Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **30** (2004), 103–110

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

FIBRÉS VECTORIELS SEMI-STABLES SUR UNE COURBE DE GENRE DEUX ET ASSOCIATION DES POINTS DANS L'ESPACE PROJECTIF

Cristian Anghel

Communicated by P. Pragacz

Abstract. The aim of this paper is to prove that a certain involution on the moduli space of stable bundles on a curve of genus two, can be viewed as a geometric operation on the corresponding set of points in projective space.

Introduction. Soit C une courbe lisse de genre deux, munie d'une theta caractéristique fixée, notée $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$. On désigne par $\mathcal{M}_r$ l'espace de modules des fibrés semi-stables E sur C de rang r, avec $\det E = \mathcal{K}^{\frac{r}{2}}$. Soit J la jacobienne de C. D'après [4], pour E générique dans $\mathcal{M}_r$, l'ensemble :

$$D_E := \{\alpha \in J \mid H^0(E \otimes \alpha) \neq 0\}$$

est un diviseur sur J, qui fait partie du système $|r\Theta|$ où Θ est le diviseur thêta de J associé à $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$. On obtient ainsi une application rationnelle

$$D : \mathcal{M}_r \dashrightarrow |r\Theta| = \mathbf{P}^{r^2-1} .$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 14D20, 14J60.
Key words: courbe projective, fibres semi-stables, association des points.

De plus, d'après [3], le groupe de Picard de $\mathcal{M}_r$ est engendré par la classe du diviseur $\Theta_{\mathcal{M}_r} := \{E \in \mathcal{M}_r \mid H^0(E) \neq 0\}$, et d'après [2], l'application D s'identifie à l'application rationnelle définie par le système linéaire $|\Theta_{\mathcal{M}_r}|$.Dans cet article nous proposons une méthode géométrique pour étudier l'application D. L'idée fondamentale est de présenter un fibré E générique dans $\mathcal{M}_r$ à l'aide d'une suite exacte

$$0 \to E \to \mathcal{K}(p)^r \to \oplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \to 0$$

où $\sum q_i$ est la trace sur C du diviseur D_E. Nous montrons que le fibré E est déterminé par la donnée du diviseur $\sum q_i$ sur C et de $2r$ points dans un espace projectif $\mathbf{P}_{r-1}$, puis que l'involution $E \mapsto \sigma^*(E^\vee \otimes \mathcal{K})$ (où σ est l'involution hyperelliptique de C) correspond à *l'association* des ensembles de $2r$ points dans $\mathbf{P}_{r-1}$ [5].

1. Description des fibres. Soit E un fibré de rang r sur C avec $\det E = \mathcal{K}^{\frac{r}{2}}$. Soient $p \in C$ fixé et $E^\vee$ le dual de E. Supposons $H^0(E(-p)) = 0$. Nous avons:

$$\deg(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) = 2r \quad \text{et} \quad \chi(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) = r\,.$$

Par dualité nous trouvons:

$$H^1(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p))^\vee \cong H^0(E(-p)) = 0$$

et par suite:

$$h^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) = \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{K}^\vee(-p), E^\vee) = r\,.$$

Posons $V_E := \mathrm{Hom}(E, \mathcal{K}(p))$. Pour tout fibré E sur C on a une application canonique:

$$v_E : E \to \mathcal{K}(p) \otimes V_E^\vee\,.$$

Lemme 1.1. *L'application v_E est un isomorphisme au-dessus d'un point q de C si et seulement si $\mathcal{O}_C(q-p) \notin D_E$.*

Démonstration. On peut supposer $H^0(E(-p)) = 0$ (sinon $\mathcal{O}_C(q-p)$ appartient à D_E quel que soit $q \in C$). Au-dessus de $q \in C$, le noyau de ${}^t v_E \otimes 1_{\mathcal{K}(p)}$: $V_E \to \mathcal{H}om(E, \mathcal{K}(p))$ s'identifie au sous-espace de $V_E = \mathrm{Hom}(E, \mathcal{K}(p))$ formé par les homomorphismes nuls en q, c'est-à-dire à $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{K}(p-q))$. Mais on a

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Hom}(E, \mathcal{K}(p-q) &= h^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p-q)) \\
&= h^1(E \otimes \mathcal{O}_C(q-p)) \ \text{ par dualité} \\
&= h^0(E \otimes \mathcal{O}_C(q-p)) \ \text{ car} \chi(E) = 0\,,
\end{aligned}$$

d'où le lemme. $\square$

Lemme 1.2. *Soit $E \in \mathcal{M}_r$ tel que $D_E \not\supset C_p$. Alors le conoyau de $v_E : E \to \mathcal{K}(p) \otimes V_E^\vee$ est de torsion, et on a* $\operatorname{div}(\det v_E) = i_p^* D_E \in |r(\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} + p)|$.

D é m o n s t r a t i o n. L'assertion sur le conoyau de v_E résulte du Lemme 1.1. Notons f, g les deux projections de $C \times C$ sur C. Soit $\mathcal{P}$ un fibré de Poincaré sur $C \times J$ et $\mathcal{P}_p$ son image réciproque sur $C \times C$ par le morphisme $(1_C, i_p)$. Par définition de D_E, pour toute résolution localement libre

$$0 \to L_1 \xrightarrow{u} L_0 \to \mathcal{R}^1 g_*(f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{P}_p^{-1}) \to 0 \ ,$$

on a : $i_p^* D_E = \operatorname{div}(\det u)$. Mais on a $\mathcal{P}_p \,|_{C \times \{x\}} = \mathcal{O}_C(x - p)$ et du fait que $\det u$ ne change pas si on remplace $\mathcal{P}_p$ par $\mathcal{P}_p \otimes g^* M$ avec $M \in \operatorname{Pic}(C)$, on peut prendre $\mathcal{P}_p = \mathcal{O}(\Delta - f^*[p])$, où Δ est la diagonale de $C \times C$. Soit d l'injection canonique de Δ dans $C \times C$; considérons sur $C \times C$ la suite exacte

$$0 \to f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \otimes \mathcal{O}(-\Delta) \to f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \to d_*(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \to 0 .$$

Par application de $\mathcal{R}g_*$, on trouve :

$$0 \to H^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_C \xrightarrow{u} E^\vee \otimes \mathcal{K}(p) \to \mathcal{R}^1 g_*(f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{P}_p^{-1}) \to 0$$

et donc $i_p^* D_E = \operatorname{div}(\det u) = \operatorname{div}(\det v_E)$. D'autre part $\det v_E$ est une section (non nulle) de $(\det E)^{-1} \otimes (\mathcal{K}(p))^{\otimes r} \cong \mathcal{K}^{\frac{r}{2}}(rp)$. $\square$

Remarque 1.3. La démonstration ci-dessus est la transcription en rang arbitraire de la démonstration du Lemme 4.2 de [1].

Ce lemme nous montre que l'application rationnelle D s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_r \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & & {|r\Theta|} \arrow[dl, "i_p^*"] \\
& {|r(\mathcal{K}^{1/2} + p)|} &
\end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{P}(E) = \operatorname{div}(\det v_E)$. Soit $Q = \sum_{i=1}^{2r} q_i$ un diviseur de $|r(K^{\frac{1}{2}} + p)|$ formé de $2r$ points distincts. Nous allons maintenant étudier la fibre de $\mathcal{P}$ au-dessus de Q.

Soit $E \in \mathcal{M}_r$ un fibré tel que $\operatorname{div}(\det v_E) = \sum q_i$. Alors E admet une présentation

$$0 \to E \xrightarrow{v_E} \mathcal{K}(p) \otimes_{\mathbf{C}} V_E^\vee \xrightarrow{\lambda} \oplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \to 0\,. \tag{1}$$

L'homomorphisme λ détermine $2r$ formes linéaires $L_1, \ldots, L_{2r}$ sur $V_E^\vee$, bien définies à un scalaire près, autrement dit $2r$ points de $\mathbf{P}(V_E)$; on associe ainsi à E une orbite du groupe $PGL(r)$ agissant diagonalement sur $(\mathbf{P}_{r-1})^{2r}$.**Lemme 1.4.** *Le point $(L_i) \in (\mathbf{P}_{r-1})^{2r}$ est semi-stable (pour l'action de $PGL(r)$).*

D é m o n s t r a t i o n. Posons $V = \mathbf{C}^r$ et considérons les L_i comme des vecteurs de V. D'après [5], une condition nécessaire et suffisante pour que (L_i) soit semi-stable est que pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, 2r\}$ la dimension du sous-espace $W \subset V$ engendré par $L_{i_1}, \ldots, L_{i_k}$ soit $\geq \frac{k}{2}$. Or on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & E & \to & \mathcal{K}(p) \otimes v^\vee & \xrightarrow{(L_i)} & \oplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F & \to & \mathcal{K}(p) \otimes W^\vee & \xrightarrow{(L_{i_j})} & \oplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}_{q_{i_j}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

avec $\operatorname{rang}(F) = \dim(W)$ et $\deg(F) = 3\dim(W) - k$. La semi-stabilité de E implique alors $k \geq 2\dim(W)$. $\square$On a donc construit un morphisme $L : \mathcal{P}^{-1}(Q) \to (\mathbf{P}_{r-1})^{2r}_{ss}/PGL(r)$. Inversement, soient $L_1, \ldots, L_{2r}$ des points de $\mathbf{P}_{r-1}$. On leur associe des homomorphismes (non nuls) $\widetilde{L}_i : \mathcal{K}(p)^r \to \mathcal{O}_{q_i}$, bien définis à un scalaire près; le noyau E de $\lambda = \oplus \widetilde{L}_i$, qui ne dépend que de la famille (L_i), est un fibré de rang r, de déterminant $\mathcal{K}^{\frac{r}{2}}$, qui s'insère dans une suite exacte

$$0 \to E \xrightarrow{i} \mathcal{K}(p)^r \xrightarrow{\lambda} \oplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \to 0\,. \tag{2}$$

Pour que l'homomorphisme i s'identifie à l'homomorphisme v_E de la suite exacte (1), il faut et il suffit qu'on ait $H^0(C, E(-p)) = 0$, c'est-à-dire que l'homomorphisme $H^0(\lambda) : H^0(\mathcal{K})^r \to \mathbf{C}^{2r}$ soit bijectif. Si c'est le cas, la suite exacte (2) montre qu'on a $\operatorname{div}\det v_E = Q$.

Alors, pour $t \in C$ générique, $\alpha := \mathcal{O}_C(t-p) \notin D_E$, d'après le lemme 1.1 et donc $H^0(E \otimes \alpha) = H^1(E \otimes \alpha) = 0$, a cause du fait que $deg(E) = r(g-1)$. Maintenant, le théorème 6.2 de [6] montre que E est semi-stable et evidemment appartient à $\mathcal{P}^{-1}(Q)$. En termes des points $L_i = (L_i^1, \dots, L_i^r)$ de $\mathbf{P}_{r-1}$, la condition sur $H^0(\lambda)$ s'explicite comme suit. Notons $\varphi : C \to \mathbf{P}_1$ le morphisme canonique, en choisissant le point à l'infini de $\mathbf{P}_1$ en dehors des q_i. Alors $H^0(\lambda)$ est donné par la matrice

$$\Delta(L) = \begin{pmatrix} L_1^1 & \dots & L_1^r & \varphi(q_1)L_1^1 & \dots & \varphi(q_1)L_1^r \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{2r}^1 & \dots & L_{2r}^r & \varphi(q_{2r})L_{2r}^1 & \dots & \varphi(q_{2r})L_{2r}^r \end{pmatrix}.$$

En conclusion:

Proposition 1.5. *Soit Q un diviseur dans $|r(\mathcal{K}^{1/2}+p)|$ formé de $2r$ points distincts. L'application $E \mapsto (L_i)$ définit un isomorphisme de la fibre $\mathcal{P}^{-1}(Q)$ sur l'ouvert du quotient $(\mathbf{P}_{r-1})^{2r}_{ss}/PGL(r)$ correspondant aux familles (L_i) telles que* $\det \Delta(L) = 0$. Soit maintenant σ l'involution canonique de C. Pour $E \in \mathcal{M}_r$, notons $\widetilde{E} := \sigma^*(E^\vee \otimes \mathcal{K})$. On a évidemment $\widetilde{E} \in \mathcal{M}_r$, de sorte que $\sim$ est une involution de $\mathcal{M}_r$.

Lemme 1.6. *Pour tout $E \in \mathcal{M}_r$ on a $D_E = D_{\widetilde{E}}$*

D é o m o n s t r a t i o n. Soient x, y des points de C. On a

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{O}_C(x-y) \in D_{\widetilde{E}} & \Longleftrightarrow & h^0(\widetilde{E}(x-y)) \neq 0 & \\ & \Longleftrightarrow & h^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(\sigma(x)-\sigma(y))) \neq 0 & \text{par application de } \sigma^* \\ & \Longleftrightarrow & h^1(E(\sigma(y)-\sigma(x))) \neq 0 & \text{par dualité} \\ & \Longleftrightarrow & h^0(E(\sigma(y)-\sigma(x))) \neq 0 & \text{car} \chi(E) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & h^0(E(x-y)) \neq 0 & \text{car} \sigma(y)-\sigma(x) \equiv x-y \\ & \Longleftrightarrow & \mathcal{O}_C(x-y) \in D_E\,. & \end{array}$$

Comme tout élément de J est de la forme $\mathcal{O}_C(x-y)$ pour x et y convenables, cela prouve le lemme. □

Par suite l'involution $\sim$ induit une involution de chaque fibre $\mathcal{P}^{-1}(Q)$ pour $Q \in |r(\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}+p)|$. Notre résultat principal est d'identifier cette involution à l'aide de l'isomorphisme défini dans la Proposition 1.5. Rappelons suivant [5] qu'étant donnés $2r$ points L_i dans un espace projectif $\mathbf{P}(V)$ on peut définir un nouvel ensemble de points, dit *associé*, de la manière suivante: on représente les points par des vecteurs $L_i \in V$; ils définissent une application $L : \mathbf{C}^{2r} \to V$, qu'on suppose surjective. Notant N le noyau de L, on obtient par transposition un homomorphisme $\mathbf{C}^{2r} \to N^\vee$ qui définit l'ensemble de points associés dans $\mathbf{P}(N^\vee)$. On vérifie que cette construction ne dépend pas des choix faits, et définit un automorphisme involutif de la variété quotient $(\mathbf{P}_{r-1})^{2r}_{ss}/PGL(r)$.

Théorème 1.7. *Soit Q un diviseur dans $|r(\mathcal{K}^{1/2}+p)|$ formé de $2r$ points distincts. Par l'isomorphisme $E \mapsto (L_i)$ défini dans la proposition, l'involution $E \mapsto \sigma^*(E^\vee \otimes \mathcal{K})$ de $\mathcal{P}^{-1}(Q)$ correspond à l'association des ensembles de points dans $(\mathbf{P}_{r-1})^{2r}_{ss}/PGL(r)$.*

D é m o n s t r a t i o n. A cause du Lemme 1.6, $\widetilde{E}$ a aussi une présentation du type (1):

$$0 \to \widetilde{E} \overset{v_{\tilde{E}}}{\to} \mathcal{K}(p) \otimes_{\mathbf{C}} \widetilde{V}^\vee \to \oplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \to 0\ , \tag{3}$$

où l'on a posé $\widetilde{V} := \mathrm{Hom}(\widetilde{E}, \mathcal{K}(p))$. Pour la suite, on va fixer $x_0 \in C$ tel que $x_0 \neq p$. Faisons le produit tensoriel de (1) par $\mathcal{O}_C(-x_0)$. On trouve :

$$0 \to E(-x_0) \to \mathcal{O}_C(p+\sigma(x_0)) \otimes V^\vee \to \oplus \mathcal{O}_{q_i} \to 0 \tag{4}$$

et les formes L_i qui définissent E peuvent etre vues en cohomologie:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(\mathcal{O}_C(p+\sigma(x_0))) \otimes V^\vee & \overset{\oplus L_i}{\to} & H^0(\oplus \mathcal{O}_{q_i}) & \to & H^1(E(-x_0)) & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \mathbf{C}^r & & \mathbf{C}^{2r} & & \mathbf{C}^r & & \end{array} \tag{5}$$

La condition $p \neq x_0$ assure les dimensions écrites et le fait que la suite est exacte. Prenons maintenant le dual de (4), tensorisons par $\mathcal{K}$ et appliquons σ^*. Nous trouvons :

$$0 \to \mathcal{O}_C(-\sigma(p)+\sigma(x_0)) \otimes \sigma^* V \to \widetilde{E}(\sigma(x_0)) \overset{h}{\to} \oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)} \to 0 \tag{6}$$

où $\sigma^* V := H^0(\widetilde{E}(\sigma(p)))$. La flèche h est définie par des formes linéaires L'_i sur les fibres de $\widetilde{E}(\sigma(x_0))$ en $\sigma(q_i)$. De même que pour (4), les L'_i peuvent etre vues en cohomologie:

$$0 \to H^0(\widetilde{E}(\sigma(x_0))) \overset{\oplus L'_i}{\to} H^0(\oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)}) \overset{f}{\to} H^1(\mathcal{O}_C(-\sigma(p)+\sigma(x_0))) \otimes \sigma^* V \to 0 \tag{7}$$

Maintenant, par dualité, la suite (7) s'écrit :

$$0 \to \sigma^* H^1(E(-x_0))^\vee \overset{\oplus L'_i}{\to} \sigma^* H^0(\oplus \mathcal{O}_{q_i})^\vee \overset{f}{\to} \sigma^*(H^0(p+\sigma(x_0)) \otimes V^\vee)^\vee \to 0 \tag{8}$$

où $\sigma^* H^1(E(-x_0))^\vee = H^1(\sigma^*(E(-x_0)))^\vee$. La suite (8) est exactement le dual de (5) transformé par σ^* et donc $f = \sigma^*({}^t\oplus L_i)$. La suite (8) signifie exactement que les ensembles $(\sigma^* L_i)$ et $(L_i')_i$ sont associés.

Prenons maintenant la suite (3) tensorisée par $\mathcal{O}_C(\sigma(x_0))$. Notons $\widetilde{L}_i$ les formes définissant $\widetilde{E}$ dans (3). En utilisant aussi la suite (5) on trouve le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
0 \to \mathcal{O}_C(-\sigma(p)+\sigma(x_0)) \otimes \sigma^* V & \to & & & \widetilde{E}(\sigma(x_0)) & \stackrel{\oplus L_i'}{\to} & \oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)} \to 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
0 \to \mathcal{O}_C(-\sigma(p)+\sigma(x_0)) \otimes \sigma^* V & \to & & & \mathcal{K}(p+\sigma(x_0)) \otimes \widetilde{V}^\vee & \stackrel{g}{\to} & \oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)} \oplus \mathcal{O}_{q_i} \to 0 \\
 & & & & \downarrow \oplus \widetilde{L}_i & & \\
 & & & & \oplus \mathcal{O}_{q_i} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Maintenant l'application g ci-dessus est donnée par les L_i' au-dessus des $\sigma(q_i)$ et par les $\widetilde{L}_i$ au-dessus des q_i. Mais la deuxième suite horizontale du diagramme tensorisée par $\mathcal{O}_C(\sigma(p)-\sigma(x_0))$ est σ^*-invariante, à cause du fait que toute section de $H^0(\mathcal{K}^2)$ est σ^* invariante. On a donc $\sigma^* \widetilde{L}_i = L_i'$, et comme l'ensemble (L_i') est associé avec $(\sigma^* L_i)$, les ensembles $(\widetilde{L}_i)$ et (L_i) sont associés. Cela achève la démonstration. $\square$

Remerciements. Je tiens à remercier A. Beauville pour les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que pour ses remarques faites en lisant une première version de ce travail, ce qui m'a permis de l'améliorer sensiblement. Egalemment, je veut remercier le referee pour avoir lu tres attentivement le manuscrit et m'avoir indiquer la reference [6] qui m'a permis de clarifier une certaine partie de la preuve de la Proposition 1.5.

REFERENCES

[1] A. Beauville. Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions theta. *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), 431–448.

[2] A. Beauville, M. S. Narasimhan. Spectral curves and the generalized theta divisor. *J. Reine Angew. Math.* **398**, (1989), 169–179.

[3] J. M. Drezet, M. S. Narasimhan. Groupes de Picard des variétés de modules de fibrés semistables sur les courbes algébriques. *Invent. Math.*, **97**, (1989), 53–94.

[4] M. Raynaud. Sections des fibrés vectoriels sur une courbe. *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 103-125.

[5] I. Dolgachev, D. Ortland. Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque* **165** (1988).

[6] C. S. Seshadri. Vector bundles on curves. *Contemp. Math* **153** (1993), 163–200.

Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy
P.O.Box 1-764
RO-70700 Bucharest
Romania
e-mail: Cristian.Anghel@imar.ro

Received November 21, 2003