prend des valeurs négatives ou nulles (proposition

1991 *Mathematics Subject Classification:* 52A20, 90C26, 90C31

Key words: Recession cones, Quasiconvex functions, sensitivity analysis, epiconvergence, marginal functions

3.1). Lorsque la fonction est convexe, semicontinue inférieurement (s.c.i.) et propre, on retrouve le cône asymptote de la fonction au sens de Rockafellar. On utilise le cône des directions de majoration pour obtenir l'épiconvergence d'une suite de sommes en niveaux de fonctions quasiconvexes (théorème 5.1). Nous appliquons ce résultat à l'épiconvergence de fonctions marginales quasiconvexes plus générales (corollaire 6.3) et, en particulier, aux fonctions images quasiconvexes (corollaire 6.5). Le théorème 5.1 permet aussi de retrouver les résultats classiques d'épiconvergence de fonctionnelles convexes (voir notamment les corollaires 6.1 et 6.2). Le cône des directions de majoration d'une fonction quasiconvexe permet également d'affaiblir, dans le cas quasiconvexe, la condition classique [26, théorème 3.2] assurant la semicontinuité inférieure et l'exactitude d'une fonction marginale (corollaire 6.4).

2. Notations et définitions. Dans ce qui suit X désigne un espace vectoriel de dimension finie.
On rappelle que les limites supérieures et inférieures d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X sont définies respectivement par

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} A_n &:= \{x \in X : x = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} : x_{n_k} \in A_{n_k} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}\\ \liminf_{n\to+\infty} A_n &:= \{x \in X : x = \lim_{n\to+\infty} x_n : x_n \in A_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \subset X$ au sens de Painlevé-Kuratowski (P-K) si

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n \subset A \subset \liminf_{n\to+\infty} A_n.$$

On note alors

$$A = \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

A toute fonction f définie de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ on associe son epigraphe

$$\operatorname{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ épiconverge vers la fonction f, si la suite $(\operatorname{epi} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de (P-K) vers $\operatorname{epi} f$ dans l'espace $X \times \mathbb{R}$. On note alors :

$$f = e - \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

A toute partie A de X on associe sa fonction indicatrice δ_A définie par

$$\delta_A(x) = 0 \text{ si } x \in A, \delta_A(x) = +\infty \text{ si } x \in X \backslash A.$$

Le cône asymptote de A est l'ensemble

$$A_\infty := \{\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n x_n \ : \varepsilon_n \searrow 0; x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Lorsque A est convexe, son cône asymptote est l'ensemble

$$0^+ A = \{y \in X : x + \lambda y \in A \quad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in A\}.$$

Si de plus A est fermée on a ([9], [20],...)

$$A_\infty = 0^+ A = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(A - x)$$

où x est un point arbitraire de A. Dans ce qui suit on convient de poser $\emptyset_\infty = 0^+\emptyset = \emptyset$.

A toute fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, on associe sa fonctionnelle asymptote f_∞ ([5], [10]) définie par

$$f_\infty(y) = \inf \left\{ \liminf_{n \to +\infty} \varepsilon_n f\left(\frac{x_n}{\varepsilon_n}\right) : \varepsilon_n \searrow 0; x_n \to y \right\} \tag{2.1}$$

pour tout $y \in X$.

Lorsque f est convexe propre, sa fonctionnelle asymptote est la fonction $f0^+$ définie, pour tout $y \in X$, par

$$f0^+(y) := \sup_{x \in \operatorname{dom} f} (f(x + y) - f(x))$$

où $\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ désigne le domaine effectif de f. On a aussi la relation [20]

$$0^+(\operatorname{epi} f) = \operatorname{epi}(f0^+). \tag{2.2}$$

Si, de plus, f est s.c.i., c'est à dire si f est dans $\Gamma_0(X)$, les fonctionnelles f_∞ et $f0^+$ coïncident ([5], [10], [20]) et on a, pour tout $y \in X$,

$$f0^+(y) = \sup_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

où x est un point arbitraire de dom f.

Rappelons que la somme vectorielle de deux parties A et B de X est donnée par : $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Cette somme est vide si et seulement si A ou B est vide.

Si f et g sont deux fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ leur somme en niveaux est la fonction $f \triangle g$ définie sur X par

$$(f \triangle g)(x) = \inf\{f(u) \vee g(v) : u + v = x\} \quad \forall x \in X$$

où $a \vee b = \max(a, b)$, pour tout $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

En notant, pour toute fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ et tout réel r,

$$\{f < r\} := \{x \in X : f(x) < r\}, \quad \{f \leq r\} := \{x \in X : f(x) \leq r\},$$

on sait que

$$\{f \Delta g < r\} = \{f < r\} + \{g < r\}.$$

Cette relation justifie à la fois la terminologie *"somme en niveaux"* et le fait que cette opération préserve la quasiconvexité . Rappelons à cette occasion qu'une fonction f est quasiconvexe si $\{f \leq r\}$ est convexe pour tout $r \in \mathbb{R}$. Ceci équivaut au fait que $\{f < r\}$ est convexe pour tout $r \in \mathbb{R}$ ([7]).

D'autres propriétés de cette opération sont données ci-dessous (voir [2], [21], [22], [23]) :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \{f \leq r\} + \{g \leq r\} \subset \{f \Delta g \leq r\}$$

$$\begin{aligned} \inf_X (f \Delta g) &= \inf_X f \vee \inf_X g \\ \operatorname{dom}(f \Delta g) &= \operatorname{dom} f + \operatorname{dom} g. \end{aligned}$$

On dit que $f \Delta g$ est exacte si pour tout $x \in X$ l'inf est atteint dans la définition de $(f \Delta g)(x)$.

Pour l'etude de l'épiconvergence d'une suite de sommes en niveaux de fonctions quasiconvexes, nous aurons besoin d'une caracterisation de l'épiconvergence en termes de tranches. Cette caractérisation est donnée par le théorème suivant dû à M. Volle [25] (voir [6] pour une autre caractérisation):

Théorème 2.1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ épiconverge vers f si et seulement si pour tout réel r les conditions suivantes sont réalisées*

$$\limsup_{n\to+\infty}\{f_n < r\} \quad \subset \quad \{f \le r\}$$

$$\liminf_{n\to+\infty}\{f_n < r\} \quad \supset \quad \{f < r\}.$$

3. Directions de majoration.

Définition 3.1. *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $y \in X$ est une direction de majoration de f, s'il existe $(x, r) \in X \times \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x+\lambda y) \le r \;\; \textit{pour tout} \;\; \lambda \ge 0.$$

On note C_f l'ensemble des directions de majoration de f.

Les relations entre C_f et la fonctionnelle asymptote de f sont precisées ci-dessous:

Proposition 3.1. 1) *Si* $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$, *alors C_f est un cône tel que*

$$0 \in C_f \subset \{f_\infty \le 0\}.$$

2) *Si f est convexe propre, alors $\{f0^+ \le 0\} \subset C_f$, l'inclusion pouvant être stricte; si, de plus, f est s.c.i., i.e. si $f \in \Gamma_0(X)$, alors*

$$C_f = \{f0^+ \le 0\}. \tag{3.1}$$

3) *Si f est quasiconvexe, alors C_f est un cône convexe; si, de plus, f est s.c.i., alors*

$$C_f = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} 0^+\{f \le r\} = \bigcup_{r>\inf_X f} 0^+\{f \le r\}. \tag{3.2}$$

Preuve. 1) Il est facile de voir que C_f est un cône contenant l'origine. Soit $y \in C_f$; pour $(x, r) \in X \times \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+\lambda y) \le r$ pour tout $\lambda \ge 0$, on a d'aprés (2.1),

$$f_\infty(y) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{1}{n}x + y}{\frac{1}{n}}\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} r = 0,$$

soit $y \in \{f_\infty \leq 0\}$, d'où $C_f \subset \{f_\infty \leq 0\}$.

2) Soit $y \in \{f0^+ \leq 0\}$. D'aprés (2.2), $(y, 0) \in 0^+(\operatorname{epi} f)$, ce qui signifie, par définition du cône asymptote convexe, que l'inégalité $f(x + \lambda y) \leq f(x)$ a lieu pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $x \in \operatorname{dom} f$; en particulier $y \in C_f$, d'où l'inclusion $\{f0^+ \leq 0\} \subset C_f$. Cette inclusion est stricte pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = 0$ si $x > 0$ et $y > 0$, $f(x, y) = +\infty$ sinon. On a en effet $\{f0^+ \leq 0\} = (\mathbb{R}^*{}_+ \times \mathbb{R}^*{}_+) \cup \{(0, 0)\}$ et $C_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Lorsque f est dans $\Gamma_0(X)$, on a $f0^+ = f_\infty$, et l'autre inclusion est vérifiée d'aprés 1).

3) Soient y_1, y_2 dans C_f. Il existe alors $(x_1, x_2) \in X \times X$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1 + \lambda y_1) \leq r$ et $f(x_2 + \lambda y_2) \leq r$ pour tout $\lambda \geq 0$. Comme f est quasiconvexe, alors $f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}\lambda(y_1 + y_2)\right) \leq r$ pour tout $\lambda \geq 0$, d'où $(y_1 + y_2) \in C_f$. Le cône C_f est alors convexe.

Supposons que f est quasiconvexe s.c.i. Pour tout $r \in \mathbb{R}$ tel que $\{f \leq r\} \neq \emptyset$ on a

$$0^+\{f \leq r\} = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(\{f \leq r\} - x)$$

avec $x \in \{f \leq r\}$ quelconque.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in C_f \quad &\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}, \exists x \in \{f \leq r\} \text{ tel que } x + \lambda y \in \{f \leq r\}, \forall \lambda > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \in 0^+\{f \leq r\} \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{r \in \mathbb{R}} 0^+\{f \leq r\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $C_f = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} 0^+\{f \leq r\} = \bigcup_{r > \inf_X f} 0^+\{f \leq r\}$. $\square$

Remarques 3.1.

1) Même lorsque f est quasiconvexe s.c.i., le cône convexe C_f n'est pas forcément fermé. Pour le voir prenons par exemple $X = \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{|y|}{x}$ si $x > 0, f(x, y) = +\infty$ si $x \leq 0$ et $y \neq 0$, et $f(0, 0) = 0$. Pour tout $r > 0 = \inf_{\mathbb{R}^2} f$ on a $\{f \leq r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ et } -rx \leq y \leq rx\}$ qui est un cône convexe fermé; f est donc quasiconvexe s.c.i. et $0^+\{f \leq r\} = \{f \leq r\}$ pour tout $r > 0$.

Donc, d'aprés la formule 3.2, $C_f = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} \{f \leq r\} = (\mathbb{R}_+{}^* \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$. Ici C_f est un cône convexe qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

2) L'inclusion

$$C_f \subset \{f_\infty \leq 0\}$$

peut être stricte, même pour des fonctions quasiconvexes s.c.i.. Pour le voir, prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 1$, $f(x) = \ln(x)$ si $x > 1$. On a alors $\{f_\infty \leq 0\} = \mathbb{R}$ et $C_f =]-\infty, 0]$.

Proposition 3.2. *Lorsque f est convexe C_f coïncide avec l'ensemble*

$$B_f := \{y \in X : \exists x \in \operatorname{dom} f : f(x + \lambda y) \leq f(x), \forall \lambda \geq 0\}.$$

P r e u v e. Il est immédiat que l'inclusion $B_f \subset C_f$ a toujours lieu. Inversement, soit $y \in C_f$; il existe alors (x, r) dans $X \times \mathbb{R}$ vérifiant $f(x + \lambda y) \leq r$ pour tout $\lambda \geq 0$. Soit $\beta \geq 0$. Pour tout $\lambda > \beta$, on a

$$f(x + \beta y) = f\left(\frac{\beta}{\lambda}(x + \lambda y) + (1 - \frac{\beta}{\lambda})x\right) \leq \frac{\beta}{\lambda} r + (1 - \frac{\beta}{\lambda}) f(x).$$

En faisant tendre λ vers $+\infty$ on obtient $f(x + \beta y) \leq f(x)$. Ceci étant vrai pour tout $\beta \geq 0$, on a donc $y \in B_f$. $\square$

Remarques 3.2. Lorsque f est quasiconvexe, l'inclusion $B_f \subset C_f$ peut être stricte. Pour le voir, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{-x}$. On a facilement $B_f = \ ]-\infty, 0] \neq C_f = \mathbb{R}$.

4. Semicontinuité inférieure et exactitude de la somme en niveaux de deux fonctions quasiconvexes s.c.i. Avant d'établir un résultat concernant l'exactitude et la semicontinuité inférieure de la somme en niveaux, intéressons nous au cas particulier où l'espace X est de dimension un ($X = \mathbb{R}$). On a alors le résultat suivant

Théorème 4.1. *La somme en niveaux de deux fonctions quasiconvexes s.c.i. définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est toujours s.c.i.*

La preuve résulte de la relation (voir [23, proposition 2.3]) :

$$\{f \Delta g \leq r\} = \bigcap_{s>r} (\{f \leq s\} + \{g \leq s\}), \tag{4.1}$$

et du lemme suivant:

Lemme 4.1. *La somme de deux convexes fermés de $\mathbb{R}$ est toujours convexe fermée.*

Preuve. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, et la somme de deux intervalles fermés est un intervalle fermé.

Remarques 4.1. Dans le théorème 4.1, l'exactitude de $f\Delta g$ n'a pas toujours lieu comme l'indique l'exemple suivant: $f(x) = 0, g(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors $f\Delta g(x) = 0$ pour tout $x \in X$, et $f\Delta g$ n'est pas exacte.

Le théorème suivant nous donne l'exactitude et la semicontinuité inférieure de la somme en niveaux de deux fonctions quasiconvexes s.c.i., sous une condition faisant intervenir les directions de majoration de ces fonctions.

Théorème 4.2. *Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions quasiconvexes s.c.i. Supposons que*

$$C_f \cap -C_g = \{0\}. \tag{4.2}$$

Alors $f\Delta g$ est quasiconvexe, s.c.i. et exacte.

Preuve. Pour démontrer la semicontinuité inférieure de $f\Delta g$, et vu la formule 4.1, il suffit de démontrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{f \leq s\} + \{g \leq s\}$ est fermé. Soit alors $s \in \mathbb{R}$ tel que les ensembles $\{f \leq s\}$ et $\{g \leq s\}$ soient non vides. La condition (4.2) et la relation (3.2) entraînent que $0^+\{f \leq s\} \cap -0^+\{g \leq s\} = \{0\}$. D'aprés le critère de fermeture de Dieudonné ([11]), $\{f \leq s\} + \{g \leq s\}$ est alors fermé pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que $f\Delta g$ est exacte. Soit $x \in X$; considérons la fonction h définie de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$h(u) := f(u) \vee g(x-u) \text{ pour tout } u \in X.$$

Si $h \equiv +\infty$, le résultat est évident. Sinon, il est facile de vérifier que la fonction h est quasiconvexe, s.c.i., et que pour tout $r \in \mathbb{R}$ on a $\{h \leq r\} = \{f \leq r\} \cap (x - \{g \leq r\})$; on sait alors [20, corollaire 8.3.3] que $0^+\{h \leq r\} = 0^+\{f \leq r\} \cap -0^+\{g \leq r\} = \{0\}$ pour tout $r > \inf_X h$. La fonction h est donc inf-compacte, et atteint alors sa borne inférieure. $\square$

Remarques 4.2.

1)Le résultat du théorème 4.1 est de caractère global. Pour la semicontinuité inférieure et l'exactitude d'une fonction marginale en un point donné, il existe des résultats généraux avec d'autres conditions. Voir par exemple [3], [12], [19] etc.

2) Dans [22, théorème 3.1], la condition qui assure la semicontinuité inférieure et l'exactitude de la somme en niveaux de deux fonctions convexes s.c.i. est

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap -\{g0^+ \leq 0\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } X.$$

Par contre dans le théorème 4.2, la condition (4.2) ne peut être remplacée par la condition

$$C_f \cap -C_g \quad \text{est un sous-espace vectoriel de } X.$$

Considérons en effet les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,0) = -\dfrac{1}{1+ \mid x \mid}$, $f(x,y) = +\infty$ si $y \neq 0$; $g(x,y) = -1$ si $(x,y) \in A$, et $g(x,y) = 1$ sinon, où $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \quad \text{et} \quad y \geq \dfrac{1}{x}\right\}$. On a que $C_f \cap -C_g = \mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, alors que $\{f\Delta g \leq 0\} = A + \mathbb{R} \times \{0\} = \mathbb{R} \times {\mathbb{R}^*}_+$ n'est pas fermé.

3) Le même exemple que ci-dessus montre que la condition

$$B_f \cap -B_g = \{0\}$$

où B_f (resp B_g) est l'ensemble définie dans la proposition 3.2, ne suffit pas non plus, pour que le théorème 4.2 reste vrai. En effet, il est facile de vérifier que $B_f = \{(0,0)\}$ et $B_g = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, donc $B_f \cap -B_g = \{(0,0)\}$, alors que $f\Delta g$ n'est pas s.c.i.

4) La condition (4.2) est en fait équivalente à la condition :

$$\text{Pour tout} \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \{f \leq r\} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \{g \leq r\} \neq \emptyset$$

$$0^+\{f \leq r\} \cap -0^+\{g \leq r\} = \{0\}.$$

Il est alors naturel de se demander si l'existence d'un réel r vérifiant ces conditions est suffisante pour que le théorème 4.2 reste vrai. La réponse est négative. En effet, si nous reprenons l'exemple précédent, on a, pour $r = -1$,

$\{f\leq -1\}=\{(0,0)\}$ et $\{g\leq -1\}=A$. De sorte que $0^+\{f\leq -1\}\cap -0^+\{g\leq -1\}=\{(0,0)\}$, alors que $f\Delta g$ n'est pas s.c.i.

5. Epiconvergence de sommes en niveaux de fonctions quasiconvexes. L'étude de l'épiconvergence d'une suite de sommes en niveaux de fonctions quasiconvexes nécessite quelques préliminaires donnés sous forme de lemmes.
Rappelons que X désigne un espace vectoriel réel de dimension finie.

Lemme 5.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non bornée à valeurs dans X. Il existe alors une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite de réels positifs $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, telles que la suite $(\varepsilon_k x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément non nul de X.*

P r e u v e. Soit $||.||$ une norme sur X. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments non nuls. La suite $\left(\dfrac{x_{n_i}}{||x_{n_i}||}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente, soit $\left(\dfrac{x_{n_{ik}}}{\|x_{n_{ik}}\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. En posant alors $\varepsilon_k=\dfrac{1}{\|x_{n_{ik}}\|}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on voit que la suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0, et que la suite $(\varepsilon_k x_{n_{ik}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de norme égale à 1. □

Lemme 5.2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de convexes de X telle que*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Supposons qu'il existe une suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et une suite $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, de réels positifs tendant vers 0 telles que

$$a_{n_k}\in A_{n_k}\quad \textit{pour tout } k\in\mathbb{N}\quad \textit{et}\quad \lim_{k\to+\infty}\varepsilon_{n_k}a_{n_k}=a.$$

Alors, pour toute partie convexe fermée A de X telle que

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n\subset A$$

on a

$$a\in 0^+A.$$

P r e u v e. A étant convexe fermé, pour démontrer que $a \in 0^+A$, il suffit de démontrer que pour un certain $u \in A$, $u + \lambda a$ est dans A pour tout $\lambda > 0$. Prenons $u \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$. Il existe alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$. Soit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ la sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant à la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de l'hypothèse. Pour $\lambda > 0$, la suite $(\lambda\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0. Il existe alors $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \lambda\varepsilon_{n_k} \leq 1$, pour tout $k \geq \overline{k}$. Puisque les A_{n_k} sont convexes, on a

$$y_{n_k} := u_{n_k} + \lambda\varepsilon_{n_k}(a_{n_k} - u_{n_k}) \in A_{n_k} \quad \forall k \geq \overline{k}.$$

Or, $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = u + \lambda a$. Donc $u + \lambda a \in \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n \subset A$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda > 0$, on a bien $a \in 0^+A$. $\square$

Lemme 5.3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de sous ensembles de X. Supposons qu'il existe deux suites $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles convexes, et deux convexes fermés A, B de X tels que*

$$A_n \subset A'_n \ , \ B_n \subset B'_n \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\liminf_{n\to+\infty} A'_n \neq \emptyset, \ \liminf_{n\to+\infty} B'_n \neq \emptyset,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} A'_n \subset A, \ \limsup_{n\to+\infty} B'_n \subset B,$$

et

$$0^+A \cap -0^+B = \{0\}.$$

Alors

$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n + B_n) \subset \limsup_{n\to+\infty}(A_n) + \limsup_{n\to+\infty}(B_n).$$

P r e u v e. Soit $z \in \limsup\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n)$. Il existe deux suites $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A'_{n_k}$, $y_{n_k} \in B_{n_k} \subset B'_{n_k}$ et $z = \lim\limits_{k\to+\infty}(x_{n_k} + y_{n_k})$.

Supposons que l'une de ces deux suites n'est pas bornée, disons $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. D'aprés le lemme 5.1, il existe une sous-suite $(x_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers 0, et un élément non nul x de X tels que $\lim\limits_{i\to+\infty} \varepsilon_i x_{n_{k_i}} = x$.

On a alors $\lim_{i\to+\infty} \varepsilon_i y_{n_{k_i}} = -x$. Puisque $\limsup_{n\to+\infty} A'_n \subset A$ et $\limsup_{n\to+\infty} B'_n \subset B$, le lemme (5.2) nous donne alors $x \in 0^+A \cap -0^+B = \{0\}$, ce qui est impossible. Ainsi $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées et on peut en extraire deux sous-suites $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers u *et* v; il en résulte que

$$z = \lim_{j\to+\infty} (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) = u + v \in \limsup_{n\to+\infty} A_n + \limsup_{n\to+\infty} B_n. \qquad \square$$

Remarques 5.1. Avec les hypothèses du lemme 5.3, on peut avoir $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ ou $\liminf_{n\to+\infty} B_n$ vide. Le résultat reste vrai. Ce cas se présente d'ailleurs dans la preuve du théorème 5.1.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal concernant l'épi-convergence d'une suite de sommes en niveaux de fonctions quasiconvexes :

Théorème 5.1. *Soient f,g,f_n,g_n, ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions quasiconvexes definies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $f = e - \lim_{n\to+\infty} f_n$ et $g = e - \lim_{n\to+\infty} g_n$, avec* $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ *et* $\operatorname{dom} g \neq \emptyset$. *Supposons que*

$$C_f \cap -C_g = \{0\}.$$

Dans ces conditions la suite $(f_n \Delta g_n)_{n\in N}$ épiconverge vers la fonction $f\Delta g$.

P r e u v e. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrons que $\{f\Delta g < r\} \subset \liminf_{n\to+\infty} \{f_n \Delta g_n < r\}$. D'aprés le théorème 2.1, $\{f < r\} \subset \liminf_{n\to+\infty} \{f_n < r\}$ et $\{g < r\} \subset \liminf_{n\to+\infty} \{g_n < r\}$. Par ailleurs on a toujours

$$\liminf_{n\to+\infty} \{f_n < r\} + \liminf_{n\to+\infty} \{g_n < r\} \subset \liminf_{n\to+\infty} (\{f_n < r\} + \{g_n < r\}).$$

Donc

$$\{f\Delta g < r\} = \{f < r\} + \{g < r\} \subset \liminf_{n\to+\infty} \{f_n \Delta g_n < r\}.$$

Montrons maintenant que $\limsup_{n\to+\infty} \{f_n \Delta g_n < r\} \subset \{f\Delta g \leq r\}$.
En posant $t := \max(r, (\inf f \vee \inf g) + 1) \in \mathbb{R}$ on a, d'aprés le théorème 2.1,

$$\emptyset \neq \{f < t\} \subset \liminf_{n\to+\infty} \{f_n < t\}, \quad \emptyset \neq \{g < t\} \subset \liminf_{n\to+\infty} \{g_n < t\}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \{f_n < t\} \subset \{f \leq t\}, \quad \limsup_{n\to+\infty} \{g_n < t\} \subset \{g \leq t\}.$$

Vu que $C_f \cap -C_g = \{0\}$ on a en particulier $0^+\{f \leq t\} \cap -0^+\{g \leq t\} = \{0\}$. Puisque $\{f_n < r\} \subset \{f_n < t\}$ et $\{g_n < r\} \subset \{g_n < t\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme 5.3 nous donne alors $\limsup_{n\to+\infty}\{f_n \Delta g_n < r\} = \limsup_{n\to+\infty}(\{f_n < r\} + \{g_n < r\}) \subset \limsup_{n\to+\infty}\{f_n < r\} + \limsup_{n\to+\infty}\{g_n < r\}$.
Avec le théorème 2.1 on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\{f_n \Delta g_n < r\} \subset \{f \leq r\} + \{g \leq r\} \subset \{f \Delta g \leq r\},$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

6. Applications. Dans le cas où les fonctions sont convexes, on retrouve le résultat suivant dû à S. Traore et M. Volle [22, théorème 3.5] :

Corollaire 6.1. *Soit f, g, f_n, g_n, $(n \in \mathbb{N})$, des fonctions convexes de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que: $f = e - \lim_{n\to+\infty} f_n$, $g = e - \lim_{n\to+\infty} g_n$ avec f et g propres. Supposons que*

$$\{f0^+ \leq 0\} \cap -\{g0^+ \leq 0\} = \{0\}.$$

Alors

$$f\Delta g = e - \lim_{n\to+\infty}(f_n \Delta g_n).$$

P r e u v e. Résulte immédiatement du théorème 5.1 et de la relation (3.1). $\square$

Rappelons que l'inf-convolution de deux fonctions f et g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est la fonction $f\square g$ définie sur X par

$$(f\square g)(x) := \inf_{u\in X}\{f(u) + g(x-u)\}.$$

Le résultat suivant [18, théorème 4], concernant l'épiconvergence d'une suite d'inf-convolutions de fonctions convexes, peut aussi se déduire du théorème 5.1.

Corollaire 6.2. *Soit f, g, f_n, g_n, $(n \in \mathbb{N})$, des fonctions convexes définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que: $f = e - \lim_{n\to+\infty} f_n$, $g = e - \lim_{n\to+\infty} g_n$ avec f et g propres.*
Supposons que :

$$0^+(\operatorname{epi} f) \cap -0^+(epi g) = \{0\}. \tag{6.1}$$

Alors :

$$f \Box g = e - \lim_{n \to +\infty} (f_n \Box g_n).$$

P r e u v e. Considèrons les fonctions F, G, F_n, G_n, $(n \in \mathbb{N})$ définies sur $X \times \mathbb{R}$ par $F(x,r) = f(x) - r$; $G(x,r) = g(x) - r$; $F_n(x,r) = f_n(x) - r$ et $G_n(x,r) = g_n(x) - r$ pour tout (x,r) dans $X \times \mathbb{R}$.
Notons que ces fonctions sont convexes et que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\{F_n \leq s\} = \operatorname{epi}(f_n - s)$ et $\{G_n \leq s\} = \operatorname{epi}(g_n - s)$. Il résulte que $(\{F_n \leq s\})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\{G_n \leq s\})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\{F \leq s\} = \operatorname{epi}(f - s)$ et $\{G \leq s\} = \operatorname{epi}(g - s)$, ceci pour tout $s \in \mathbb{R}$. En particulier $F = e - \lim_{n \to +\infty} F_n$ et $G = e - \lim_{n \to +\infty} G_n$. De plus, les relations $\{F \leq s\} = \operatorname{epi}(f - s)$, $\{G \leq s\} = \operatorname{epi}(g - s)$ entraînent, avec la condition (6.1), que $0^+\{F \leq s\} \cap -0^+\{G \leq s\} = \{0\}$ pour tout $s > \inf_{X \times \mathbb{R}} F \Delta G$ et donc que $C_F \cap -C_G = \{0\}$. D'aprés le théorème 5.1 on a alors $F \Delta G = e - \lim_{n \to +\infty} (F_n \Delta G_n)$. On a par ailleurs (cf [4]) $(F_n \Delta G_n)(x,r) = \frac{1}{2}(f_n \Box g_n)(x) - \frac{1}{2} r$ et $(F \Delta G)(x,r) = \frac{1}{2}(f \Box g)(x) - \frac{1}{2} r$ pour tout $(x,r) \in X \times \mathbb{R}$. On en déduit facilement que $(f_n \Box g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ épiconverge vers $f \Box g$. $\Box$

Considérons maintenant le cas des fonctions marginales quasiconvexes générales. On désigne par Z un autre espace de dimension finie. On déduit du théorème 5.1 le résultat suivant :

Corollaire 6.3. *Soient F, F_n $(n \in \mathbb{N})$, des fonctions quasiconvexes définies sur $X \times Z$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $F = e - \lim_{n \to +\infty} F_n$ et* $\operatorname{dom} F \neq \emptyset$. *Supposons que*

$$\{x \in X : (x,0) \in C_F\} = \{0\}. \tag{6.2}$$

Alors la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions quasiconvexes définies sur Z par $m_n(z) := \inf_{x \in X} F_n(x,z)$ épiconverge vers m, définie par $m(z) := \inf_{x \in X} F(x,z)$; en particulier m est s.c.i. et, de plus, exacte.

P r e u v e. Soit Ψ la fonction définie sur $X \times Z$ par $\Psi(x,z) = +\infty$ si $z \neq 0$ et $\Psi(x,0) = -\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in Z$ on a $m_n(z) = \inf_{(x,u) \in X \times Z} (F_n(x,u) \vee \Psi(-x, z-u))$, autrement dit $m_n = F_n \Delta \Psi(0,.)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part il est facile de voir que la condition (6.2) est équivalente à la condition $C_F \cap -C_\Psi = C_F \cap X \times \{0\} = \{(0,0)\}$. D'aprés le théorème 5.1, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ épiconverge donc vers $m = F\Delta\chi_{X\times\{0\}}(0,.)$; de plus m est s.c.i. et exacte sur Z. $\square$

Lorsque, dans le corollaire 6.3, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 6.4. *Soit F une fonction quasiconvexe s.c.i. définie sur $X \times Z$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Supposons que*

$$\{x \in X : (x, 0) \in C_F\} = \{0\}. \tag{6.3}$$

Alors la fonction marginale m associée à F est s.c.i. et exacte sur Z.

Remarques 6.1. Le corollaire 6.4 améliore, dans le cas quasiconvexe, le résultat de C. Zalinescu, qui suppose que $\forall x \neq 0 \quad F_\infty(0, x) > 0$ [26, théorème 3.2], en effet, et comme l'indique l'exemple 3.1 (2), l'inclusion $C_F \subset \{F_\infty \leq 0\}$ peut être stricte.

Pour terminer considérons le cas des fonctions images. Etant donnée une application linéaire $A : X \longrightarrow Z$ on désigne par $\mathrm{Gr}\,A := \{(x, z)\in X\times Z : A(x)= z\}$ et $\mathrm{Im}\,A := \{z \in Z : \exists x \in X : A(x) = z\}$ respectivement le graphe et l'image de A. En présence d'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on désigne par $(Af)(z) := \inf(f(x) : A(x) = z), (z \in Z)$ la fonction image de f par A, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Si f est quasiconvexe Af l'est aussi. Concernant l'épiconvergence des fonctions images quasiconvexes on peut énoncer:

Corollaire 6.5. *Soient $f, f_n(n \in \mathbb{N}) : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions quasiconvexes telles que $f = e - \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ avec $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$, et soient $A, A_n : X \longrightarrow Z$ $(n \in \mathbb{N})$ des applications linéaires telles que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A. Supposons que*

$$\mathrm{Ker}\, A \cap C_f = \{0\}.$$

Dans ces conditions la suite $(A_nf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ épiconverge vers la fonction Af; en particulier Af est s.c.i. et, de plus, exacte en tout point de $\mathrm{Im}\,A$.

P r e u v e. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in Z$ on a $A_nf_n(z) = \inf_{x\in X}(f_n(x) + \delta_{\{z\}}oA_n(x))$. Les fonctions F_n définies sur $X \times Z$ par $F_n(x, z) = f_n(x) + \delta_{\{z\}}oA_n(x)$ sont quasiconvexes et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ épiconverge vers la fonction F définie sur $X \times Z$ par $F(x, z) = f(x) + \delta_{\{z\}}oA(x)$. En effet, la quasiconvexité découle immédiatement des relations $\{F_n < r\} = Gr(A_n) \cap$

$(\{f_n < r\} \times Z)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Pour l'épiconvergence, montrons d'abord que $\limsup\limits_{n\to+\infty}\{F_n < r\} \subset \{F \leq r\}$. Pour cela prenons $(x,z) \in \limsup\limits_{n\to+\infty}\{F_n < r\}$. Il existe alors une suite $(x_{n_k}, z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(x_{n_k}, z_{n_k}) \in \{F_{n_k} < r\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}(x_{n_k}, z_{n_k}) = (x,z)$. On a donc $A_{n_k}x_{n_k} = z_{n_k}$ et $x_{n_k} \in \{f_{n_k} < r\}$. Mais $A_{n_k}x_{n_k}$ converge vers $Ax = z$ et, d'aprés le théorème 2.1, $x \in \limsup\limits_{n\to+\infty}\{f_n<r\} \subset \{f \leq r\}$, d'où $(x,z) \in \{F \leq r\}$.
Montrons maintenant que $\{F < r\} \subset \liminf\limits_{n\to+\infty}\{F_n < r\}$.
Pour $(x,z) \in \{F < r\}$ on a $(x,z) \in GrA$ et $x \in \{f < r\} \subset \liminf\limits_{n\to+\infty}\{f_n < r\}$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in \{f_n < r\}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. En posant $z_n = Ax_n$ on a que la suite (z_n) converge vers $Ax = z$, donc $(x,z) \in \liminf\limits_{n\to+\infty}\{F_n < r\}$. L'épiconvergence découle alors du théorème 2.1. Enfin, les relations $\{F \leq r\} = GrA \cap (\{f \leq r\} \times Z)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, entraînent que $C_F = GrA \cap (C_f \times Z)$ et donc que $\{x \in X : (x,0) \in C_F\} = KerA \cap C_f = \{0\}$. Le corollaire 6.3 permet alors de conclure. $\square$

REFERENCES

[1] H. Attouch. Variational Convergence for Functions and Operators. Pitman, London, 1984.

[2] H. Attouch, M. Volle. Cutting and scanning methods in set-valued analysis I. An epigraphical and graphical calculus. *Set-Valued Anal.* **4** (1996), 135-155.

[3] A. Auslender. Noncoercive optimization problems. *Math. Oper. Res.* **21**, *4* (1996), 769-789.

[4] D. Aze, M. Volle. A stability result in quasiconvex programming. *J. Optim. Theory Appl.* **67**, *1* (1990), 175-184.

[5] C. Baiocchi, G. Buttazzo, F. Gastaldi, F. Tomarelli. General existence theorems for unilateral problems in continum mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **100** (1988), 149-189.

[6] G. Beer, R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets. A characterization of epi-convergence in terms of convergence of level sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* **116**, *3* (1992), 753-761.

[7] J. P. Crouzeix. Contribution à l'étude des fonctions quasiconvexes. Thèse d'etat, Université de Clermont-Ferrand II, 1977.

[8] G. Dal Maso. An introduction to Γ-convergence. Birkhäuser, 1993.

[9] J. P. Dedieu. Cône asymptote d'un ensemble non convexe. Application à l'optimisation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **285** (1977), 501-503.

[10] J. P. Dedieu. Critères de fermeture d'un fermé non convexe par une multiapplication. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **287** (1978), 941-943.

[11] J. Dieudonné. Sur la séparation des ensembles convexes. *Math. Ann.* **163** (1966), 1-3.

[12] S. Dolecki. Lower semicontinuity for marginal functions. In: Proc. Symp. Oper. Res., Karlsruhe 1983: selected topics in operations research and mathematical economics (Eds. G. Hammer, D. Pallaschke). Lect. Notes in Economics and Math. Systems, vol. **226**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[13] D. T. Luc. Recessively compact sets: Properties and uses. Institute of Mathematics, Hanoi – Vietnam, 1996.

[14] D. T. Luc, J.-P. Penot. Convergence of asymptotic directions. Preprint, University of Pau, 1995.

[15] D. T. Luc, M. Volle. Level sets under infimal convolution and level addition. *J. Optim. Theory Appl.* **94**, *3* (1997) (to appear)

[16] R. Lucchetti. On the continuity of the minima for a family of constrained optimization problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **7-4** (1984-1985), 349-362.

[17] K. Kuratowski. Topology. Academic Press, New York, 1968.

[18] Mc. Linden, R. C. Bergstrom. Preservation of convergence of sets and functions in finite dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **268** (1981), 127-142.

[19] J. P. Penot. Continuity properties of performance functions. In: Optim. Theo. Algorithms, (Eds. J. B. Hiriart-Urruty, W. Oettli, J. Stoer), M. Dekker, New York, 1983.

[20] R. T. Rockafellar. Convex Analysis. Princeton, 1970.

[21] A. Seeger, M. Volle. On a convolution operation obtained by adding level sets: classical and new results. *Oper. Res.* **29**, *2* (1995), 131-154.

[22] S. Traore, M. Volle. Epiconvergence d'une suite de somme en niveaux de fonctions convexes. *Serdica Math. J.* **22** (1996), 293-306.

[23] S. Traore, M. Volle. Subdifferentiability, lower semicontinuity and exactness of the level sum of two convex functions on locally convex spaces. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, vol. **429**, 1995, 346-356.

[24] S. Traore, M. Volle. On the level sum of two convex functions in Banach spaces. *J. Convex Anal.* **3**, *1* (1996), 141-151.

[25] M. Volle. Convergence en niveaux et en épigraphes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **229**, *8* (1984), 295-298.

[26] C. Zalinescu. Stability for a class of nonlinear optimization problems and applications. In: Nonsmooth Optimization and Related Topics, (Eds. F. H. Clarke, V. F. Dem'yanov, F. Giannessi), Plenum Press, 1989, 437-458.

Univérsité d'Avignon
Faculté des Sciences
Département de mathématiques
33, rue Louis Pasteur
84000 Avignon
France

Received May 16, 1997