Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **28** (2002), 201-206

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

CARACTÉRISATION DES ESPACES 1-MATRICIELLEMENT NORMÉS

Christian Le Merdy, Lahcène Mezrag

Communicated by L. Tzafriri

Abstract. Let X be a closed subspace of $B(H)$ for some Hilbert space H. In [9], Pisier introduced $S_p\,[X]$ $(1 \le p \le +\infty)$ by setting $S_p\,[X] = (S_\infty\,[X], S_1\,[X])_\theta$, (where $\theta = \dfrac{1}{p}$, $S_\infty\,[X] = S_\infty \underset{\min}{\otimes} X$ and $S_1\,[X] = S_1 \overset{\wedge}{\otimes} X$) and showed that there are $p-$matricially normed spaces. In this paper we prove that conversely, if X is a $p-$matricially normed space with $p = 1$, then there is an operator structure on X, such that $M_n^1\,(X) = S_1^n\,[X]$ where $S_1^n\,[X]$ is the finite dimentional version of $S_1\,[X]$. For $p \neq 1$, we have no answer.

1. Les espaces p-matriciellement normés. On commencera cette partie par donner un aperçu général sur les espaces $p-$matriciellement normés et définir les espaces $S_p\,[X]$ introduits par Pisier dans [9].

Soit H un espace de Hilbert et $B\,(H)$ la $C^\star-$algèbre non commutative des opérateurs linéaires bornés de H dans H. Soit $X \subset B\,(H)$ un sous espace

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46B28, 46B32, 46M05.
Key words: Espace d'opérateurs, espace p-matriciellement normé, opérateur complètement borné.

fermé et $n \in \mathbb{N}$, on note par $M_n(X)$ l'espace des matrices $(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$muni de la norme induite par $M_n(B(H)) = B(l_2^n(H)) = B(l_2^n \otimes_2 H)$ ($l_2^n \otimes_2 H$ est l'espace de Hilbert produit tensoriel de l_2^n et H). Si $X = \mathbb{C}$ on note simplement $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = B(l_2^n)$ par M_n. On note par $M_n \otimes X$ le produit tensoriel algébrique de M_n par X

$$\begin{aligned} M_n \otimes X &= \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes x_{ij},\ x_{ij} \in X,\ e_{ij}= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\,. \end{aligned}$$

Définition 1.1. *Un espace d'opérateurs X est un sous espace fermé d'un $B(H)$ pour un espace de Hilbert H.*

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On appelle maintenant une p-structure matricielle sur un espace vectoriel X la donnée d'une suite de normes $\{\|.\|_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\|.\|_n$ est une norme sur $M_n \otimes X$ vérifiant:

(i) $\begin{cases} \forall n \geq 1,\ \forall x \in M_n \otimes X,\ \forall a,b \in M_n \\ \|axb\|_n \leq \|a\|_{M_n} \|x\|_n \|b\|_{M_n} \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \forall n,m \geq 1,\ \forall x \in M_n \otimes X,\ \forall y \in M_m \otimes X \\ \|x \oplus y\|_{n+m} = \begin{cases} (\|x\|_n^p + \|y\|_m^p)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\} & \text{si } p = +\infty \end{cases} \end{cases}$

où

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

On dira que X est p-matriciellement normé s'il est muni d'une p-structure matricielle (qu'on suppose complète). On note par (X, M_n^p) cet espace si p est fini et (X, M_n) si p est infini. Ruan a montré dans [10, Théorème 3.1 p. 221] et simplifié dans [6, Théorème A p. 580] que pour toute $\infty-$structure matricielle sur X il existe une unique structure d'espace d'opérateurs sur X (i.e. $X \subset B(H)$) telle que pour tout $n \geq 1$, $(M_n \otimes X, \|.\|_n)$ s'identifie isométriquement à $M_n(X)$ muni de la norme induite par $B(l_2^n(H))$.

Définition 1.2. *Soient H, K deux espaces de Hilbert, $X \subset B(H)$ et $Y \subset B(K)$ deux espaces d'opérateurs. Un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$ est dit complètement borné (c.b) s'il existe une constante C positive telle que*

$$\begin{array}{llcl} \forall n \geq 1,\ u_n & : & M_n(X) & \longrightarrow & M_n(Y) \\ & & (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} & \longmapsto & (u(x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \end{array}$$

on a, $\|u_n\| \leq C$.

Dans ce cas on pose, $\|u\|_{cb} = \sup\limits_{n\geq 1} \|u_n\|$ et on note par $cb\,(X,Y)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs complètement bornés de X dans Y qui est lui aussi un espace d'opérateurs [3, 5] ($M_n(cb(X,Y)) = cb(X, M_n(Y))$). En particulier, on peut munir le dual $X^\star = cb(X,\mathbb{C})$ d'une structure d'espace d'opérateurs en posant

$$M_n(X^\star) = cb\,(X, M_n)\,.$$

On note aussi le produit tensoriel minimal de X et Y par $X \otimes_{\min} Y$ qui est le sous espace de $B\,(H \otimes_2 K)$ muni de la norme induite.

On va maintenant définir les espaces $S_p\,[X]$. Soit H un espace de Hilbert. On note par $S_p\,(H)$ ($1 \leq p < \infty$) l'espace des opérateurs compacts $u : H \longrightarrow H$ tels que $Tr(|u|^p) < \infty$, muni de la norme $\|u\|_{S_p(H)} = (Tr(|u|^p))^{\frac{1}{p}}$.
Si $H = l_2$ (resp. l_2^n), on note simplement $S_p\,(l_2)$ par S_p (resp. $S_p\,(l_2^n)$ par S_p^n) et $S_\infty\,(H)$ (resp. S_∞) l'espace des opérateurs compacts muni de la norme induite par $B(H)$ (resp. $B(l_2)$) ($S_\infty^n = B(l_2^n)$). Rappelons aussi que si $ds\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ ($1 \leq p,q,r < \infty$), alors $u \in B_{S_p(H)}$ si et seulement s'il existe $u_1 \in B_{S_q(H)}$ et $u_2 \in B_{S_r(H)}$ tels que $u = u_1 u_2$.
Soit maintenant $X \subset B(H)$ un espace d'opérateurs. On définit $S_\infty\,[X]$ comme étant le produit tensoriel minimal de S_∞ et X (i.e. le sous espace de $B(l_2 \otimes_2 H)$ muni de la norme induite) et $S_1\,[X]$ le completé du produit tensoriel projectif de S_1 et X (pour plus de détails sur le produit tensoriel projectif voir [3] et [5]).

Définition 1.3. *Soit* $1 \leq p < \infty$. *On définit*

$$S_p\,[X] = (S_\infty\,[X]\,, S_1\,[X])_\theta$$

où $\theta = \dfrac{1}{p}$.

$S_p\,[X]$ est un espace d'opérateurs d'après [8] et on a pour $1 < p \leq \infty$

$$(S_p\,[X])^\star = S_q\,[X^\star] \tag{1.1}$$

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Le théorème suivant dû à Pisier [9, Théorème 1.5] permet de calculer la norme dans $S_p\,[X]$ (resp. $S_p^n\,[X]$) en le regardant comme étant un sous espace de $M_\infty\,(X)$ (resp. $M_n\,(X)$).

Théorème 1.4. *Soient $1 \leq p < \infty$ et u dans $S_p[X]$ (resp. $S_p^n[X]$). Alors,*

$$\|u\|_{S_p[X]} = \inf_{u=avb}\{ \|a\|_{S_{2p}} \|v\|_{M_\infty(X)} \|b\|_{S_{2p}} \} \tag{1.2}$$

$$(\text{resp. } \|u\|_{S_p^n[X]} = \inf_{u=avb}\{ \|a\|_{S_{2p}^n} \|v\|_{M_n(X)} \|b\|_{S_{2p}^n} \}) \tag{1.3}$$

où

$$M_\infty(X) = \left\{ u = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq\infty} \text{ tel que pour tout } n,\ \left\|(u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\right\|_{M_n(X)} \leq K \right\}$$

et

$$\left\|(u_{ij})_{1\leq i,j\leq\infty}\right\|_{M_\infty(X)} = \inf K$$

qui est un sous espace de $B(l_2 \otimes_2 H)$.

2. Caractérisation des espaces 1-matriciellement normés.

Dans cette partie on présente le résultat principal de ce papier qui est la caractérisation des espaces $1-$matriciellement normés.

Soit (X, M_n^1) un espace $1-$matriciellement normé. Normons les espaces $M_n \otimes X^\star$ en posant

$$M_n(X^\star) = \left(M_n^1(X)\right)^\star \tag{2.1}$$

pour la dualité

$$\left\langle (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, (y_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \right\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} \langle x_{ij}, y_{ij} \rangle .$$

D'après [10, Théorème 5.1] $X^\star$ est $\infty-$matriciellement normé est donc un espace d'opérateurs. Soit $X^{\star\star}$ le dual de $X^\star$ muni de la stucture d'espace d'opérateurs duale [2] et X muni de la structure induite par celle de $X^{\star\star}$.

Théorème 2.1. *Soit (X, M_n^1) un espace $1-$matriciellement normé et (X, M_n) l'espace d'opérateurs associé comme ce qui précède. Alors,*

$$\|x\|_{M_n(X)} = \sup\left\{ \|axb\|_{M_n^1(X)} ;\ (a,b) \in B^2_{S_2^n} \right\} \tag{2.2}$$

et

$$\|x\|_{M_n^1(X)} = \inf\left\{ \|a\|_{S_2^n} \|y\|_{M_n(X)} \|b\|_{S_2^n} ;\ x = ayb \right\} . \tag{2.3}$$

P r e u v e. D'après [7, Théorème 3.1] $(M_n(X))^\star = S_1^n[X^\star]$, donc on a

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_{M_n(X)} & = & \sup\left\{|\langle x,\xi\rangle|\,;\ \|\xi\|_{S_1^n[X^\star]}\le 1\right\} \\ \text{(d'après (2.2))} & = & \sup\left\{|\langle x,ayb\rangle|\,;\ (a,b)\in B^2_{S_2^n} \text{ et } y\in B_{M_n(X^\star)}\right\} \\ & = & \sup\left\{\left|\left\langle a^t x b^t, y\right\rangle\right|\,;\ (a,b)\in B^2_{S_2^n} \text{ et } y\in B_{M_n(X^\star)}\right\} \\ \text{(d'après (2.1))} & = & \sup\left\{\left\|a^t x b^t\right\|_{M_n^1(X)}\,;\ (a,b)\in B^2_{S_2^n}\right\} \\ & = & \sup\left\{\|axb\|_{M_n^1(X)}\,;\ (a,b)\in B^2_{S_2^n}\right\}. \end{array}$$

Pour la deuxième égalité, on a

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_{M_n^1(X)} & = & \sup\left\{|\langle x,\xi\rangle|\,;\, \xi\in B_{M_n^1(X)^\star}\right\} \\ \text{(d'après (2.1))} & = & \sup\left\{|\langle x,\xi\rangle|\,;\, \xi\in B_{M_n(X^\star)}\right\} \\ \text{(d'après (1.1))} & = & \|x\|_{S_1^n[X]} \\ \text{(d'après (1.3))} & = & \inf\left\{\|a\|_{S_2^n}\,\|y\|_{M_n(X)}\,\|b\|_{S_2^n}\,;\, x=ayb\right\}. \end{array}$$ □

Corollaire 2.2. *Soit* (X, M_n^1) *un espace* $1-$*matriciellement normé. Alors il existe une structure d'espace d'opérateurs sur* X *telle que*

$$M_n^1(X) = S_1^n[X].$$

P r e u v e. Elle est évidente d'après les égalités (1.2) et (1.3). □

Remarque 2.3. Si la caractérisation est vraie pour $1\le p\le 2$, alors elle est vraie pour tout p, $1\le p<\infty$. En effet, soit X un espace $q-$matriciellement normé pour $2\le q<\infty$. S'il existe une structure d'espace d'opérateurs sur $X^\star$ telle que

$$M_n^{q^\star}(X^\star) = S_{q^\star}^n[X^\star]$$

on aura alors par dualité d'après [9] et [10]

$$M_n^q(X) = S_q^n[X].$$

La question qu'on se pose maintenant et qui généralise notre travail est la suivante:
Soit (X, M_n^p) un espace $p-$matriciellement normé pour $1\le p<\infty$. On pose

$$\|x\|_{M_n(X)} = \sup\left\{\|axb\|_{M_n^p(X)}\,;\ (a,b)\in B^2_{S_{2p}^n}\right\}.$$

Est ce que (X, M_n) est un espace d'opérateurs et

$$\|x\|_{M_n^p(X)} = \inf\left\{\|a\|_{S_{2p}^n}\,\|y\|_{M_n(X)}\,\|b\|_{S_{2p}^n}\,;\,x = ayb\right\}?$$

REFERENCES

[1] D. Blecher. Tensor products of operator spaces II. *Canad. J. Math.* **44** (1992), 75–90.

[2] D. Blecher. The standard dual of an operator space. *Pacific J. Math.* **153** (1992), 15–30.

[3] D. Blecher, V. Paulsen. Tensor products of operator spaces. *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 262–292.

[4] E. Effros, Z. J. Ruan. On matricially normed spaces. *Pacific J. Math.* **132** (1988), 243–264.

[5] E. Effros, Z. J. Ruan. A new approch to operator spaces. *Canad. Math. Bull.* **34** (1991), 329–337.

[6] E. Effros, Z. J. Ruan. On the abstract characterization of operator spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **119** (1993), 579–584.

[7] C. Le Merdy. On the duality of operator spaces. *Canad. Math. Bull.* **38**, *3* (1995), 334–346.

[8] G. Pisier. The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms. *Mem. Amer. Math. Soc.* **122**, 585 (1996), 1–103.

[9] G. Pisier. Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps. *Astérisque* (Soc. Math. France) **247** (1998), 1–131.

[10] Z. J. Ruan. Subspaces of C^*-Algebras. *J. Func. Anal.* **76** (1988), 217–230.

Christian Le Merdy
Département de Mathématiques
Université de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex, France
e-mail: `lemerdy@math.univ-fcomte.fr`

Lahcène Mezrag
Département de Mathématiques
Université de M'sila
BP 166 M'sila 28003, Algérie
e-mail: `lmezrag@caramail.com`

Received April 1, 2002