Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **31** (2005), 309–354

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

RÉTRACTES ABSOLUS DE VOISINAGE ALGÉBRIQUES

Robert Cauty

Communicated by J. P. Revalski

Abstract. We introduce the class of algebraic ANRs. It is defined by replacing continuous maps by chain mappings in Lefschetz's characterization of ANRs. To a large extent, the theory of algebraic ANRs parallels the classical theory of ANRs. Every ANR is an algebraic ANR, but the class of algebraic ANRs is much larger; the most striking difference between these classes is that every locally equiconnected metrisable space is an algebraic ANR, whereas there exist metric linear spaces which are not ARs. This is important for applications of topological fixed point theory to functional analysis because all known results of fixed point for compact maps of ANRs extend to the algebraic ANRs. We prove here two such generalizations: the Lefschetz-Hopf fixed point theorem for compact maps of algebraic ANRs, and the fixed point theorem for compact upper semi-continuous multivalued maps with $\mathbb{Q}$-acyclic compacts point images in a $\mathbb{Q}$-acyclic algebraic ANR. We stress that these generalizations apply to all neighborhood retract of a metrisable linear space and, more generally, of a locally contractible metrisable group.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C55, 54H25, 55M20.
Key words: Algebraic ANRs, Lefschetz-Hopf fixed point theorem.

1. Introduction. *Dans tout cet article, R désigne un anneau unitaire*

Pour un espace métrisable X, la propriété d'être un rétracte absolu de voisinage est caractérisée en termes de fonctions continues de complexes simpliciaux dans X par la condition de Lefschetz ([11], théorème IV.4.1). Nous nous proposons ici d'étudier les espaces métrisables X vérifiant un analogue algébrique de la condition de Lefschetz où les fonctions continues d'un complexe K dans X sont remplacées par des morphismes de chaînes du complexe des R-chaînes orientées de K dans le complexe des R-chaînes singulières de X.

Pour tout espace topologique X, nous notons $S(X,R)$ le complexe des chaînes singulières de X à coefficients R et $H(X,R)$ son groupe gradué d'homologie. Le support d'une chaîne $c \in S(X,R)$ est noté $\|c\|$. Si $f : X \to Y$ est une fonction continue, nous notons $f_\# : S(X,R) \to S(Y,R)$ et $f_* : H(X,R) \to H(Y,R)$ les homomorphismes induits par f.

Pour tout complexe simplicial K, nous notons $C(K,R)$ le complexe des chaînes orientées de K à coefficients R (voir [15]), $C_q(K,R)$ le groupe des q-chaînes de ce complexe et $H(K,R)$ son groupe gradué d'homologie. Pour tout $q \geq 0$, nous identifions $C_q(K,R)$ au R-module libre engendré par les q-simplexes de K en fixant un générateur de $C_{\dim\sigma}(\sigma,R)$ pour chaque simplexe σ de K. Le symbole σ désignera donc à la fois un simplexe de K et l'élément correspondant de $C(K,R)$.

Tous les complexes $S(X,R)$ et $C(K,R)$ utilisés dans cet article sont naturellement augmentés, et *tous les morphismes de chaînes entre deux tels complexes seront supposés préserver l'augmentation.* Un tel complexe sera dit acyclique si son homologie réduite est triviale.

Soient K un complexe simplicial, X un espace topologique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{U}$ est la donnée d'un sous-complexe L de K contenant tous les sommets de K et d'un morphisme de chaînes $\mu : C(L,R) \to S(X,R)$ tel que, pour tout simplexe σ de K, il existe un élément de $\mathcal{U}$ contenant $\|\mu(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à L. Si $L = K$, la réalisation algébrique est dite complète.

Définition 1. *Un espace métrisable X est appelé un rétracte absolu de voisinage algébrique, ou RAV algébrique, si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X qui est plus fin que $\mathcal{U}$ et tel que, pour tout complexe simplicial K, toute réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation complète de K relativement à $\mathcal{U}$. Un RAV algébrique R-acyclique est appelé un rétracte absolu algébrique, ou RA algébrique.*

La définition d'un RAV algébrique dépend de l'anneau R de coefficients.

Lorsque nous voudrons préciser cet anneau, nous parlerons d'un R-RAV algébrique.

La théorie des RAV algébriques est parallèle à celle des rétractes absolus de voisinage : la plupart des résultats vrais pour les rétractes absolus de voisinage ont des analogues algébriques. Toutes les propriétés homologiques des rétractes absolus de voisinage s'étendent aux RAV algébriques ; c'est le cas en particulier de la théorie homologique des points fixes. C'est en comparant ces deux classes qu'apparaissent les phénomènes les plus intéressants. Evidemment, tout rétracte absolu de voisinage est un RAV algébrique, mais la réciproque est fausse, l'exemple de Dranishnikov [7] fournissant des RAV algébriques exotiques. D'autre part, bien qu'il existe des espaces métriques linéaires qui ne sont pas des rétractes absolus, tout espace métrique linéaire est un RA algébrique. Cette différence entre les deux classes reflète la différence de comportement entre les groupes d'homologie et ceux d'homotopie : c'est grâce à la propriété d'excision qu'il est possible de prouver que les espaces métriques linéaires sont des RA algébriques, et les groupes d'homotopie n'ont pas cette propriété. Comme la théorie des points fixes est de nature homologique et pas homotopique, elle s'applique à tous les espaces métriques linéaires.

2. Préliminaires. Nous notons I le segment $[0,1]$.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X et A un sous-ensemble de X, nous posons $\mathrm{St}(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$; si $A = \{x\}$, nous écrivons $\mathrm{St}(x,\mathcal{U})$ au lieu de $\mathrm{St}(\{x\},\mathcal{U})$. Nous définissons les recouvrements ouverts $\mathrm{St}(\mathcal{U})$ et $\mathrm{St}^2(\mathcal{U})$ par $\mathrm{St}(\mathcal{U}) = \{\mathrm{St}(U,\mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$ et $\mathrm{St}^2(\mathcal{U}) = \mathrm{St}(\mathrm{St}(\mathcal{U}))$. Nous identifions chaque simplexe singulier σ de X à l'élément $1.\sigma$ de $S(X,R)$, et notons $\|\sigma\|$ l'image de σ. Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, nous notons $S(X,\mathcal{U},R)$ le sous-complexe de $S(X,R)$ engendré par les simplexes singuliers dont l'image est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$. L'inclusion de $S(X,\mathcal{U},R)$ dans $S(X,R)$ est une équivalence homotopique, donc induit un isomorphisme sur l'homologie ; nous identifierons l'homologie de $S(X,\mathcal{U},R)$ à $H(X,R)$ par cet isomorphisme.

Nous notons $|K|$ la réalisation géométrique du complexe simplicial K. Nous notons $\partial\sigma$ le bord du simplexe σ de K. Si σ,σ' sont deux simplexes de K, la notation $\sigma \leq \sigma'$ signifie que σ est une face de σ' et $\sigma < \sigma'$ que σ est une face propre de σ'. Si les sommets $v_0,\dots,v_k$ de K engendrent un simplexe, nous notons $[v_0,\dots,v_k]$ ce simplexe et $|v_0,\dots,v_k|$ sa réalisation géométrique. Nous notons K' la subdivision barycentrique de K. Pour tout simplexe σ de K, nous notons b_σ son barycentre et $\mathrm{Tr}\,\sigma$ le sous-complexe de K' formé des simplexes $[b_{\sigma_0},\dots,b_{\sigma_k}]$ tels que $\sigma \leq \sigma_0 < \dots < \sigma_k$. $\mathrm{Tr}\,\sigma$ est un sous-complexe contractile de K' et, si σ_1,

σ_2 sont deux simplexes de K, alors $\operatorname{Tr}\sigma_1 \cap \operatorname{Tr}\sigma_2 \neq \emptyset$ si, et seulement si, $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est un simplexe de K et, dans ce cas, nous avons $\operatorname{Tr}\sigma_1 \cap \operatorname{Tr}\sigma_2 = \operatorname{Tr}\sigma_1 \cup \sigma_2$.

Un rôle important sera joué dans la suite par une classe particulière de CW-complexes. Par une cellule d'un CW-complexe, nous entendrons toujours une cellule fermée. Nous dirons qu'un CW-complexe K est spécial si toutes ses cellules sont des sous-complexes et s'il admet une subdivision simpliciale. Pour un tel complexe, les notions de bord et de face d'une cellule sont définies. Nous noterons $|\partial\tau|$ le bord de la cellule $|\tau|$ et $\mathring{\tau} = |\tau| \setminus |\partial\tau|$. Si $|\tau|$, $|\tau'|$ sont deux cellules de K, nous écrirons $|\tau| \leq |\tau'|$ si $|\tau|$ est une face de $|\tau'|$ et $|\tau| < |\tau'|$ si c'en est une face propre. Nous noterons $C(K,R)$ le complexe des R-chaînes cellulaires de K. Nous supposerons toujours avoir fixé une base de $C(K,R)$ en choisissant, pour toute cellule $|\tau|$ de K, un générateur τ du facteur direct $C(|\tau|, |\partial\tau|, R)$ de $C(K,R)$ correspondant à $|\tau|$. Si K est un complexe simplicial, alors $|K|$ est un CW-complexe spécial et les complexes de chaînes $C(K,R)$ et $C(|K|,R)$ sont isomorphes ; nous fixerons les générateurs de $C(K,R)$ et $C(|K|,R)$ et l'isomorphisme entre ces complexes de façon que les générateurs associés à chaque simplexe σ se correspondent par l'isomorphisme, ces deux générateurs étant encore notés σ.

La notion de réalisation algébrique (partielle) s'étend aux CW-complexes spéciaux. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X, une réalisation algébrique partielle d'un CW-complexe spécial K relativement à $\mathcal{U}$ est la donnée d'un sous-complexe L de K contenant tous les sommets de K et d'un morphisme de chaînes $\mu : C(L,R) \to S(X,R)$ tel que, pour toute cellule $|\sigma|$ de K, il existe un élément de $\mathcal{U}$ contenant $\|\mu(\tau)\|$ pour toute face $|\tau|$ de $|\sigma|$ appartenant à L. Si $L = K$, la réalisation est dite complète. Le lemme suivant implique que l'on peut indifféremment utiliser des complexes simpliciaux ou des CW-complexes spéciaux pour définir les RAV algébriques.

Lemme 1. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des recouvrements ouverts d'un espace X avec $\mathcal{V}$ plus fin que $\mathcal{U}$. Supposons que, pour tout complexe simplicial K, toute réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation algébrique complète relativement à $\mathcal{U}$. Alors, pour tout CW-complexe spécial L, toute réalisation algébrique partielle de L relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation algébrique complète relativement à* $\operatorname{St}(\mathcal{U})$.

Démonstration. Soit $\nu : C(L_1,R) \to S(X,R)$ une réalisation algébrique partielle du CW-complexe spécial L relativement à $\mathcal{V}$, où L_1 est un sous-complexe de L contenant tous les sommets de L. Soit $|K|$ une subdivision simpliciale de L. Si $|\tau|$ est une n-cellule de L et si $|\sigma_1|, \dots, |\sigma_k|$ sont les n-simplexes de $|K|$ contenus dans $|\tau|$, considérons, pour $1 \leq i \leq k$, le diagramme (coefficients omis)

$$H_n(|\tau|, |\partial\tau|) \xrightarrow{\alpha_i} H_n(|\tau|, |\tau| \setminus \overset{\circ}{\sigma}_i) \xleftarrow{\beta_i} H_n(|\sigma_i|, |\partial\sigma_i|)$$

où α_i et β_i sont induits par inclusion. Par excision, β_i est un isomorphisme et α_i, étant induit par une équivalence homotopique, est aussi un isomorphisme. Soit σ_i le générateur de $H_n(|\sigma_i|, |\partial\sigma_i|)$ tel que $\alpha_i(\tau) = \beta_i(\sigma_i)$ et soit $\psi(\tau) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in C(|K|, R)$. Alors ψ est un morphisme de chaînes de $C(L, R)$ dans $C(|K|, R)$ (Pour voir que $\partial\psi(\tau) = \psi(\partial\tau)$, noter que si le $(n-1)$-simplexe $|\sigma|$ rencontre $\overset{\circ}{\tau}$, il est face d'exactement deux des simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, soit σ_{i_1} et σ_{i_2}, et que les coefficients de $\partial\sigma_{i_1}$ et $\partial\sigma_{i_2}$ sur σ s'annulent. Si $|\tau'|$ est une $(n-1)$-face de $|\tau|$, si $|\sigma'_1|, \ldots, |\sigma'_m|$ sont les $(n-1)$-simplexes de $|K|$ contenus dans $|\tau'|$ et si le coefficient de $\partial\tau$ sur τ' est ϵ, on constate, en utilisant le corollaire V.6.11 et la proposition VIII.4.5 de [5] que le coefficient de $\partial\psi(\tau)$ sur chaque σ'_j est égal à ϵ). Par récurrence sur la dimension, construisons une application cellulaire $r : |K| \to L$ telle que, $|\tau|$ et les $|\sigma_i|$ étant comme ci-dessus, $r\|\sigma_1|$ soit une application de degré un de $|\sigma_1|$ sur $|\tau|$ et que $r(|\sigma_i|) \subset |\partial\tau|$ pour $i > 1$. Soit $r_\# : C(|K|, R) \to C(L, R)$ le morphisme induit. Alors $r_\# \circ \psi(\tau) = \tau$ pour toute cellule $|\tau|$ de L.

Soit K_1 la réunion des simplexes σ tels que $|\sigma| \subset L_1$ et du 0-squelette de K. Puisque L_1 contient tous les sommets de L, l'application cellulaire r envoie $|K_1|$ dans L_1. Soit $\nu_1 = \nu \circ (r\|K_1|)_\# : C(|K_1|, R) \to S(X, R)$. C'est une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{V}$: si $|\sigma|$ est contenu dans la cellule $|\tau|$ et si $V \in \mathcal{V}$ contient $\|\nu(\tau')\|$ pour toute face $|\tau'|$ de $|\tau|$, alors V contient $\|\nu_1(\sigma')\|$ pour toute face σ' de σ.

Soit $\mu_1 : C(|K|, R) \to S(X, R)$ une réalisation algébrique complète relativement à $\mathcal{U}$ prolongeant ν_1 et soit $\mu = \mu_1 \circ \psi : C(L, R) \to S(X, R)$. Si $|\tau|$ est une cellule de L_1, $\psi(\tau)$ appartient à $C(|K_1|, R)$, d'où $\mu(\tau) = \mu_1 \circ \psi(\tau) = \nu_1 \circ \psi(\tau) = \nu \circ r_\# \circ \psi(\tau) = \nu(\tau)$, donc μ prolonge ν. Si $|\tau|$ est une cellule de L, il y a un élément V_0 de $\mathcal{V}$ contenant $\|\nu(\tau_0)\|$ pour toute face $|\tau_0|$ de $|\tau|$ appartenant à L. Si $|\tau'|$ est une face de $|\tau|$ de dimension n et si $|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_k|$ sont les n-simplexes de $|K|$ contenus dans $|\tau|$, il y a, pour $1 \leq i \leq k$, un élément U_i de $\mathcal{U}$ contenant $\|\mu_i(\sigma')\|$ pour toute face σ' de σ_i. Si v est un sommet de σ_i, alors $r(v)$ est un sommet de $|\tau|$ et $\mu_1(v) = \nu(r(v)) \neq 0$, donc $U_i \cap V_0$ contient $\|\nu(r(v))\| \neq \emptyset$. Il en résulte que $\mathrm{St}(V_0, \mathcal{U})$ contient $\bigcup_{i=1}^k \|\mu(\sigma_i)\| \supset \|\mu(\tau')\|$. Puisque cela est vrai pour toute face $|\tau'|$ de $|\tau|$ et que V_0 est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$, μ est une réalisation algébrique relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{U})$. $\square$

Pour tout espace topologique X, nous notons $\Sigma(X)$ la réalisation géométrique au sens de Giever [9] du complexe singulier de X. C'est un CW-complexe spécial dont les cellules sont en correspondance biunivoque avec les simplexes singuliers de X. Pour tout sous-espace A de X, $\Sigma(A)$ s'identifie à un sous-complexe de $\Sigma(X)$. Il y a un isomorphisme naturel η du complexe des chaînes cellulaires $C(\Sigma(X), R)$ sur $S(X, R)$ tel que $\eta\big(C(\Sigma(A), R)\big) = S(A, R)$ pour tout sous-espace A de X.

Si K est un CW-complexe spécial, alors $K \times I$ est un CW-complexe spécial de cellules $|\sigma_0| = |\sigma| \times 0$, $|\sigma_1| = |\sigma| \times 1$ et $|\sigma_I| = |\sigma| \times I$, où $|\sigma|$ parcourt les cellules de K. Nous choisissons les générateurs σ_0, σ_1 et σ_I correspondant à ces cellules de façon que la projection envoie σ_0 et σ_1 sur σ puis, inductivement sur la dimension de $|\sigma|$, de façon que $\partial\sigma_I = \sigma_1 - \sigma_0 - (\partial\sigma) \times I$ (où si $c = \sum \epsilon_i \sigma^i$, alors $c \times I = \sum \epsilon_i \sigma_I^i$). Alors, si C est un complexe de R-chaînes, $\varphi_0, \varphi_1 : C(K, R) \to C$ sont deux morphismes de chaînes et si $h : C(K, R) \to C$ est une homotopie telle que $\partial h + h\partial = \varphi_1 - \varphi_0$, la fonction $\psi : C(K \times I, R) \to C$ définie par $\psi(\sigma_0) = \varphi_0(\sigma)$, $\psi(\sigma_1) = \varphi_1(\sigma)$ et $\psi(\sigma_I) = h(\sigma)$ est un morphisme de chaînes.

Nous notons $\widetilde{H}_q(C)$ le q-ème groupe d'homologie réduite d'un complexe de chaînes C. Si c est un cycle de C, nous notons $[c]$ sa classe d'homologie. Nous utiliserons de façon répétée le fait suivant, qui est connu et élémentaire (la condition $\widetilde{H}_{-1}(C_\sigma) = 0$ quand $\dim \sigma = 0$ signifie que l'augmentation envoie C_σ sur R).

Lemme 2. *Soient K un CW-complexe spécial, L un sous-complexe de K, C un complexe de R-modules et $\psi : C(L, R) \to C$ un morphisme de chaînes. Supposons donné, pour toute cellule $|\sigma|$ de $K \setminus L$, un sous-complexe C_σ de C de façon que*

(i) $C_\sigma \subset C_{\sigma'}$ si $|\sigma| \leq |\sigma'|$,

(ii) $\widetilde{H}_{\dim \sigma - 1}(C_\sigma) = 0$ pour toute cellule $|\sigma|$ de K,

(iii) pour toute cellule $|\sigma|$ de $K \setminus L$ et toute face $|\tau|$ de $|\sigma|$ appartenant à L, $\psi(\tau) \in C_\sigma$.

Alors il existe un morphisme de chaînes $\varphi : C(K, R) \to C$ prolongeant ψ et tel que $\varphi(\sigma) \in C_\sigma$ pour toute cellule $|\sigma|$.

La plupart du temps, le complexe C du lemme 2 sera de la forme $C(L, R)$ ou $S(X, R)$ et les complexes C_σ de la forme $C(L_\sigma, R)$ ou $S(X_\sigma, R)$ pour un sous-complexe ou un sous-espace acyclique.

Nous aurons aussi à utiliser l'homologie de Čech à coefficients rationnels, que nous noterons $\check{H}(X, \mathbb{Q})$.

3. Caractérisations des RAV algébriques. Nous commencerons par définir la notion de rétraction algébrique de voisinage qui permettra de donner des RAV algébriques une caractérisation justifiant la terminologie.

Définition 2. *Un sous-espace A d'un espace X est appelé un rétracte de voisinage algébrique de X s'il existe un voisinage U de A dans X, un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U et un morphisme de chaînes $\mu : S(U,\mathcal{U},R) \to S(A,R)$ vérifiant*

(i) $\mu(c) = c$ *pour* $c \in S(A,R) \cap S(U,\mathcal{U},R)$,

(ii) pour tout $x \in A$ et tout voisinage V de x dans A, il existe un voisinage W de x dans X tel que $\mu\big(S(W,R) \cap S(U,\mathcal{U},R)\big) \subset S(V,R)$.

Si $U = X$ et $\mathcal{U} = \{X\}$, A est appelé un rétracte algébrique de X.

Tout rétracte de voisinage de X est un rétracte algébrique car le morphisme $r_\# : S(U,R) \to S(A,R)$ induit par une rétraction $r : U \to A$ vérifie évidemment les conditions (i) et (ii) de la définition précédente.

Lemme 3. *Si A est un rétracte de voisinage algébrique de X, il en est de même de tout ouvert O de A.*

Démonstration. Soient U, $\mathcal{U}$ et μ comme dans la définition 2. Pour tout $x \in O$, la condition (ii) nous permet de trouver un voisinage G_x de x contenu dans un élément de $\mathcal{U}$ et tel que $\mu\big(S(G_x,R)\big) \subset S(O,R)$. Alors $G = \bigcup_{x\in O} G_x$ est un voisinage de O dans X, $\mathcal{G} = \{G_x \,|\, x \in O\}$ est un recouvrement ouvert de G, $S(G,\mathcal{G},R)$ est contenu dans $S(U,\mathcal{U},R)$ et $\mu' = \mu | S(G,\mathcal{G},R) : S(G,\mathcal{G},R) \to S(O,R)$ vérifie évidemment les conditions (i) et (ii) de la définition 2. $\square$

Proposition 1. *Tout rétracte de voisinage algébrique fermé d'un RAV algébrique est un RAV algébrique*

Démonstration. Soit A un rétracte de voisinage algébrique fermé du RAV algébrique X. Prenons U, $\mathcal{U}$ et $\mu : S(U,\mathcal{U},R) \to S(A,R)$ comme dans la définition 2. Soit $\mathcal{G}$ un recouvrement ouvert de A. Pour tout $x \in A$ fixons un élément G_x de $\mathcal{G}$ contenant x ; la condition (ii) de la définition 2 nous permet de trouver un voisinage ouvert V_x de x dans X qui est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$ et tel que $\mu(S(V_x,R)) \subset S(G_x,R)$. Les V_x, $x \in A$, et $X \setminus A$ forment un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X. Puisque X est un RAV algébrique, il y a un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de X qui est plus fin que $\mathcal{V}$ et tel que, pour tout complexe simplicial K, toute réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{W}$ se prolonge en une réalisation algébrique complète de K relativement à $\mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{H} = \{W \cap A \,|\, A \in \mathcal{W}\}$. Si K est un complexe simplicial et $\nu : C(L,R) \to S(A,R)$ est une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{H}$, il existe une réalisation algébrique complète $\kappa : C(K,R) \to S(X,R)$ de K relativement à $\mathcal{V}$ prolongeant ν. Si σ est un simplexe de K, il y a un élément

V de $\mathcal{V}$ tel que $\|\kappa(\tau)\| \subset V$ pour toute face τ de σ. Si v est un sommet de σ, alors $0 \neq \kappa(v) = \nu(v) \in S(A, R)$, donc $V \neq X \setminus A$ et il existe $x \in A$ tel que $V = V_x$. Puisque $\mu(S(V_x, R)) \subset S(G_x, R)$, le morphisme $\mu \circ \kappa$ est défini et est une réalisation algébrique complète de K relativement à $\mathcal{G}$ qui prolonge ν d'après (i) de la définition 2. $\square$

Corollaire. *Tout rétracte absolu de voisinage est un RAV algébrique.*

D é m o n s t r a t i o n. Tout espace métrisable X peut être plongé comme fermé dans un sous-ensemble convexe C d'un espace normé. Si X est un rétracte absolu de voisinage, c'est un rétracte de voisinage, donc un rétracte de voisinage algébrique, de C, et il suffit de prouver que C est un RAV algébrique.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de C. Il y a un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de C qui est plus fin que $\mathcal{U}$ et est formé d'ensembles convexes. Soient K un complexe simplicial et $\mu : C(L, R) \to S(C, R)$ une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{V}$. Pour tout simplexe σ de K, soit $\mathcal{V}_\sigma$ l'enssemble des $V \in \mathcal{V}$ qui contiennent $\|\mu(\tau)\|$ pour tout simplexe $\tau \in L \cap \sigma$. $\mathcal{V}_\sigma$ n'est pas vide et l'intersection V_σ des éléments de $\mathcal{V}_\sigma$ est non vide et convexe, donc acyclique. Comme $V_\sigma \subset V_{\sigma'}$ si $\sigma \leq \sigma'$, nous pouvons prolonger μ en un morphisme $\mu' : C(K, R) \to S(C, R)$ de façon que $\|\mu'(\sigma)\| \subset S(V_\sigma, R)$ pour tout σ. Alors μ' est une réalisation complète de K relativement à $\mathcal{V}$, donc aussi relativement à $\mathcal{U}$, qui prolonge μ. $\square$

Théorème 1. *Pour un espace métrisable X, les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *X est un RA(V) algébrique.*

(*ii*) *X est un rétracte (de voisinage) algébrique de tout espace métrisable le contenant comme fermé.*

D é m o n s t r a t i o n. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Soit X un RAV algébrique contenu comme fermé dans un espace métrisable Y et soit d une distance définissant la topologie de Y. Pour $y \in Y$ et $\delta > 0$, nous notons $B(x, \delta)$ la boule ouverte de centre x et de rayon δ dans Y. Partant de $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}_0 = \{X\}$, construisons inductivement deux suites $\{\mathcal{U}_n\}$ et $\{\mathcal{V}_n\}$ de recouvrements ouverts de X vérifiant

(1) $\mathrm{St}^2(\mathcal{U}_{n+1})$ est plus fin que $\mathcal{V}_n$.

(2) $\mathcal{V}_n$ est plus fin que $\mathcal{U}_n$ et, pour tout complexe simplicial K, toute réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{V}_n$ se prolonge en une réalisation algébrique complète de K relativement à $\mathcal{U}_n$.

(3) Pour tout point x de X et tout voisinage W de x, il existe n tel que $\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) \subset W$.

Nous utiliserons la réalisation géométrique $\Sigma(Y)$ du complexe singulier de Y et l'isomorphisme naturel $\eta : C(\Sigma(Y), R) \to S(Y, R)$. Pour tout simplexe singulier σ de Y, $\hat{\sigma} = \eta^{-1}(\sigma)$ est un générateur du facteur direct $C(|\sigma|, |\partial\sigma|, R)$ de $C(\Sigma(Y), R)$.

Soit Z le quotient de $\Sigma(Y) \times [2, \infty[$ obtenu en identifiant $\{x\} \times [2, \infty[$ à un point pour tout $x \in \Sigma(X)$ et soit π la projection de $\Sigma(Y) \times [2, \infty[$ sur Z. Nous identifions $\Sigma(X)$ à $\pi\big(\Sigma(X) \times [2, \infty[\big)$. Pour toute cellule $|\sigma|$ de $\Sigma(Y)$ qui n'est pas contenue dans $\Sigma(X)$ et pour $m \geq 2$, posons $|\sigma^0_m| = \pi(|\sigma| \times \{m\})$ et $|\sigma^1_m| = \pi(|\sigma| \times [m, m+1])$. L'espace Z est un CW-complexe dont les cellules sont celles de $\Sigma(X)$ et les $|\sigma^\epsilon_m|$ où $|\sigma|$ n'est pas contenue dans $\Sigma(X)$, $m \geq 2$ et $\epsilon = 0, 1$. En utilisant le fait que le CW-complexe $\Sigma(Y)$ est spécial, on constate facilement que Z est aussi un CW-complexe spécial.

Pour $m \geq 2$ entier, soit $F_m = \{y \in Y \,|\, d(x, y) \geq 1/m\}$. Si $|\sigma|$ est une cellule de $\Sigma(Y)$ qui n'est pas contenue dans $\Sigma(X)$, soit $\ell(\sigma)$ le plus petit entier m tel que $|\sigma| \cap F_m \neq \emptyset$ et soit $e(\sigma)$ le plus grand des nombres $\ell(\tau)$ où τ parcourt les faces de σ qui ne sont pas contenues dans $\Sigma(X)$. Pour une telle cellule, posons $J_\sigma = \pi\big(|\sigma| \times [\ell(\sigma), e(\sigma)]\big)$ et $\dot{J}_\sigma = \pi\big(|\partial\sigma| \times [\ell(\sigma), e(\sigma)]\big)$. Si $|\sigma|$ est contenue dans $\Sigma(X)$, posons $J_\sigma = |\sigma|$ et $\dot{J}_\sigma = |\partial\sigma|$.

La projection de $\Sigma(Y) \times [2, \infty[$ sur $\Sigma(Y)$ induit une application cellulaire ρ de Z sur $\Sigma(Y)$. Construisons un morphisme de chaînes $\zeta : C(\Sigma(Y), R) \to C(Z, R)$ tel que, pour toute cellule $|\sigma|$ de $\Sigma(Y)$, $\zeta(\hat{\sigma})$ appartienne à $C(J_\sigma, R)$ et que $\rho_\#(\zeta(\hat{\sigma})) = \hat{\sigma}$. Si $|\sigma|$ est contenu dans $\Sigma(X)$, alors $J_\sigma = |\sigma|$ et nous posons $\zeta(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$. Pour les cellules qui ne sont pas contenues dans $\Sigma(X)$, nous définissons $\zeta(\hat{\sigma})$ par récurrence sur la dimension de $|\sigma|$. Si $|\sigma|$ est un sommet, J_σ est un point que ρ envoie sur $|\sigma|$, et la condition $\rho_\#(\zeta(\hat{\sigma})) = \hat{\sigma}$ définit uniquement $\zeta(\hat{\sigma}) \in C(J_\sigma, R)$. Soit $|\sigma|$ une k-cellule de $\Sigma(Y)$ de $(k-1)$-faces $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$, et supposons les $\zeta(\hat{\sigma}_i)$ définis. Alors $\zeta(\partial\hat{\sigma})$ est un élément de $C(\dot{J}_\sigma, R)$ tel que $\partial\zeta(\partial\hat{\sigma}) = \zeta(\partial\partial\hat{\sigma}) = 0$, et si $\partial\hat{\sigma} = \sum_{i=0}^r \alpha_i\hat{\sigma}_i$, alors $\rho_\#(\zeta(\partial\hat{\sigma})) = \rho_\#(\sum_{i=0}^r \alpha_i\zeta(\hat{\sigma}_i)) = \sum_{i=0}^r \alpha_i\rho_\#(\zeta(\hat{\sigma}_i)) = \sum_{i=0}^r \alpha_i\hat{\sigma}_i = \partial\hat{\sigma}$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& H_k(J_\sigma, \dot{J}_\sigma, R) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\rho_1"'] & H_{k-1}(\dot{J}_\sigma, R) \arrow[d, "\rho_2"'] \\
C(|\sigma|, |\partial\sigma|, R) \arrow[r, equal] & H_k(|\sigma|, |\partial\sigma|, R) \arrow[r, "\partial"] & H_{k-1}(|\partial\sigma|, R)
\end{tikzcd}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont induits par ρ. La restriction de ρ à $(J_\sigma, \dot{J}_\sigma)$ est une équivalence homotopique de $(J_\sigma, \dot{J}_\sigma)$ sur $(|\sigma|, |\partial\sigma|)$, donc ρ_1 et ρ_2 sont des isomorphismes.

Il existe donc $a \in H_k(J_\sigma, \dot{J}_\sigma, R)$ tel que $\rho_1(a) = \hat{\sigma}$. Soit $c_1 \in C(J_\sigma, \dot{J}_\sigma, R)$ une chaîne cellulaire représentant a. Alors $\rho_2([\partial c_1]) = \rho_2 \circ \partial a = \partial \circ \rho_1(a) = \partial\hat{\sigma} = \rho_2([\zeta(\partial\hat{\sigma})])$; comme ρ_2 est un isomorphisme, $[\partial c_1] = [\zeta(\partial\hat{\sigma})]$, donc il existe une chaîne $c_2 \in C(\dot{J}_\sigma, R)$ telle que $\partial c_2 = \zeta(\partial\hat{\sigma}) - \partial c_1$. La chaîne $\zeta(\hat{\sigma}) = c_1 + c_2$ vérifie donc $\partial\zeta(\hat{\sigma}) = \zeta(\partial\hat{\sigma})$. Comme $|\partial\sigma|$ ne contient pas de k-cellule, $\rho_\#(c_2) = 0$, donc $\rho_\#(\zeta(\hat{\sigma})) = \rho_\#(c_1) \in C(|\sigma|, |\partial\sigma|, R)$, et l'identification naturelle de $C(|\sigma|, |\partial\sigma|, R)$ à $H_k(|\sigma|, |\partial\sigma|, R)$ envoie $\rho_\#(c_1)$ sur $\rho_1([c_1]) = \hat{\sigma}$, d'où l'égalité $\rho_\#(\zeta(\hat{\sigma})) = \hat{\sigma}$.

Pour tout $y \in Y$, choisissons un point $r(y) \in X$ tel que $d(y, r(y)) \leq 2d(y, X)$; nous obtenons ainsi une rétraction discontinue de Y sur X. Pour $n \geq 1$, soit L_n la réunion des cellules $|\sigma|$ telles que $r(\|\sigma\|)$soit contenu dans un élément de $\mathcal{V}_n$; c'est un sous-CW-complexe de $\Sigma(Y)$. Pour $2 \leq n \leq m$, posons $T_n^m = \pi(L_n \times \{m\})$, $Z_n^m = \pi(L_n \times [m, m+1])$ et $Z_n = \bigcup_{m=n}^\infty Z_n^m$. Nous allons construire un morphisme de chaînes $\nu : C(Z_2, R) \to S(X, R)$ vérifiant

(4) $\nu(c) = \eta(c)$ si $c \in C(\Sigma(X), R) \cap C(Z_2, R)$,

(5) pour tout $n \geq 2$ et toute cellule $|\sigma|$ de Z_n, il existe un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{U}_{n-2})$ contenant $\|\nu(\hat{\tau})\|$ pour toute face τ de σ.

Nous construirons en fait ν de façon que, pour $2 \leq n \leq m$, sa restriction à $C(T_n^m, R)$ soit une réalisation algébrique complète de T_n^m relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{U}_{n-1})$ et que sa restriction à $C(Z_n^m, R)$ soit une réalisation algébrique complète de Z_n^m relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{U}_{n-2})$. La condition (4) définit la restriction de ν à $C(\Sigma(X), R) \cap C(Z_2, R)$. Soit $Z_2^{(0)}$ le 0-squelette de Z_2. Définissons la restriction de ν à $C(Z_2^{(0)}, R)$ en convenant que si $|\sigma_m^0|$ est une 0-cellule de Z, alors $\nu(\hat{\sigma}_m^0)$ est le 0-simplexe singulier $r(\sigma)$.

Définissons, pour tout $m \geq 2$, la restriction de ν à $C(T_n^m, R)$ par récurrence descendante sur $n \leq m$. Posons $M_m^m = T_m^m \cap \big(\Sigma(X) \cup Z_2^{(0)}\big)$ et $M_n^m = \big(T_n^m \cap \Sigma(X)\big) \cup T_{n+1}^m$ pour $2 \leq n \leq m$. Supposant ν défini sur $C(M_n^m, R)$, pour le prolonger à $C(T_n^m, R)$, il suffit, en appliquant (2) et le lemme 1 au CW-complexe spécial T_n^m, de vérifier que la restriction de ν à $C(M_n^m, R)$ est une réalisation algébrique partielle de T_n^m relativement à $\mathcal{V}_{n-1}$. Soit $|\sigma_m^0|$ une cellule de T_n^m. Il existe $V_0 \in \mathcal{V}_n$ contenant $r(\|\sigma\|)$. Si $|\tau|$ est une face de $|\sigma_m^0|$ contenue dans $\Sigma(X) \cup Z_2^{(0)}$, alors $\|\nu(\hat{\tau})\| \subset r(\|\sigma\|) \subset V_0$. Cela implique que $\nu|C(M_m^m, R)$ est une réalisation algébrique partielle de T_m^m relativement à $\mathcal{V}_m$. Si $n < m$ et si $|\tau_m^0|$ est une face de $|\sigma_m^0|$ appartenant à $T_{n'}^m$ avec $n+1 \leq n' \leq m$, alors il y a un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{U}_{n'-1})$, donc aussi un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{U}_n)$ qui contient $\|\nu(\tau')\|$ pour toute face $|\tau'|$ de $|\tau_m^0|$; prenant pour $|\tau'|$ un sommet de $|\tau|$, nous constatons que cet élément rencontre $r(\|\sigma\|)$, et il en résulte que $\mathrm{St}\big(V_0, \mathrm{St}(\mathcal{U}_n)\big)$ contient $\|\nu(\hat{\tau})\|$ pour toute face $|\tau|$ de $|\sigma_m^0|$ contenue dans M_n^m. D'après (2) et (1), $\mathrm{St}\big(V_0, \mathrm{St}(\mathcal{U}_n)\big)$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}^2(\mathcal{U}_n)$, donc dans un élément de $\mathcal{V}_{n-1}$, ce qui montre que $\nu|C(M_n^m, R)$ est bien une réalisation algébrique partielle de T_n^m relativement à $\mathcal{V}_{n-1}$.

Pour achever la construction de ν, il ne reste plus qu'à définir sa restriction aux complexes $C(Z_n^m, R)$, ce que nous faisons encore, pour m fixé, par récurrence descendante sur n. Posant $N_m^m = T_2^m \cup T_2^{m+1} \cup \big(\Sigma(X) \cap Z_m^m\big)$ et $N_n^m = T_2^m \cup T_2^{m+1} \cup Z_{n+1}^m \cup \big(Z_n^m \cap \Sigma(X)\big)$ pour $n < m$, il suffit ici encore de constater que la restriction de ν à $C(N_n^m, R)$ est une réalisation algébrique partielle de Z_n^m relativement à $\mathcal{V}_{n-2}$, ce qui se fait comme précédemment.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des ouverts G de Y tels que $r(G)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{V}_2$ et soit $H = \bigcup\{G \,|\, G \in \mathcal{G}\}$. Si G appartient à $\mathcal{G}$ et si σ est un simplexe singulier de G, alors J_σ est contenu dans Z_2, ce qui nous permet de définir $\mu : S(H, \mathcal{G}, R) \to S(X, R)$ par $\mu(c) = \nu \circ \zeta \circ \eta^{-1}(c)$. Si σ est un simplexe de $G \cap X$, alors $\zeta \circ \eta^{-1}(\sigma) = \eta^{-1}(\sigma)$ et $\mu(\sigma) = \sigma$, d'où $\mu(c) = c$ pour $c \in S(X, R) \cap S(H, \mathcal{G}, R)$.

Pour achever de vérifier que X est un rétracte de voisinage algébrique de Y, il suffit de montrer que, pour tout voisinage W de x dans X, il existe $G \in \mathcal{G}$ contenant x tel que $\mu(S(G, R)) \subset S(W, R)$. D'après (3), il y a un n tel que $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \subset W$. Soit V_0 un élément de $\mathcal{V}_{n+3}$ contenant x et soit $\delta > 0$ tel que $B(x, 3\delta) \cap X \subset V_0$. Posons $G = B(x, \delta) \setminus F_{n+2}$; c'est un ouvert contenant x et si y appartient à G, alors $d(y, r(y)) \leq 2d(y, X) \leq 2d(y, x)$, donc $d(x, r(y)) \leq 3d(x, y) < 3\delta$, ce qui montre que $r(G)$ est contenu dans V_0. Pour tout simplexe singulier σ de G, $r(\|\sigma\|)$ est contenu dans l'élément V_0 de $\mathcal{V}_{n+3}$, donc $|\sigma|$ est contenue dans L_{n+3}, et $\ell(\sigma) \geq n + 3$ puisque $G \cap F_{n+2} = \emptyset$, ce qui entraîne que J_σ est contenu dans Z_{n+3}. Si $|\tau|$ est une cellule de J_σ, il y a d'après (5) un élément U_τ de $\mathrm{St}(\mathcal{U}_{n+1})$ contenant $\|\nu(\hat{\tau}')\|$ pour toute face $|\tau'|$ de $|\tau|$; en particulier, si $|v_m^0|$ est un sommet de $|\tau|$, alors U_τ contient $r(v) \in V_0$. Il en résulte que $\mu(\sigma) \in \nu(C(J_\sigma, R))$ a son support contenu dans $\mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_{n+1})$ lequel, d'après (1) et (2), est contenu dans un élément de $\mathrm{St}^2(\mathcal{U}_{n+1})$, donc dans un élément U de $\mathcal{U}_n$ qui contient $V_0 \ni x$. Cet ensemble U est donc contenu dans W, d'où $\mu\big(S(X, R)\big) \subset S(W, R)$.

Si $S(X, R)$ est acyclique, le morphisme ν peut se prolonger en un morphisme de $S(Y, R)$ dans $S(X, R)$ qui est l'identité sur $S(X, R)$, donc X est un rétracte algébrique de Y.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Plongeons X comme fermé dans un sous-ensemble convexe C d'un espace normé. Alors X est un rétracte de voisinage algébrique de C, donc un RAV algébrique d'après la proposition 1. Si X est un rétracte algébrique de C, alors le complexe de chaînes $S(X, R)$ est un rétracte du complexe de chaînes acyclique $S(C,R)$, donc est aussi acyclique, et X est un RA algébrique. $\square$

Il est connu que les rétractes absolus de voisinage peuvent être caractérisés en termes de domination par des complexes simpliciaux. Le théorème suivant est une version algébrique de cette caractérisation.

Théorème 2. *Pour un espace métrisable X, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *X est un RAV algébrique.*

(ii) *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X plus fin que $\mathcal{U}$, un complexe simplicial K, des morphismes de chaînes $\psi : S(X,\mathcal{V},R) \to C(K',R)$, $\zeta : C(K',R) \to S(X,R)$ et une homotopie $h : S(X,\mathcal{V},R) \to S(X,R)$ entre l'inclusion et $\zeta \circ \psi$ vérifiant*

- (a) *Pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un simplexe s de K tel que $\psi\big(S(V,R)\big)$ soit contenu dans $C(\operatorname{Tr} s, R)$.*
- (b) *ζ est une réalisation algébrique complète de K' relativement à $\mathcal{U}$.*
- (c) *Pour tout simplexe singulier σ appartenant à $S(X,\mathcal{V},R)$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant $\|\tau\| \cup \|\zeta \circ \psi(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face τ de σ.*

D é m o n s t r a t i o n. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. En utilisant le lemme 1, prenons des recouvrements ouverts $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ de X vérifiant

(1) $\mathcal{U}_1$ est plus fin que $\mathcal{U}$ et toute réalisation algébrique partielle d'un CW-complexe spécial relativement à $\mathcal{U}_1$ se prolonge en une réalisation algébrique complète relativement à $\mathcal{U}$.

(2) $\operatorname{St}(\mathcal{U}_2)$ est plus fin que $\mathcal{U}_1$.

(3) $\mathcal{U}_3$ est plus fin que $\mathcal{U}_2$ et toute réalisation algébrique partielle d'un complexe simplicial relativement à $\mathcal{U}_3$ se prolonge en une réalisation algébrique complète relativement à $\mathcal{U}_2$.

(4) Le nerf de $\mathcal{U}_3$ est localement de dimension finie.

La possibilité de trouver un $\mathcal{U}_3$ vérifiant (4) est donnée par un théorème de Dowker [6]. Soit K le nerf de $\mathcal{U}_3$. Posant $\mathcal{U}_3 = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, nous supposons U_α non vide pour tout $\alpha \in A$, ce qui nous permet d'identifier A à l'ensemble des sommets de K. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des simplexes de K. Pour tout simplexe $s = [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$ de K, posons $V_s = \bigcap_{i=0}^k U_{\alpha_i}$. Soit $\mathcal{V} = \{V_s \mid s \in \mathcal{S}\}$. Nous allons construire le morphisme $\psi : S(X,\mathcal{V},R) \to C(K',R)$ de façon que $\psi\big(S(V_s,R)\big) \subset C(\operatorname{Tr} s, R)$ pour tout $s \in \mathcal{S}$.

Puisque K est localement de dimension finie, la dimension $d(s)$ de $\mathrm{Tr}\, s$ est finie pour tout $s \in \mathcal{S}$. Pour $n \geq 0$, soit $\mathcal{S}_n = \{s \in \mathcal{S} \,|\, d(s) = n\}$ et soit $S_n = \sum_{d(s) \leq n} S(V_s, R)$. Les S_n forment une suite croissante de sous-complexes de chaînes de $S(X, R)$ de réunion $S(X, \mathcal{V}, R)$. Nous construirons inductivement les restrictions ψ_n de ψ à S_n. Puisque $\mathrm{Tr}\, s$ est contractile, $C(\mathrm{Tr}\, s, R)$ est acyclique, donc il y a, pour tout $s \in \mathcal{S}_0$, un morphisme de chaînes ψ_s de $S(V_s, R)$ dans $C(\mathrm{Tr}\, s, R)$. Si $d(s) = 0$, le simplexe s de K est maximal, donc $V_s \cap V_{s'} = \emptyset$ si s et s' sont deux éléments distincts de $\mathcal{S}_0$. Il en résulte que S_0 est somme directe des sous-complexes $S(V_s, R)$ avec $s \in \mathcal{S}_0$, donc les ψ_s, $s \in \mathcal{S}_0$, déterminent un unique morphisme de chaînes ψ_0 de S_0 dans $C(K', R)$. Soit $n \geq 0$ et supposons ψ_n défini. Si s et s' sont deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $V_s \cap V_{s'} \neq \emptyset$, alors $s \cup s'$ est un simplexe de K, $S(V_s, R) \cap S(V_{s'}, R) = S(V_{s \cup s'}, R)$ et nous avons $\mathrm{Tr}\, s \cup s' \subset \mathrm{Tr}\, s$. Il en résulte que si s appartient à $\mathcal{S}_{n+1}$, alors ψ_n envoie $S(V_s, R) \cap S_n$ dans $C(\mathrm{Tr}\, s, R)$; comme ce complexe est acyclique, $\psi_n | S(V_s, R) \cap S_n$ se prolonge en un morphisme ψ_s de $S(V_s, R)$ dans $C(\mathrm{Tr}\, s, R)$. Si s_1 et s_2 sont deux éléments distincts de $\mathcal{S}_{n+1}$ tels que $V_{s_1} \cap V_{s_2} \neq \emptyset$, alors s_1 est une face propre de $s_1 \cup s_2$, donc $d(s_1 \cup s_2) < d(s_1)$, ce qui entraîne que $S(V_{s_1}, R) \cap S(V_{s_2}, R)$ est contenu dans S_n. Il existe donc un unique morphisme de chaînes $\psi_{n+1} : S_{n+1} \to C(K', R)$ tel que $\psi_{n+1} | S_n = \psi_n$ et $\psi_{n+1} | S(V_s, R) = \psi_s$ pour tout $s \in \mathcal{S}_{n+1}$.

Pour tout simplexe s de K, choisissons un point x_s de V_s. Soit $K'^{(0)}$ le 0-squelette de K'. Associant au barycentre b_s de s le 0-simplexe x_s, nous obtenons un morphisme de chaînes de $C(K'^{(0)}, R)$ dans $S(X, R)$ qui est une réalisation algébrique partielle de K' relativement à $\mathcal{U}_3$, donc, d'après (3), se prolonge en une réalisation algébrique complète ζ de K' relativement à $\mathcal{U}_2$, donc a fortiori relativement à $\mathcal{U}$.

Soit $\Sigma(X, \mathcal{V})$ le sous-complexe de $\Sigma(X)$ formé des cellules $|\sigma|$ telles que σ appartienne à $S(X, \mathcal{V}, R)$ et soit $Y = \Sigma(X, \mathcal{V}) \times I$. Le sous-complexe $Z = \Sigma(X, \mathcal{V}) \times \{0, 1\}$ contient tous les sommets de Y. Définissons un morphisme de chaînes $\nu_0 : C(Z, R) \to S(X, R)$ en posant $\nu_0(\sigma_0) = \sigma$ et $\nu_0(\sigma_1) = \zeta \circ \psi(\sigma)$. Soit σ un simplexe singulier appartenant à $S(X, \mathcal{V}, R)$ et soit s un simplexe de K tel que $\|\sigma\| \subset V_s$. Pour tout simplexe τ de $\mathrm{Tr}\, s$, il y a un élément U_τ de $\mathcal{U}_2$ contenant $\|\zeta(\tau')\|$ pour toute face τ' de τ ; en particulier, si $b_{s'}$ est un sommet de τ, alors U_τ contient $x_{s'} \in V_{s'} \subset V_s$ (puisque s est une face de s'). Il en résulte que $\mathrm{St}(V_s, \mathcal{U}_2)$ contient $\|\zeta(c)\|$ pour toute chaîne c de $C(\mathrm{Tr}\, s, R)$, donc en particulier contient $\|\zeta(\psi(\sigma'))\|$ pour toute face σ' de σ. Puisque $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}_2$, cela montre qu'il y a un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{U}_2)$ contenant $\|\sigma'\|$ et $\|\zeta(\psi(\sigma'))\|$ pour toute face σ' de σ, donc que ν_0 est une réalisation algébrique partielle de Y relativement à $St(U_2)$. D'après (2) et (1), ν_0 se prolonge en une réalisation algébrique complète

ν de Y relativement à $\mathcal{U}$. L'homotopie $h : S(X,\mathcal{V},R) \to S(X,R)$ définie par $h(\sigma) = \nu(\sigma_I)$ vérifie alors $\partial h(\sigma) + h\partial(\sigma) = \zeta\psi(\sigma) - \sigma$ pour tout simplexe σ de $S(X,\mathcal{V},R)$, donc $\partial h + h\partial = \zeta \circ \psi - id$, et (c) explicite le fait que ν est une réalisation algébrique relativement à $\mathcal{U}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de X. Prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X tel que $\mathrm{St}^2(\mathcal{U})$ soit plus fin que $\mathcal{W}$, puis des éléments $\mathcal{V}$, K, ψ, ζ et h comme dans (ii). Soient L un complexe simplicial et $\nu : C(M,R) \to S(X,R)$ une réalisation algébrique partielle de L relativement à $\mathcal{V}$, où M est un sous-complexe de L contenant tous les sommets de L.

Considérons le morphisme $\psi \circ \nu : C(M,R) \to C(K',R)$. Si σ est un simplexe de L, il y a un élément V de $\mathcal{V}$ contenant $\|\nu(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à M, et il existe un simplexe s de K tel que $\psi\big(S(V,R)\big) \subset C(\mathrm{Tr}\, s, R)$; alors $C(\mathrm{Tr}\, s,R)$ contient $\psi \circ \nu\big(C(M \cap \sigma, R)\big)$. Si s_1 et s_2 sont deux simplexes de K ayant cette propriété, alors $|\mathrm{Tr}\, s_1| \cap |\mathrm{Tr}\, s_2| \neq \emptyset$ (car $\psi(\nu(v)) \neq 0$ pour tout sommet v de σ), donc $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est un simplexe de K et $\sigma_1 \cup \sigma_2$ a la même propriété (car $C(\mathrm{Tr}\, s_1, R) \cap C(\mathrm{Tr}\, s_2, R) = C(\mathrm{Tr}\, \sigma_1 \cup \sigma_2, R)$). Comme un point de $|K|$ n'appartient qu'à un nombre fini d'ensembles de la forme $|\mathrm{Tr}\, s|$, il y a un plus grand simplexe $s(\sigma)$ tel que $C(\mathrm{Tr}\, s(\sigma), R)$ contienne $\psi \circ \nu\big(C(M \cap \sigma, R)\big)$. Evidemment, $s(\sigma) \leq s(\sigma')$ si $\sigma' \leq \sigma$ et, en utilisant l'acyclicité des complexes $C(\mathrm{Tr}\, s(\sigma), R)$, cela nous permet de prolonger $\psi \circ \nu$ en un morphisme ξ de $C(L,R)$ dans $C(K',R)$ tel que $\xi\big(C(\sigma,R)\big) \subset C(\mathrm{Tr}\, s(\sigma), R)$ pour tout simplexe σ de L.

Posons $P = |L| \times I$ et $Q = \big(|L| \times \{1\}\big) \cup \big(|M| \times I\big)$. Pour tout simplexe σ de L, posons $\vartheta(\sigma_1) = \zeta(\xi(\sigma))$ et pour tout simplexe σ de M, posons $\vartheta(\sigma_0) = \nu(\sigma)$ et $\vartheta(\sigma_I) = h(\nu(\sigma))$. Puisque $h \circ \partial(\nu(\sigma)) + \partial \circ h(\nu(\sigma)) = \zeta \circ \psi(\nu(\sigma)) - \nu(\sigma) = \zeta \circ \xi(\sigma) - \nu(\sigma)$ pour tout $\sigma \in M$, cela définit un morphisme de chaînes $\vartheta : C(Q,R) \to S(X,R)$.

Il existe une rétraction cellulaire r de P sur Q envoyant $|\sigma| \times I$ sur $(|\sigma| \times I) \cap Q$ pour tout simplexe σ de L. Notant $r_\# : C(P,R) \to C(Q,R)$ le morphisme induit, définissons un morphisme de chaînes $\mu : C(L,R) \to S(X,R)$ en posant $\mu(\sigma) = \vartheta \circ r_\#(\sigma_0)$ pour tout simplexe σ de L. Si σ appartient à M, alors $r_\#(\sigma_0) = \sigma_0$, donc $\mu(\sigma) = \vartheta(\sigma_0) = \nu(\sigma)$, ce qui montre que μ prolonge ν.

Pour achever de vérifier que X est un RAV algébrique, il ne reste plus qu'à montrer que μ est une réalisation algébrique de L relativement à $\mathcal{W}$. Pour cela, notant que $\mu\big(C(\sigma,R)\big) \subset \vartheta\big(C(((|\sigma| \times I) \cap Q, R)\big)$, il suffit de vérifier que, pour tout simplexe σ de L, il existe $W \in \mathcal{W}$ tel que $\vartheta\big(C(((|\sigma| \times I) \cap Q, R\big) \subset S(W,R)$. Puisque ν est une réalisation algébrique partielle de L relativement à $\mathcal{V}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ contenant $\|\nu(\sigma')\|$ pour toute face σ' de σ appartenant à M. D'après $(ii)(c)$, il existe, pour toute face σ' de σ, un $U_{\sigma'} \in \mathcal{U}$ contenant $\|\nu(\tau)\| \cup \|\zeta \circ \psi(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face τ de σ'. Il en résulte que $S\big(\mathrm{St}(V,\mathcal{U}), R\big)$ contient $\vartheta\big(C(((|\sigma \cap M|) \times I, R)\big)$. Soit s un simplexe de K tel que $\xi\big(C(\sigma, R)\big) \subset C(\mathrm{Tr}\, s, R)$. Tout simplexe de $\mathrm{Tr}\, s$ est contenu dans un simplexe s' de $\mathrm{Tr}\, s$ dont b_s est un sommet et, d'après (ii)(b), il existe un élément $U_{s'}$ de $\mathcal{U}$ tel que $\zeta\big(C(s', R)\big) \subset S(U_{s'}, R)$. En particulier, si x est un point de $\|\zeta(b_s)\|$, alors $U_{s'}$ contient x pour chaque tel s'. Il en résulte que $\zeta\big(C(\mathrm{Tr}\, s, R)\big)$ est contenu dans $S\big(\mathrm{St}(x,\mathcal{U}), R\big)$. Si v est un sommet de σ, alors v appartient à M, donc $\zeta(\psi(\nu(v))) = \xi(v)$ appartient à $S\big(\mathrm{St}(V,\mathcal{U}), R\big) \cap S\big(\mathrm{St}(x,\mathcal{U}), R\big)$. Comme $\xi(v) \neq 0$, nous avons $St(V,\mathcal{U}) \cap \mathrm{St}(x,\mathcal{U}) \neq \emptyset$ et, puisque $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$, $\mathrm{St}(V,\mathcal{U}) \cup \mathrm{St}(x,\mathcal{U})$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}^2(\mathcal{U})$, donc dans un élément W de $\mathcal{W}$; alors $S(W,R)$ contient $\vartheta\big(C(((|\sigma \cap M|) \times I, R\big) + \zeta\big(C(\mathrm{Tr}\, s, R)\big) \supset \vartheta\big(C(((|\sigma \cap M|) \times I, R)\big) + \vartheta\big(C(|\sigma| \times \{1\}, R)\big) = \vartheta(\big(C(((|\sigma| \times I) \cap Q, R\big)$. $\square$

Remarque. Si C est un compact fixé de X, le recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de (ii) peut être choisi de façon qu'il existe un sous-complexe fini L de K' et un voisinage W de C dans X tels que $\psi\big(S(X, \mathcal{V}, R) \cap S(W, R)\big) \subset C(L, R)$. En effet, nous pouvons supposer $\mathcal{U}_3$ localement fini. Il existe alors un voisinage ouvert W_1 de C ne rencontrant qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}_3$. Soit W un voisinage ouvert de C tel que $\overline{W} \subset W_1$. Soit $\mathcal{U}_3'$ le recouvrement ouvert de X formé des ensembles $U \setminus \overline{W}$ et $U \cap W_1$, où U parcourt les éléments de $\mathcal{U}_3$. Tout élément de $\mathcal{U}_3'$ rencontrant W ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}_3'$, donc si nous formons $\mathcal{V}$ en utilisant $\mathcal{U}_3'$ à la place de $\mathcal{U}_3$, le complexe $\mathrm{Tr}\, s$ est fini pour tout s tel que $V_s \cap W \neq \emptyset$, et nous pouvons prendre pour L la réunion (finie) de ces complexes finis.

4. Opérations sur les RAV algébriques. Dans cette section, nous prouverons quelques propriétés de stabilité de la classe des RAV algébriques analogues à des résultats connus sur les rétractes absolus de voisinage.

Proposition 2. *Tout ouvert d'un RAV algébrique est un RAV algébrique.*

Démonstration. Soient X un RAV algébrique et U un ouvert de X. Plongeons X comme fermé dans un sous-ensemble convexe C d'un espace normé. D'après le théorème 1, X est un rétracte de voisinage algébrique de C. D'après le lemme 3, U est un rétracte de voisinage algébrique de C, donc aussi de $C \setminus (X \setminus U)$. Mais U est fermé dans $C \setminus (X \setminus U)$ lequel, étant ouvert dans C, est un rétracte absolu de voisinage, et la conclusion résulte de la proposition 1 et de son corollaire. $\square$

Théorème 3. *Un espace métrisable dont tout point a un voisinage qui est un RAV algébrique est un RAV algébrique.*

Démonstration. D'après un théorème de Michael [14], cela résulte de la proposition 2 et des deux faits suivants :

(a) Si X est réunion disjointe d'ouverts qui sont des RAV algébriqes, alors c'est un RAV algébrique.

(b) Si $X = X_1 \cup X_2$ où les ouverts X_1 et X_2 sont des RAV algébriques, alors X est un RAV algébrique.

La vérification de (a) est élémentaire. Prouvons (b). Prenons des fermés F_1 et F_2 tels que $F_1 \subset X_1$, $F_2 \subset X_2$ et $F_1 \cup F_2 = X$. Posons $X_0 = X_1 \cap X_2$ et $F_0 = F_1 \cap F_2$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Posant $\mathcal{U}_i = \{U \cap X_i \,|\, U \in \mathcal{U}\}$, nous pouvons trouver, pour $i = 1, 2$, un recouvrement ouvert $\mathcal{V}_i$ de X_i vérifiant

(1) Toute réalisation algébrique partielle d'un complexe simplicial relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_i)$ se prolonge en une réalisation complète relativement à $\mathcal{U}_i$.

Soit $\mathcal{V}_0$ le recouvrement ouvert de X_0 formé des ensembles $V_1 \cap V_2 \cap X_0$ où V_1 appartient à $\mathcal{V}_1$ et V_2 à $\mathcal{V}_2$. D'après la proposition 2, X_0 est un RAV algébrique, donc nous pouvons trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de X_0 tel que

(2) toute réalisation algébrique partielle d'un complexe simplicial relativement à $\mathcal{W}$ se prolonge en une réalisation complète relativement à $\mathcal{V}_0$.

Prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de X vérifiant

(3) Tout élément de $\mathcal{G}$ rencontrant F_1 et F_2 rencontre F_0.

(4) Tout élément de $\mathcal{G}$ rencontrant F_0 est contenu dans un élément de $\mathcal{W}$.

(5) Pour $i = 1, 2$, tout élément de $\mathcal{G}$ rencontrant F_i est contenu dans un élément de $\mathcal{V}_i$.

Pour $i = 0, 1, 2$, soit $\mathcal{G}_i$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}$ rencontrant F_i. Alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_0$ d'après (3). Soient K un complexe simplicial et $\nu : C(L, R) \to S(X, R)$ une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{G}$. Pour $i = 0, 1, 2$, soit K_i le sous-complexe de K formé des simplexes σ pour lesquels il existe $G \in \mathcal{G}_i$ contenant $\|\nu(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à L. Nous avons $K = K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2 = K_0$ (car si, par exemple, $\|\nu(\tau)\| \cap F_1 \neq \emptyset$ et si un élément G de $\mathcal{G}_2$ contient $\|\nu(\tau)\|$, alors G appartient à $\mathcal{G}_0$ d'après (3)). La définition de $\mathcal{G}_0$ et (4) entraînent que la restriction de ν à $C(L \cap K_0, R)$ est une réalisation algébrique partielle de K_0 relativement à $\mathcal{W}$, donc se prolonge en une réalisation algébrique complète $\mu_0 : C(K_0, R) \to S(X_0, R)$ relativement à $\mathcal{V}_0$.

Pour $i = 1, 2$, μ_0 et $\nu|C(K_i \cap L, R)$ se combinent en un morphisme de chaînes $\nu_i : C(K_0 \cup (K_i \cap L), R) \to S(X_i, R)$. Soit σ un simplexe de K_i. Il y a un élément G de $\mathcal{G}_i$ contenant $\|\nu(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à L ;

d'après (5), G est contenu dans un élément V de $\mathcal{V}_i$. Pour toute face σ' de σ appartenant à K_0, il y a un élément $V^0_{\sigma'}$ de $\mathcal{V}_0$ contenant $\|\mu_0(\tau)\|$ pour toute face τ de σ' ; par définition de $\mathcal{V}_0$, il y a un élément $V_{\sigma'}$ de $\mathcal{V}_i$ contenant $V^0_{\sigma'}$. Si v est un sommet de σ', il appartient à $L \cap K_0$, donc $\emptyset \neq \|\nu(v)\| = \|\mu_0(v)\| \subset V \cap V_{\sigma'}$. Il en résulte que $\mathrm{St}(V, \mathcal{V}_i)$ contient $\|\nu_i(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à $L \cup K_0$. Le morphisme ν_i est donc une réalisation algébrique partielle de K_i relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_i)$, donc se prolonge en une réalisation algébrique complète μ_i de K_i relativement à $\mathcal{U}_i$. Puisque $K = K_1 \cup K_2$, μ_1 et μ_2 se combinent en un morphisme de chaînes $\mu : C(K, R) \to S(X, R)$ qui est une réalisation algébrique complète de K relativement à $\mathcal{U}$. $\square$

Théorème 4. *Le produit de deux RAV algébriques est un RAV algébrique.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient X_1, X_2 deux RAV algébriques. Pour $i = 1, 2$, plongeons X_i comme fermé dans un sous-ensemble convexe C_i d'un espace normé. Alors X_i est un rétracte de voisinage algébrique de C_i, donc il existe un voisinage ouvert O_i de X_i dans C_i, un recouvrement ouvert $\mathcal{U}_i$ de O_i et un morphisme de chaînes $\mu_i : S(O_i, \mathcal{U}_i, R) \to S(X_i, R)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2. L'ensemble $O = O_1 \times O_2$ est un voisinage ouvert de $X_1 \times X_2$ dans $C_1 \times C_2$ et les ensembles de la forme $U_1 \times U_2$ où U_i appartient à $\mathcal{U}_i$ forment un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de O.

Soient $\xi : S(C_1 \times C_2, R) \to S(C_1, R) \otimes S(C_2, R)$ et $\zeta : S(C_1, R) \otimes S(C_2, R) \to S(C_1 \times C_2, R)$ des applications d'Eilenberg-Zilber ([5] VI.12.1); ce sont des morphismes de chaînes vérifiant $\xi\big(S(A_1 \times A_2, R)\big) \subset S(A_1, R) \otimes S(A_2, R)$ et $\zeta\big(S(A_1, R) \otimes S(A_2, R)\big) \subset S(A_1 \times A_2, R)$ quels que soient $A_1 \subset C_1$ et $A_2 \subset C_2$. Par suite, ξ envoie $S(O, \mathcal{U}, R)$ dans $S(O_1, \mathcal{U}_1, R) \otimes S(O_2, \mathcal{U}_2, R)$ et ζ envoie $S(X_1, R) \otimes S(X_2, R)$ dans $S(X_1 \times X_2, R)$, donc nous pouvons définir un morphisme de chaînes $\chi : S(O, \mathcal{U}, R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ par $\chi = \zeta \circ (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ \xi$. Notons que si c appartient à $S(O, \mathcal{U}, R) \cap S(X_1 \times X_2, R)$, alors $\xi(c)$ appartient à $S(X_1, R) \otimes S(X_2, R)$ et, comme la restriction de μ_i à $S(X_i, R)$ est l'identité, nous avons $\chi(c) = \zeta \circ \xi(c)$. En outre, il existe une homotopie $h : S(X_1 \times X_2, R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ telle que $\partial h + h\partial = \zeta \circ \xi - id$ et que $h\big(S(A_1 \times A_2, R)\big) \subset S(A_1 \times A_2, R)$ quels que soient $A_1 \subset X_1$ et $A_2 \subset X_2$ ([5] VI.12.1).

Soit M le sous-complexe de $\Sigma(C_1 \times C_2)$ qui est réunion des cellules $|\sigma|$ telles que σ appartienne à $S(O, \mathcal{U}, R)$, et soit $N = M \cap \Sigma(X_1 \times X_2)$. Posons $P = M \times I$ et $Q = (M \times \{1\}) \cup (N \times I)$. Définissons $\vartheta : C(Q, R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ en posant $\vartheta(\sigma_1) = \chi(\sigma)$ pour toute cellule $|\sigma|$ de M et $\vartheta(\sigma_0) = \sigma$, $\vartheta(\sigma_I) = h(\sigma)$ pour toute cellule $|\sigma|$ de N. Si $|\sigma|$ est une cellule de N, alors $\chi(\sigma) = \zeta \circ \xi(\sigma)$ et la relation $\partial h(\sigma) + h\partial(\sigma) = \zeta \circ \xi(\sigma) - \sigma$ entraîne que ϑ est un morphisme de chaînes.

Il existe une rétraction cellulaire r de P sur Q telle que $r(|\sigma| \times I) \subset (|\sigma| \times I) \cap Q$ pour toute cellule $|\sigma|$; soit $r_\# : C(P,R) \to C(Q,R)$ le morphisme induit. Définissons un morphisme de chaînes $\mu : S(O,\mathcal{U},R) \to S(X_1 \times X_2, R)$ en posant $\mu(\sigma) = \vartheta \circ r_\#(\sigma_0)$ pour tout simplexe σ appartenant à $S(O,\mathcal{U},R)$. Si ce simplexe appartient aussi à $S(X_1 \times X_2, R)$, alors $r_\#(\sigma_0) = \sigma_0$ et $\mu(\sigma) = \vartheta(\sigma_0) = \sigma$, d'où $\mu(c) = c$ pour c dans $S(X_1 \times X_2, R) \cap S(O,\mathcal{U},R)$.

Tout voisinage d'un point (x_1, x_2) de $X_1 \times X_2$ contient un voisinage de la forme $V_1 \times V_2$ et, pour $i = 1, 2$, il existe un voisinage W_i de x_i dans X_i qui est contenu dans un élément de $\mathcal{U}_i$ et tel que $\mu_i\big(S(W_i, R)\big) \subset S(V_i, R)$. Si τ est un simplexe de $W_1 \times W_2$, alors $\xi(\sigma)$ appartient à $S(W_1, R) \otimes S(W_2, R)$, donc $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\xi(\sigma))$ appartient à $S(V_1, R) \otimes S(V_2, R)$ et $\chi(\sigma)$ appartient à $S(V_1 \times V_2, R)$. Si en outre σ appartient à $X_1 \times X_2$, alors $V_1 \times V_2$ contient $\|\sigma\|$ (les relations $\mu_i(c) = c$ pour toute 0-chaîne de $S(O_i, \mathcal{U}_i, R) \cap S(X_i, R)$ et $\mu_i\big(S(W_i, R) \subset S(V_i, R)\big)$ garantissent que V_i contient W_i) donc aussi $\|h(\sigma)\|$. Il en résulte que $\vartheta\big(C((|\sigma| \times I) \cap Q), R\big) \subset S(V_1 \times V_2, R)$ et, puisque $r(|\sigma| \times I) \subset (|\sigma| \times I) \cap Q$, $\mu(\sigma)$ appartient à $S(V_1 \times V_2, R)$. Cela montre que $\mu\big(S(W_1 \times W_2, R)\big) \subset S(V_1 \times V_2, R)$ et achève de prouver que $X_1 \times X_2$ est un rétracte de voisinage algébrique de $C_1 \times C_2$. La conclusion résulte de la proposition 1. $\square$

5. Propriétés homologiques. Pour $U \subset V$, nous notons j^q_{UV} (resp. j_{UV}) l'homomorphisme de $\widetilde{H}_q(U, R)$ (resp. $\widetilde{H}(U, R)$) dans $\widetilde{H}_q(V, R)$ (resp. $\widetilde{H}(V, R)$) induit par l'inclusion. L'espace X est dit *q-lc* si, pour tout point x de X et tout voisinage V de x, il existe un voisinage U de x contenu dans V et tel que $\operatorname{im} j^q_{UV} = 0$. X est dit *lc^n* s'il est *q-lc* pour tout $q \le n$.

Proposition 3. *Soit X un R-RAV algébrique.*

(*i*) *Pour tout point x de X et tout voisinage V de x, il existe un voisinage U de x contenu dans V et tel que* $\operatorname{im} j_{UV} = 0$.

(*ii*) *Si R est nœthérien, alors pour tout compact C de X et tout voisinage V de C, il existe un voisinage U de C contenu dans V et tel que* $\operatorname{im} j_{UV}$ *soit de type fini.*

Démonstration. Soit V un ouvert de X. Puisque V est un RAV algébrique, le théorème 2 nous fournit un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de V, un complexe simplicial K, des morphismes de chaînes $\psi : S(V,\mathcal{U},R) \to C(K', R)$, $\zeta : C(K', R) \to S(V, R)$ et une homotopie $h : S(V,\mathcal{U},R) \to S(V,R)$ entre l'inclusion et $\zeta \circ \psi$, le morphisme ψ ayant la propriété que, pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe un simplexe s de K tel que $\psi(S(U,R)) \subset C(\operatorname{Tr} s, R)$.

Soit x un point de X et soit U un élément de $\mathcal{U}$ contenant x. Alors $h|S(U,R)$ est une homotopie entre l'inclusion de $S(U,R)$ dans $S(V,R)$ et la restriction de $\zeta \circ \psi$, donc $j_{UV} = \zeta_* \circ \psi_* | \widetilde{H}(U,R)$ et, pour un certain simplexe s de K, $\operatorname{im} j_{UV} \subset \zeta_*\big(\widetilde{H}(\operatorname{Tr} s, R)\big) = 0$ puisque $\operatorname{Tr} s$ est contractile.

Pour prouver (ii), nous utiliserons la remarque qui suit le théorème 2 : C étant fixé, il est possible de choisir K de façon qu'il existe un sous-complexe fini L de K' et un voisinage W de C dans V tels que $\psi\big(S(V,\mathcal{U},R) \cap S(W,R)\big) \subset C(L,R)$. Nous avons $S(W,R) \cap S(V,\mathcal{U},R) = S(W,\mathcal{W},R)$ où $\mathcal{W} = \{W \cap U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement ouvert de W. L'inclusion i de $S(W,\mathcal{W},R)$ dans $S(W,R)$ induit un isomorphisme sur l'homologie, donc $\operatorname{im} j_{WV} = \operatorname{im} j_{WV} \circ i_* = \operatorname{im} \zeta_* \circ \psi_*\big(\widetilde{H}(S(W,\mathcal{W},R))\big)$, d'où $\operatorname{im} j_{UV} \subset \zeta_*\big(\widetilde{H}(L,R)\big)$. Si R est nœthérien, alors $\widetilde{H}(L,R)$ est un R-module de type fini et il en est de même de tout sous-module de $\zeta_*\big(\widetilde{H}(L,R)\big)$.

Notons que, quand l'anneau R est arbitraire, l'argument précédent montre que l'on a encore $\operatorname{im} j^q_{UV} = 0$ pour tout q assez grand. □

La propriété (i) de la proposition 3 ne caractérise pas les RAV algébriques. Le compact localement contractile X construit par Borsuk ([1], p 124) vérifie évidemment cette condition, mais n'est pas un RAV algébrique puisque $H_k(X,R) \neq 0$ pour tout k. Le résultat suivant fournit néanmoins une réciproque partielle de la proposition 3(i).

Proposition 4. *Soit X un espace métrisable lc^n. Si $H_q(U,R) = 0$ pour tout ouvert U de X et tout $q > n$, alors X est un RAV algébrique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Puisque X est lc^n, nous pouvons, en partant de $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}$, construire par récurrence descendante des recouvrements ouverts $\mathcal{U}_k$ et $\mathcal{V}_k$ de X vérifiant

(1) $\operatorname{St}(\mathcal{V}_{k-1})$ est plus fin que $\mathcal{U}_k$ pour $0 < k \leq n+1$.

(2) Pour $0 \leq k \leq n$ et tout $U \in \mathcal{U}_k$, il existe $V \in \mathcal{V}_k$ contenant U et tel que $\operatorname{im} j^k_{UV} = 0$.

Soient K un complexe simplicial et $\nu : C(L,R) \to S(X,R)$ une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{U}_0$. Notons $K^{(p)}$ le p-squelette de K. Si $\sigma = [v_0, v_1]$ est un 1-simplexe de $K \setminus L$ de bord $\partial\sigma = v_1 - v_0$, il y a un élément U de $\mathcal{U}_0$ contenant $\|\nu(v_0)\| \cup \|\nu(v_1)\|$. D'après (2), il existe $V \in \mathcal{V}_0$ contenant U et tel que $\operatorname{im} j^0_{UV} = 0$. Puisque ν conserve l'augmentation, $\nu(v_1) - \nu(v_0)$ représente un élément de $\widetilde{H}_0(U,R)$, donc il existe une chaîne $\nu_1(\sigma) \in S(V,R)$ telle que $\partial\nu_1(\sigma) = \nu(v_1) - \nu(v_0)$. Nous prolongeons ainsi ν en un morphisme de chaînes $\nu_1 : C(L \cup K^{(1)}, R) \to S(X,R)$.

Si σ est un simplexe de K, il y a un élément U de $\mathcal{U}_0$ contenant $\|\nu(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à L. Pour tout 1-simplexe σ' de $\sigma \setminus L$, il y a un élément $V_{\sigma'}$ de $\mathcal{V}_0$ contenant $\|\nu_1(\sigma')\|$ et $\|\nu(v)\|$ pour tout sommet v de σ', donc $U \cap V_{\sigma'} \neq \emptyset$, ce qui montre que $\mathrm{St}(U, \mathcal{V}_0)$ contient $\|\nu_1(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à $L \cup K^{(1)}$. Puisque $\mathcal{U}_0$ est plus fin que $\mathcal{V}_0$, $\mathrm{St}(U, \mathcal{V}_0)$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{V}_0)$, donc dans un élément de $\mathcal{U}_1$. Cela montre que ν_1 est une réalisation algébrique partielle relativement à $\mathcal{U}_1$.

Soit $1 \leq k \leq n$, et supposons construite une réalisation algébrique partielle $\nu_k : C(L \cup K^{(k)}, R) \to S(X, R)$ relativement à $\mathcal{U}_k$. Si σ est un $(k+1)$-simplexe de $K \setminus L$, il y a un élément U de $\mathcal{U}_k$ contenant $\|\nu_k(\tau)\|$ pour toute k-face τ de σ. D'après (2), il existe $V \in \mathcal{V}_k$ contenant U et tel que $\operatorname{im} j^k_{UV} = 0$. Puisque $\nu_k(\partial\sigma)$ représente un élément de $\widetilde{H}_k(U, R)$, il y a donc un élément $\nu_{k+1}(\sigma)$ de $S(V, R)$ tel que $\partial\nu_{k+1}(\sigma) = \nu_k(\partial\sigma)$. Cela définit le prolongement ν_{k+1} de ν_k à $C(L \cup K^{(k+1)}, R)$. La vérification du fait que ν_{k+1} est une réalisation algébrique partielle relativement à $\mathcal{U}_{k+1}$ se fait comme précédemment.

Reste à prolonger ν_{n+1} en un morphisme $\mu : C(K, R) \to S(X, R)$. Pour tout simplexe σ de K, il existe $U \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_{n+1}$ contenant $\|\nu_{n+1}(\tau)\|$ pour toute face τ de σ appartenant à $L \cup K^{(n+1)}$. Puisque $\mathcal{U}$ est localement fini, l'ensemble de tous les $U \in \mathcal{U}$ ayant cette propriété est fini, donc leur intersection U_σ est ouverte. Evidemment, $U_\sigma \subset U_{\sigma'}$ si $\sigma \leq \sigma'$ et puisque $H_{\dim\sigma-1}(U_\sigma, R) = 0$ quand σ n'appartient pas à $K^{(n+1)}$, il est possible de prolonger μ à $C(K, R)$ de façon que $\|\mu(\sigma)\| \subset U_\sigma$ pour tout simplexe σ de K ; alors U_σ contient $\|\mu(\tau)\|$ pour toute face τ de σ, ce qui montre que μ est une réalisation algébrique complète de K relativement à $\mathcal{U}$, et la proposition en résulte. $\square$

La proposition précédente permet de donner des exemples intéressants de RAV algébriques. Pour justifier certaines affirmations faites ci-dessous, rappelons que si un espace métrisable est lc^n, alors ses groupes d'homologie singulière coïncident avec ses groupes d'homologie de Čech en dimension $\leq n$ (voir [12]).

Exemple. Soit P un polyèdre fini, et soit X le quotient de P par une décomposition semi-continue supérieurement dont toutes les classes sont de forme triviale (voir [13] pour la définition). Alors X est LC^n pour tout n, donc aussi lc^n pour tout n ([13], Remarque 4 page 139). Le théorème de Vietoris-Begle garantit que $H_q(U, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout ouvert U de X et $q > \dim P$. En utilisant l'exemple de Dranishnikov [7], nous obtenons ainsi des RAV algébriques compacts de dimension cohomologique finie mais de dimension infinie.

6. Points fixes. Soient X un $\mathbb{Q}$-RAV algébrique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Puisque nous identifions naturellement l'homologie du complexe

$S(X,\mathcal{U},\mathbb{Q})$ à $H(X,\mathbb{Q})$, tout morphisme de chaînes φ de $S(X,\mathcal{U},\mathbb{Q})$ dans $S(X,\mathbb{Q})$ induit un endomorhisme φ_* de $H(X,\mathbb{Q})$. Si $\varphi_*\big(H(X,\mathbb{Q})\big)$ est de dimension finie, nous pouvons définir le nombre de Lefschetz $\Lambda(\varphi)$ comme égal à $\Lambda(\varphi_*)$ (voir [10], §15). La proposition $3(ii)$ garantit que $\varphi_*\big(H(X,\mathbb{Q})\big)$ est de dimension finie s'il existe un compact C tel que $S(C,\mathbb{Q})$ contienne $\varphi\big(S(X,\mathcal{U},\mathbb{Q})\big)$, et nous avons alors la version suivante du théorème de point fixe de Lefschetz-Hopf pour les morphismes de chaînes.

Théorème 5. *Soient X un $\mathbb{Q}$-RAV algébrique, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X et $\varphi : S(X,\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to S(X,\mathbb{Q})$ un morphisme de chaînes. Supposons qu'il existe un compact C de X tel que $S(C,\mathbb{Q})$ contienne $\varphi\big(S(X,\mathcal{U},\mathbb{Q})\big)$. Si $\Lambda(\varphi) \neq 0$, alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X plus fin que $\mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ et $c \in S(V,\mathbb{Q})$ tels que $\|\varphi(c)\| \cap V \neq \emptyset$.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X plus fin que $\mathcal{U}$ et tel que $\|\varphi(c)\| \cap V = \emptyset$ pour tout $V \in \mathcal{V}$ et tout $c \in S(V,\mathbb{Q})$. Soit $\mathcal{W}'$ un recouvrement ouvert de X tel que $\mathrm{St}(\mathcal{W}')$ soit plus fin que $\mathcal{V}$. La *démonstration* du théorème 2 et la remarque qui le suit nous permettent de trouver un complexe simplicial K, un recouvrement ouvert $\mathcal{W} = \{W_s \,|\, s \in \mathcal{S}\}$ indexé par les simplexes de K tel que $W_s \cap W_{s'} = \emptyset$ entraîne que $s \cup s'$ n'est pas un simplexe de K, un sous-complexe fini L de K', des morphismes de chaînes $\psi : S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q}) \to C(K',\mathbb{Q})$, $\zeta : C(K',\mathbb{Q}) \to S(X,\mathbb{Q})$ et une homotopie $h : S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q}) \to S(X,\mathbb{Q})$ entre l'inclusion et $\zeta \circ \psi$ vérifiant

(a) $\psi\big(S(W_s,\mathbb{Q})\big) \subset C(\mathrm{Tr}\, s,\mathbb{Q})$ pour tout $s \in \mathcal{S}$,

(b) ζ est une réalisation algébrique complète de K' relativement à $\mathcal{W}'$,

(b$'$) pour tout simplexe s de K, $\|\zeta(b_s)\| \subset W_s$,

(c) pour tout simplexe singulier σ appartenant à $S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q})$, il existe $W \in \mathcal{W}$ contenant $\|\tau\| \cup \|\zeta \circ \psi(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face τ de σ,

(d) $\psi\big(S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q}) \cap S(C,\mathbb{Q})\big) \subset C(L,\mathbb{Q})$.

Il existe (voir [15], § 4.4) un opérateur de subdivision $\mathrm{Sd} : S(X,\mathbb{Q}) \to S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q})$ tel que $\mathrm{Sd}(\sigma) = \sigma$ pour $\sigma \in S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q})$ et $\|\mathrm{Sd}(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne c de X. Alors $\psi' = \psi \circ \mathrm{Sd} : S(X,\mathbb{Q}) \to C(K',R)$ prolonge ψ et, puisque $\mathrm{Sd}(S(C,\mathbb{Q})) \subset S(C,\mathbb{Q})$, nous avons $\psi'(S(C,\mathbb{Q})) \subset S(L,\mathbb{Q})$.

D'après (b), $\zeta\big(C(K',\mathbb{Q})\big)$ est contenu dans $S(X,\mathcal{W}',\mathbb{Q}) \subset S(X,\mathcal{V},\mathbb{Q})$, donc $\varphi \circ \zeta$ est défini. Soit ι l'inclusion de $S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q})$ dans $S(X,\mathbb{Q})$. Avec nos identifications, ι_* est l'identité de $H(X,\mathbb{Q})$, donc $(\varphi\circ\zeta\circ\psi')_* = (\varphi\circ\zeta\circ\psi')_*\circ\iota_* = (\varphi\circ\zeta)_*\circ(\psi'\circ\iota)_* = \varphi_*\circ\zeta_*\circ\psi_* = \varphi_*$ puisque $\zeta\circ\psi$ est homotope à l'inclusion de $S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q})$ dans $S(X,\mathcal{V},\mathbb{Q})$ d'après (c). Nous avons donc $\Lambda(\varphi_*) = \Lambda((\varphi \circ \zeta \circ \psi')_*) = \Lambda((\psi' \circ \varphi \circ \zeta)_*)$ ([10], §15). Mais l'image de $\psi' \circ \varphi$ est contenue dans

$C(L,\mathbb{Q})$ et, puisque L est un complexe fini, $\Lambda(\psi'\circ\varphi\circ\zeta)$ est défini et $\Lambda(\psi'\circ\varphi\circ\zeta) = \Lambda((\psi'\circ\varphi\circ\zeta)_*)$.

Soient s un simplexe de K et s' un simplexe de $\mathrm{Tr}\, s$. Comme s' est contenu dans un simplexe de $\mathrm{Tr}\, s$ contenant b_s, il y a un élément W_0' de $\mathcal{W}'$ contenant $\|\zeta(b_s)\|$ et $\|\zeta(s'')\|$ pour toute face s'' de s'. D'après (b′), $W_0'\cap W_s \neq \emptyset$. Le choix de Sd garantit que $\mathrm{Sd}(\varphi\circ\zeta(s'))$ appartient à $S(X,\mathcal{W},\mathbb{Q})\cap S(\|\varphi\circ\zeta(s')\|,\mathbb{Q})$, donc $\mathrm{Sd}\circ\varphi(s')$ est somme finie d'éléments c_i tels que $\|c_i\|$ soit contenu dans $\|\varphi\circ\zeta(s')\|$ et dans un élément W_{s_i} de $\mathcal{W}$. Mais $W_{s_i}\cap W_s = \emptyset$ car sinon $W_{s_i}\cup W_s\cup W_0'$ serait contenu dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{W}')$, donc dans un élément V_0 de $\mathcal{V}$. Cet élément V_0 contiendrait $\|\zeta(s')\|$ et vérifierait $V_0\cap\|\varphi\circ\zeta(s')\|\neq\emptyset$ contrairement à notre hypothèse. Puisque $W_{s_i}\cap W_s=\emptyset$, nous avons $\mathrm{Tr}\, s\cap\mathrm{Tr}\, s_i=\emptyset$, donc le coefficient de $\psi(c_i)$ sur s' est nul. Ceci étant vrai pour tout i, le coefficient de $\psi'\circ\varphi\circ\zeta(s') = \psi(\sum_i c_i)$ sur s' est nul. Cela étant vrai en particulier pour tout simplexe s' de L, nous avons $\Lambda(\psi'\circ\varphi\circ\zeta) = 0$, ce qui est absurde car $\Lambda(\psi'\circ\varphi\circ\zeta) = \Lambda(\varphi_*)\neq 0$. $\square$

Si f est une fonction continue telle que $f(X)$ soit contenu dans un compact, alors le théorème 5 s'applique au morphisme $f_\#$ induit par f et, posant $\Lambda(f)=\Lambda(f_*)$, nous obtenons la généralisation aux RAV algébriques du théorème classique de Lefschetz-Hopf:

Théorème 6. *Soient X un $\mathbb{Q}$-RAV algébrique et $f: X\to X$ une fonction continue telle que $f(X)$ soit contenu dans un sous-ensemble compact. Si $\Lambda(f)\neq 0$, alors f a un point fixe.*

Le théorème 5 est aussi applicable aux fonctions multivoques. Une fonction multivoque compacte de X dans X est une fonction faisant correspondre à tout élément x de X un compact non vide $F(x)$ de X et telle que $\bigcup_{x\in X} F(x)$ soit contenu dans un compact. Une telle fonction est dite semi-continue supérieurement, ou s.c.s., si, pour tout point x de X et tout voisinage U de $F(x)$, il existe un voisinage V de x tel que $F(y)\subset U$ pour tout $y\in V$. Un compact est dit $\mathbb{Q}$-acyclique si ses groupes d'homologie de Čech réduite à coefficients $\mathbb{Q}$ sont triviaux.

Théorème 7. *Soit X un $\mathbb{Q}$-RA algébrique et soit F une fonction multivoque compacte s.c.s. de X dans X. Si $F(x)$ est $\mathbb{Q}$-acyclique pour tout $x\in X$, alors il existe $x\in X$ tel que $x\in F(x)$.*

Démonstration. Soit C un compact contenant $\bigcup_{x\in X} F(x)$, et soit f un plongement de C dans le cube de Hilbert Q. Soit $Z = X\cup_f Q$ l'espace d'adjonction. Puisque f est un plongement, X peut être identifié à son image dans Z, qui est fermée dans Z. Nous identifions aussi Q à son image dans Z. Puisque

C est compact, Z est métrisable. Soit d une distance définissant la topologie de Z. Pour $\delta > 0$, $E \subset Z$ et $A \subset E$, nous posons $B_E(A, \delta) = \{z \in E \mid d(z, A) < \delta\}$, et si $A = \{x\}$, nous notons $B_E(x, \delta)$ au lieu de $B_E(\{x\}, \delta)$.

S'il n'existe aucun x tel que $x \in F(x)$, la compacité de F permet de trouver un $\epsilon_0 > 0$ tel que $d(x, F(x)) > 2\epsilon_0$ pour tout $x \in X$. Puisque X est un $\mathbb{Q}$-RA algébrique et est fermé dans Z, c'est un rétracte algébrique de Z, donc il existe un morphisme de chaînes $\mu : S(Z, \mathbb{Q}) \to S(X, \mathbb{Q})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2. La condition (ii) de cette définition et la compacité de C nous permettent de trouver un $\epsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in C$, $\mu\big(S(B_Z(x, 2\epsilon_1), \mathbb{Q})\big) \subset S(B_X(x, \epsilon_0), \mathbb{Q})$.

Affirmation. Il existe des recouvrements ouverts $\mathcal{G}$ et $\mathcal{V}$ de X et un morphisme de chaînes $\xi : S(X, \mathcal{G}, \mathbb{Q}) \to S(Q, \mathbb{Q})$ tels que $\operatorname{diam} V < \epsilon_0$ pour tout $V \in \mathcal{V}$ et que, pour tout $G \in \mathcal{G}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ contenant G et tel que $\xi(S(G, \mathbb{Q})) \subset S(B_Q(F(V), \epsilon_1), \mathbb{Q})$.

Avant de prouver cette affirmation, montrons que le théorème en résulte. En appliquant le théorème 2 au recouvrement de Q par les boules $B_Q(z, \epsilon_1/2)$, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{H}$ de Q, un complexe simplicial fini K et des morphismes de chaînes $\psi : S(Q, \mathcal{H}, \mathbb{Q}) \to C(K', \mathbb{Q})$ et $\zeta : C(K', \mathbb{Q}) \to S(Q, \mathbb{Q})$ tels que, pour tout simplexe singulier σ de $S(Q, \mathcal{H}, \mathbb{Q})$, $\|\sigma\| \cup \|\zeta \circ \psi(\sigma)\|$ soit contenu dans une boule $B_Q(z, \epsilon_1/2)$. Soit $Sd : S(Q, \mathbb{Q}) \to S(Q, \mathcal{H}, \mathbb{Q})$ un opérateur de subdivision tel que $\|Sd(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne c.

Soit $G \in \mathcal{G}$ et soit $c \in S(G, \mathbb{Q})$. La chaîne $Sd(\xi(c))$ est une combinaison linéaire $Sd(\xi(c)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ et $\|\sigma_i\|$ est contenu dans $\|\xi(c)\|$ et dans un élément de $\mathcal{H}$. Pour tout i, $\|\sigma_i\| \cup \|\zeta \circ \psi(\sigma_i)\|$ est contenu dans une boule $B_Q(z_i, \epsilon_1/2)$, donc de diamètre inférieur à ϵ_1. Soit $y \in \|\sigma_i\|$. Puisque $\|\sigma_i\|$ est contenu dans $\|\xi(c)\|$, il existe $V \in \mathcal{V}$ contenant G et $x \in F(V)$ tel que $d(y, x) < \epsilon_1$, donc $\|\zeta \circ \psi(\sigma_i)\|$ est contenu dans la boule $B_Q(x, 2\epsilon_1)$. Alors $\|\mu(\zeta \circ \psi(\sigma_i))\|$ est contenu dans $B_X(x, \epsilon_0) \subset B_X(F(V), \epsilon_0)$. Cela étant vrai pour tout i, le support de $\mu \circ \zeta \circ \psi(Sd(\xi(c))) = \mu \circ \zeta \circ \psi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i)$ est contenu dans $\bigcup_{i=1}^{n} \|\mu \circ \zeta \circ \psi(\sigma_i)\| \subset B_X(F(V), \epsilon_0)$.

Soit $\varphi = \mu \circ \zeta \circ \psi \circ Sd \circ \xi : S(X, \mathcal{G}, \mathbb{Q}) \to S(X, \mathbb{Q})$. D'après ce qui précède, pour tout $G \in \mathcal{G}$ et toute chaîne $c \in S(G, \mathbb{Q})$, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $G \subset V$ et $G \cap \|\varphi(c)\| \subset G \cap B_X(F(V), \epsilon_0)$. Mais si y appartient à $B_X(F(V), \epsilon_0)$, il existe $x \in V$ et $u \in F(x)$ tels que $d(y, u) < \epsilon_0$, d'où $d(y, G) \geq d(y, V) \geq d(u, x) - d(y, u) - \operatorname{diam} V > 2\epsilon_0 - \epsilon_0 - \epsilon_0 = 0$, donc $G \cap \|\varphi(c)\| = \emptyset$. D'autre part, l'image de φ est contenue dans $\mu\big(\zeta(C(K', \mathbb{Q}))\big)$, qui est un espace vectoriel de dimension finie, et si les chaînes c_j, $1 \leq j \leq m$, forment une base de cet espace vectoriel, alors $\|\varphi(c)\|$ est contenu dans le compact $\bigcup_{i=1}^{m} \|c_j\|$ pour toute chaîne

$c \in S(X, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$. D'après le théorème 5, nous devons avoir $\Lambda(\varphi) = 0$, ce qui est absurde car, l'homologie de X étant triviale, $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi_*) = 1$.

Preuve de l'affirmation. Si $G \subset V$ sont deux sous-ensembles de X et $0 < \eta < \epsilon$, nous notons $J(G, \eta, V, \epsilon)$ l'image de l'homomorphisme de $\widetilde{H}(B_Q(F(G), \eta), \mathbb{Q})$ dans $\widetilde{H}(B_Q(F(V), \epsilon), \mathbb{Q})$ induit par l'inclusion.

Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement de X par des ouverts de diamètre inférieur à ϵ_0. Soit $\mathcal{W}_0 = \{W_\alpha \,|\, \alpha \in A_0\}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que $\mathrm{St}(\mathcal{W}_0)$ soit plus fin que $\mathcal{V}$. Pour $\alpha \in A_0$, posons $\epsilon_\alpha = \epsilon_1$. Pour $n \geq 0$, construisons par récurrence des recouvrements ouverts localement finis $\mathcal{G}_n = \{G_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda_n\}$ et $\mathcal{W}_n = \{W_\alpha \,|\, \alpha \in A_n\}$ de X, ainsi que des nombres $\delta_\lambda > 0$, $\lambda \in \Lambda_n$, et $0 < \epsilon_\alpha \leq \epsilon_1$, $\alpha \in A_n$, vérifiant

(1) Pour tout $\lambda \in \Lambda_n$, il existe $\alpha \in A_n$ tel que $G_\lambda \subset W_\alpha$ et $J(G_\lambda, \delta_\lambda, W_\alpha, \epsilon_\alpha) = 0$.

(2) $\mathrm{St}(\mathcal{W}_{n+1})$ est plus fin que $\mathcal{G}_n$.

(3) Pour tout $\alpha \in A_{n+1}$ et tout $m \leq n$, W_α ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}_m$ et $\epsilon_\alpha = \min\{\delta_\lambda \,|\, \lambda \in \bigcup_{m=0}^{n} \Lambda_n$ et $G_\lambda \cap W_\alpha \neq \emptyset\}$.

Supposons $\mathcal{W}_n$ et les ϵ_α, $\alpha \in A_n$, construits. Soit $x \in X$ et soit $\alpha_x \in A_n$ tel que $x \in W_{\alpha_x}$. Puisque $F(x)$ est $\mathbb{Q}$-acyclique, la continuité de l'homologie de Čech garantit que si O est un voisinage de $F(x)$ dans Q, il y a un voisinage P de $F(x)$ dans Q, contenu dans O et tel que $\mathrm{im}\, j_{PO} = 0$. Il y a donc un $\delta_x > 0$ tel que l'image de l'homomorphisme de $\widetilde{H}(B_Q(F(x), 2\delta_x), \mathbb{Q})$ dans $\widetilde{H}(B_Q(F(W_{\alpha_x}), \epsilon_{\alpha_x}), \mathbb{Q})$ induit par l'inclusion soit triviale. Puisque F est s.c.s., il y a un voisinage G_x de x contenu dans V_{α_x} et tel que $F(G_x) \subset B_Q(F(x), \delta_x)$. Alors $B_Q(F(G_x), \delta_x)$ est contenu dans $B_Q(F(x), 2\delta_x)$, donc $J(G_x, \delta_x, W_{\alpha_x}, \epsilon_{\alpha_x}) = 0$. Soit $\mathcal{G}_n = \{G_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda_n\}$ un recouvrement ouvert localement fini de X plus fin que $\{G_x \,|\, x \in X\}$. Prenant, pour $\lambda \in \Lambda_n$, un x_λ tel que $G_\lambda \subset G_{x_\lambda}$ et posant $\delta_\lambda = \delta_{x_\lambda}$, la condition (1) est vérifiée. Nous pouvons ensuite trouver $\mathcal{W}_{n+1}$ vérifiant (2) et la première partie de (3). Pour $\alpha \in A_{n+1}$, ϵ_α est défini dans (3).

Pour $n \geq 0$, soit Σ_n le sous-complexe de $\Sigma(X)$ réunion des cellules $|\sigma|$ telles que le simplexe singulier σ appartienne à $S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$ et, pour $k \geq 0$, soit Σ_n^k le k-squelette de Σ_n. Soit $\eta : C(\Sigma_0, \mathbb{Q}) \to S(X, \mathcal{G}_0, \mathbb{Q})$ l'isomorphisme naturel. Soit $T = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma_0^k \times [k, \infty[\subset \Sigma_0 \times [0, \infty[$; c'est un CW-complexe de cellules $|\sigma| \times \{n\}$ et $|\sigma| \times [n, n+1]$ où $|\sigma|$ parcourt les cellules de Σ_0 et $n \geq \dim \sigma$. Pour $A \subset \Sigma_0$, soit $T_A = (A \times [0, \infty[) \cap T$. Soit $|K|$ une subdivision simpliciale de Σ_0, et soit $\widetilde{T}$ la subdivision cellulaire de T dont les cellules sont de la forme $|s| \times \{n\}$ et $|s| \times [n, n+1]$ où $|s|$ est un simplexe de $|K|$.

Construisons $\psi' : C(\Sigma_0, \mathbb{Q}) \to C(|K|, \mathbb{Q})$ comme dans la démonstration du lemme 1. Pour tout simplexe s de K, $T_{|s|}$ est contractile, et $T_{|s|} \subset T_{|s'|}$ si $s \leq s'$, donc il existe un morphisme de chaînes $\vartheta : C(|K|, \mathbb{Q}) \to C(\widetilde{T}, \mathbb{Q})$ tel que $\vartheta(s) \in T_{|s|}$ pour tout s. Soit $r : \widetilde{T} \to T$ une approximation cellulaire de l'identité telle que $r(T_{|\sigma|}) \subset T_{|\sigma|}$ pour toute cellule $|\sigma|$ de Σ_0. Nous allons construire un morphisme de chaînes $\mu : C(T, \mathbb{Q}) \to S(Q, \mathbb{Q})$ tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda_0$, il existe $V \in \mathcal{V}$ contenant G_λ et tel que $\mu\big(C(T_{\Sigma(G_\lambda)}, \mathbb{Q})\big) \subset S(B_Q(F(V), \epsilon_1), \mathbb{Q})$. Alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, $\mathcal{V}$ et $\xi = \mu \circ r_\# \circ \vartheta \circ \psi' \circ \eta^{-1}$ vérifieront l'affirmation car si σ est un simplexe singulier de G_λ, alors $r_\# \circ \vartheta \circ \psi' \circ \eta^{-1}(\sigma)$ appartient à $C(T_{\Sigma(G_\lambda)}, \mathbb{Q})$.

Nous allons définir des générateurs σ_n et $\sigma_{[n,n+1]}$ des cellules $|\sigma| \times \{n\}$ et $|\sigma| \times [n, n+1]$ respectivement et, pour une chaîne $\gamma = \sum_i \lambda_i \sigma^i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Q}$), nous poserons $\gamma \times \{n\} = \sum_i \lambda_i \sigma^i_n$ et $\gamma \times [n, n+1] = \sum_i \lambda_i \sigma^i_{[n,n+1]}$. Prenons σ_n de façon que la projection l'envoie sur σ, et définissons inductivement $\sigma_{[n,n+1]}$ de façon que $\partial \sigma_{[n+1]} = \sigma_{n+1} - \sigma_n - \partial\sigma \times [n, n+1]$. Pour tout $n > 0$, il y a un opérateur de subdivision Sd_n et une homotopie h_n qui envoient $S(X, \mathcal{G}_{n-1}, \mathbb{Q})$ dans $S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$ et vérifient $\partial h_n + h_n \partial = Sd_n - id$, $Sd_n(\sigma) = \sigma$ si σ appartient à $S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$ et $\|Sd_n(c)\| \cup \|h_n(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne c de $S(X, \mathcal{G}_{n-1}, \mathbb{Q})$. Posons $\widetilde{Sd}_n = Sd_n \circ \cdots \circ Sd_1 : S(X, \mathcal{G}_0, \mathbb{Q}) \to S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$ et notons $\widetilde{Sd}_0$ l'identité de $S(X, \mathcal{G}_0, \mathbb{Q})$.

Pour $n \geq 0$, soit $M_n = \Sigma^n_n \times [n, n+1]$, et soit $M = \bigcup_{n=0}^\infty M_n$, de sorte que $M \cap (\Sigma_0 \times \{n\}) = (\Sigma^{n-1}_{n-1} \cup \Sigma^n_n) \times \{n\}$ pour $n > 0$. Définissons un morphisme de chaînes $\chi : C(T, \mathbb{Q}) \to C(M, \mathbb{Q})$ par $\chi(\sigma_n) = \widetilde{Sd}_n(\sigma) \times \{n\}$ et $\chi(\sigma_{[n,n+1]}) = h_n(\widetilde{Sd}_n(\sigma)) \times [n, n+1]$. Nous allons définir un morphisme de chaînes $\nu : C(M, \mathbb{Q}) \to S(Q, \mathbb{Q})$ et poserons $\mu = \nu \circ \chi$.

Pour tout $n \geq 0$, définissons la restriction de ν à $C(\Sigma^n_n \times \{n\}, \mathbb{Q})$ comme suit. Si σ est un 0-simplexe singulier de X d'image x, fixons un point x_σ de $F(x)$ et, pour tout n, prenons pour $\mu(\sigma_n)$ le 0-simplexe singulier d'image x_σ. Si σ est un 1-simplexe singulier de $S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$, il y a un élément G_λ de $\mathcal{G}_n$ contenant $\|\sigma\|$ et, d'après (1), un $\alpha \in A_n$ tel que $G_\lambda \subset W_\alpha$ et $J(G_\lambda, \delta_\lambda, W_\lambda, \epsilon_\lambda) = 0$. Comme $\nu(\partial\sigma_n)$ représente un élément de $\widetilde{H}_0(F(G_\lambda), \mathbb{Q})$, il existe $\nu(\sigma_n) \in S\big(B_Q(F(W_\alpha), \epsilon_\alpha), \mathbb{Q}\big)$ tel que $\partial\nu(\sigma_n) = \nu(\partial\sigma_n)$. Inductivement, supposons que, pour un $1 \leq k < n$, $\nu(\sigma_n)$ ait été défini pour tout k-simplexe singulier de $S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$ de façon qu'il existe $W_\alpha \in \mathcal{W}_{n-k+1}$ contenant $\|\sigma\|$ et tel que $\nu(\sigma_n) \in S\big(B_Q(F(W_\alpha), \epsilon_\alpha), \mathbb{Q}\big)$. Soit σ un $(k+1)$-simplexe singulier de $S(X, \mathcal{G}_n, \mathbb{Q})$ et soient σ^i, $0 \leq i \leq k+1$, ses k-faces. Il existe $G \in \mathcal{G}_n$ contenant $\|\sigma\|$ et, pour $0 \leq i \leq k+1$, un élément W_{α_i} de $\mathcal{W}_{n-k+1}$ contenant $\|\sigma^i\|$ et tel que $\nu(\sigma) \in S\big(B_Q(F(W_{\alpha_i}), \epsilon_{\alpha_i}), \mathbb{Q}\big)$. Alors $G \cap W_{\alpha_i} \neq \emptyset$ pour tout i, donc $G \cup W_{\alpha_0} \cup \cdots \cup W_{\alpha_{k+1}}$ est contenu dans $\mathrm{St}(G, \mathcal{W}_{n-k+1})$, qui est contenu dans un élément G_λ de $\mathcal{G}_{n-k}$. D'après (3), $\epsilon_{\alpha_i} \leq \delta_\lambda$ pour tout i, donc $B_Q(F(G_\lambda), \delta_\lambda)$ contient $B_Q(F(W_{\alpha_i}), \epsilon_{\alpha_i})$ et, puisque $\partial\nu(\partial\sigma) = \nu(\partial\partial\sigma) = 0$, la chaîne $\nu(\partial\sigma)$ représente un élément de $\widetilde{H}_k\big(B_Q(F(G_\lambda),\delta_\lambda),\mathbb{Q}\big)$. Soit $W_\alpha \in \mathcal{W}_{n-k}$ tel que $G_\lambda \subset W_\alpha$ et $J(G_\lambda,\delta_\lambda,W_\alpha,\epsilon_\alpha)=0$. Alors W_α contient $\|\sigma\|$ et il existe $\nu(\sigma_n)\in S\big(B_Q(F(W_\alpha),\epsilon_\alpha),\mathbb{Q}\big)$ tel que $\partial\nu(\sigma_n)=\nu(\partial\sigma_n)$.

Puisque $Sd_n(\sigma)=\sigma$ si σ appartient à $\Sigma_{n-1}^{n-1}\cap\Sigma_n^n$, nous pouvons, pour $n>1$, prolonger ν à $C\big(M\cap(\Sigma_0\times\{n\}),\mathbb{Q}\big)$ en posant $\nu(\sigma_n)=\nu(Sd_n(\sigma)\times\{n\})$ pour $\sigma\in\Sigma_{n-1}^{n-1}\times\{n\}$.

Reste à définir $\nu(\sigma_{[n,n+1]})$ pour un k-simplexe σ de $S(X,\mathcal{G}_n,\mathbb{Q})$ $(0\le k\le n)$. Si $k=0$, nous avons $\nu(\sigma_n)=\nu(\sigma_{n+1})$, et nous pouvons prendre $\nu(\sigma_{[n,n+1]})=0$. Pour $k>0$, nous construirons $\nu(\sigma_{[n,n+1]})$ inductivement de façon qu'il existe $W_\alpha\in\mathcal{W}_{n-k}$ contenant $\|\sigma\|$ et tel que $S\big(B_Q(F(W_\alpha),\epsilon_\alpha),\mathbb{Q}\big)$ contienne $\nu(\sigma_{[n,n+1]})$. Par construction de $\nu(\sigma_n)$, il existe $W_\beta\in\mathcal{W}_{n-k+1}$ contenant $\|\sigma\|$ et tel que $S\big(B_Q(F(W_\beta),\epsilon_\beta),\mathbb{Q}\big)$ contienne $\nu(\sigma_n)$. Soit $\lambda\in\Lambda_{n-k}$ tel que G_λ contienne $\mathrm{St}(W_\beta,\mathcal{W}_{n-k})$, et soit $\alpha\in A_{n-k}$ tel que W_λ contienne G_λ et que $J(G_\lambda,\delta_\lambda,W_\alpha,\epsilon_\alpha)=0$. Soit $Sd_{n+1}(\sigma)=\sum_{i=0}^r\lambda_i\hat{\sigma}^i$ où $\lambda_i\in\mathbb{Q}$ et $\hat{\sigma}^i$ est un k-simplexe de $S(X,\mathcal{G}_{n+1},\mathbb{Q})$ tel que $\|\hat{\sigma}^i\|\subset\|\sigma\|$. Pour $0\le i\le r$, il existe $W_{\alpha_i}\in\mathcal{W}_{n-k+2}$ contenant $\|\hat{\sigma}^i\|$ et tel que $\nu(\hat{\sigma}^i_{n+1})$ soit contenu dans $S\big(B_Q(F(W_{\alpha_i}),\epsilon_{\alpha_i}),\mathbb{Q}\big)$. Alors $W_\beta\cup W_{\alpha_0}\cup\cdots\cup W_{\alpha_r}$ est contenu dans $\mathrm{St}(W_\beta,\mathcal{W}_{n-k})$. D'après (3), $B_Q(F(G_\lambda),\delta_\lambda)$ contient $B_Q(F(W_{\alpha_i}),\epsilon_{\alpha_i})$ pour $0\le i\le r$, donc si $k=1$, alors $\nu(\partial\sigma_{[n,n+1]})$ représente un élément de $\widetilde{H}_1\big(B_Q(F(G_\lambda),\delta_\lambda),\mathbb{Q}\big)$. Puisque $J(G_\lambda,\delta_\lambda,W_\alpha,\epsilon_\alpha)=0$, il existe $\nu(\sigma_{[n,n+1]})\in S\big(B_Q(F(W_\alpha),\epsilon_\alpha),\mathbb{Q}\big)$ tel que $\partial\nu(\sigma_{[n,n+1]})=\nu(\partial\sigma_{[n,n+1]})$. Soit $k>1$ et soient $\sigma^0,\ldots,\sigma^k$ les $(k-1)$-faces de σ. Supposons que, pour $0\le j\le k$, $\nu(\sigma^j_{[n,n+1]})$ ait été construit de façon qu'il existe $W_{\gamma_j}\in\mathcal{W}_{n-k+1}$ contenant $\|\sigma^j\|$ et tel que $\nu(\sigma^j_{[n,n+1]})$ appartienne à $S\big(B_Q(F(W_{\alpha_j}),\epsilon_{\alpha_j}),\mathbb{Q}\big)$. Alors $W_{\gamma_0}\cup\cdots\cup W_{\gamma_k}$ est aussi contenu dans $\mathrm{St}(W_\beta,\mathcal{W}_{n-k+1})$ et, d'après (3), $B_Q(F(G_\lambda),\delta_\lambda)$ contient $B_Q(F(W_{\gamma_j}),\epsilon_{\gamma_j})$ pour tout j, donc $\nu(\partial\sigma_{[n,n+1]})=\nu(\sigma_{n+1})-\nu(\sigma_n)-\nu(\partial\sigma\times[n,n+1])$ représente un élément de $\widetilde{H}_k\big(B_Q(F(G_\lambda),\epsilon_\lambda),\mathbb{Q}\big)$ et il existe $\nu(\sigma_{[n,n+1]})\in S\big(B_Q(F(W_\alpha),\epsilon_\alpha),\mathbb{Q}\big)$ tel que $\partial\nu(\sigma_{[n,n+1]})=\nu(\partial\sigma_{[n,n+1]})$.

Soit $G_\lambda\in\mathcal{G}_0$. Alors $\mathrm{St}(G_\lambda,\mathcal{W}_0)$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{W}_0)$, donc dans un élément V de $\mathcal{V}$ et, pour achever de prouver l'affirmation, il suffit de vérifier que $\mu\big(C(T_{\Sigma(G_\lambda)},\mathbb{Q})\big)\subset S\big(B_Q(F(\mathrm{St}(G_\lambda,\mathcal{W}_0)),\epsilon_1),\mathbb{Q}\big)$. Soit σ un k-simplexe de G_λ et soit $n\ge k$. Puisque $\widetilde{Sd}_n$ et h_n n'augmentent pas les supports, $\widetilde{Sd}_n(\sigma)$ est de la forme $\sum_{i=1}^r\lambda_i\sigma^i$ où $\|\sigma^i\|$ est contenu dans $\|\sigma\|$ et dans un élément de $\mathcal{G}_n$, et $h_n(\widetilde{Sd}_n(\sigma))$ est de la forme $\sum_{j=1}^q\lambda'_j\tau^j$ où $\|\tau^j\|$ est contenu dans $\|\sigma\|$ et dans un élément de $\mathcal{G}_n$. Nous avons $\chi(\sigma_n)=\sum_{i=1}^r\lambda_i\sigma^i_n$ et $\chi(\sigma_{[n,n+1]})=\sum_{j=1}^q\lambda'_j\tau^j_{[n,n+1]}$. Par construction de ν, il y a, pour $1\le i\le r$, un élément W_{α_i} de $\mathcal{W}_{n-k+1}$ tel que $\|\sigma^i_n\|\subset W_{\alpha_i}$ et $\nu(\sigma^i_n)\in S\big(B_Q(F(W_{\alpha_i}),\epsilon_{\alpha_i}),\mathbb{Q}\big)$. Alors $W_{\alpha_1}\cup\cdots\cup$

W_{α_r} est contenu dans $\mathrm{St}(G_\lambda, \mathcal{W}_{n-k+1}) \subset \mathrm{St}(G_\lambda, \mathcal{W}_0)$ et, puisque $\epsilon_{\alpha_i} \leq \epsilon_1$ pour tout i, $\mu(\sigma_n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nu(\sigma_n^i)$ appartient bien à $S\big(B_Q(F(\mathrm{St}(G_\lambda, \mathcal{W}_0)), \epsilon_1), \mathbb{Q}\big)$. Un argument analogue s'applique à $\mu(\sigma_{[n,n+1]}) = \sum_{j=1}^q \lambda'_j \nu(\tau_{[n,n+1]})$. $\square$

7. Espaces ULC. Un espace topologique X est dit uniformément localement contractile, ou ULC, s'il existe un voisinage U de la diagonale de $X \times X$ et une fonction continue $\lambda : U \times I \to X$ vérifiant $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$ et $\lambda(x, x, t) = x$ pour $(x, y) \in U$ et $(x, t) \in X \times I$. La classe des espaces ULC contient en particulier tous les sous-ensembles convexes des espaces vectoriels topologiques, tous les groupes topologiques localement contractiles et tous les rétractes de voisinage de tels espaces. L'exemple construit dans [2] montre qu'un espace métrisable ULC n'est pas nécéssairement un rétracte absolu de voisinage, mais nous allons prouver qu'un tel espace est un RAV algébrique.

Théorème 8. *Tout espace métrisable ULC est un RAV algébrique.*

La démonstration de ce théorème nécessite quelques préliminaires. Soit X un espace métrisable ULC. Fixons un voisinage U de la diagonale de $X \times X$ et une fonction continue $\lambda : U \times I \to X$ telle que $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$ et $\lambda(x, x, t) = x$. Pour $n \geq 1$, posons $\Delta_n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, t_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ et construisons par récurrence un voisinage U_n de la diagonale dans X^{n+1} et une fonction continue $\lambda_n : U_n \times \Delta_n \to X$. Posons $U_1 = U$ et $\lambda_1(x_0, x_1; t_0, t_1) = \lambda(x_0, x_1, t_1)$. Supposant U_{n-1} et λ_{n-1} définis, soit U_n l'ensemble des points $(x_0, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$ tels que $(x_1, \ldots, x_n)$ appartienne à U_{n-1} et que $(\lambda_{n-1}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), x_0)$ appartienne à U pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_{n-1}$. Définissons λ_n par

$$\lambda_n(x_0, \ldots, x_n; t_0, \ldots, t_n) \\ = \begin{cases} x_0 & \text{si } t_0 = 1 \\ \lambda(\lambda_{n-1}(x_1, \ldots, x_n; \frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_0}), x_0, t_0) & \text{si } t_0 < 1. \end{cases}$$

La fonction λ_n est continue. En effet, λ_1 est continue. Supposant λ_{n-1} continue, la continuité de λ_n est évidente en tout point $z = (x_0, \ldots, x_n; t_0, \ldots, t_n)$ tel que $t_0 \neq 1$. Pour vérifier sa continuité en un point z tel que $t_0 = 1$, il suffit de montrer que si $z_i = (x_0^i, \ldots, x_n^i; t_0^i, \ldots, t_n^i)$, $i \geq 1$, sont des points de $U_n \times \Delta_n$ tels que $t_0^i < 1$ et que $\{z_i\}$ converge vers z, alors $\{\lambda_n(z_i)\}$ tend vers $\lambda_n(z) = x_0$. Pour $0 \leq k \leq n$, $S_k = \{x_k\} \cup \{x_k^i \,|\, i \geq 1\}$ est compact. Puisque λ_{n-1} est continue, $C = \lambda_{n-1}(S_1 \times \ldots S_n \times \Delta_{n-1})$ est compact, et l'égalité $\lim \lambda_n(z_i) = x_0$ résulte de la continuité uniforme de λ sur le compact $C \times S_0 \times I$ et du fait que $\lambda(x, y, 1) = y$ pour tout y.

Par récurrence, il est facile de vérifier que

$$(\star) \quad \lambda_n(x_0, \ldots, x_n; t_0, \ldots, t_n) = \lambda_{n-1}(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n; t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n)$$

si $t_i = 0$ (le chapeau marque l'absence de l'élément). D'autre part, pour tout $x \in X$, nous avons $\lambda_n(x, \ldots, x; t_0, \ldots, t_n) = x$ quel que soit $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta_n$. Cela nous permet, pour tout n fixé et tout voisinage V de x, de trouver un voisinage W de x tel que $W^{n+1} \subset U_n$ et $\lambda_n(W^{n+1} \times \Delta_n) \subset V$.

Lemme 4. *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de X plus fin que $\mathcal{V}$ ayant la propriété suivante : Si K est un CW-complexe spécial et φ_0, φ_1 sont des morphismes de chaînes de $C(K, R)$ dans $S(X, R)$ tels que, pour toute cellule $|\sigma|$ de K, il existe un élément de $\mathcal{W}$ contenant $\|\varphi_0(\tau)\| \cup \|\varphi_1(\tau)\|$ pour toute face $|\tau|$ de $|\sigma|$, alors il existe une homotopie $h : C(K, R) \to S(X, R)$ entre φ_0 et φ_1 telle que, pour toute cellule $|\sigma|$ de K, il existe un élément de $\mathcal{V}$ contenant $\|\varphi_0(\tau)\| \cup \|\varphi_1(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face $|\tau|$ de $|\sigma|$.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathcal{V}$ par un recouvrement $\mathcal{V}'$ tel que $\mathrm{St}(\mathcal{V}')$ soit plus fin que $\mathcal{V}$, il suffit de considérer le cas où toute cellule de K est contractile. En effet, K a une subdivision simpliciale $|L|$ et, comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 1, il existe un morphisme de chaînes $\psi : C(K, R) \to C(|L|, R)$ et une application cellulaire $r : |L| \to K$ tels que $r_\# \circ \psi = id$. Soient $\hat{\varphi}_0 = \varphi_0 \circ r_\#$ et $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1 \circ r_\# : C(|L|, R) \to S(X, R)$. Si $|\sigma|$ est un simplexe de $|L|$ contenu dans la cellule $|\tau|$ de K et si l'élément W de $\mathcal{W}$ contient $\|\varphi_0(\tau')\| \cup \|\varphi_1(\tau')\|$ pour toute face $|\tau'|$ de $|\tau|$, il contient $\|\hat{\varphi}_0(\sigma')\| \cup \|\hat{\varphi}_1(\sigma')\|$ pour toute face σ' de σ. Si $\hat{h} : C(|L|, R) \to S(X, R)$ est une homotopie entre $\hat{\varphi}_0$ et $\hat{\varphi}_1$, alors $h = \hat{h} \circ \psi$ est une homotopie entre $\hat{\varphi}_0 \circ \psi = \varphi_0 \circ r_\# \circ \psi = \varphi_0$ et $\hat{\varphi}_1 \circ \psi = \varphi_1$. Si, pour tout simplexe σ de L, il existe un élément de $\mathcal{V}$ contenant $\|\hat{\varphi}_0(\sigma')\| \cup \|\hat{\varphi}_1(\sigma')\| \cup \|h(\sigma')\|$ pour toute face σ' de σ, alors, comme dans la démonstration du lemme 1, on constate que, pour toute cellule $|\tau|$ de K, il existe un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{V})$ contenant $\|\varphi_0(\tau')\| \cup \|\varphi_1(\tau')\| \cup \|h(\tau')\|$ pour toute face $|\tau'|$ de $|\tau|$.

Fixons $\mathcal{V}$ et prenons un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{W}$ tel que $\overline{W} \times \overline{W}$ soit contenu dans U et $\lambda(\overline{W} \times \overline{W} \times I)$ contenu dans un élément de $\mathcal{V}$ pour tout $W \in \mathcal{W}$. Soit $X * X$ le quotient de $X \times X \times I$ obtenu en identifiant chacun des ensembles $\{x\} \times X \times \{0\}$ et $X \times \{x\} \times \{1\}$ à un point. Nous notons p la projection de $X \times X \times I$ sur $X * X$ et $[x, y, t] = p(x, y, t)$. Soient $Y = \bigcup\{\overline{W} \times \overline{W} \times I \mid W \in \mathcal{W}\}$ et $Z = p(Y)$. Définissons $\xi : Z \to X$ par $\xi([x, y, t]) = \lambda(x, y, t)$; cette fonction est continue car Z est le quotient de Y relativement à $p|Y$ (la relation d'équivalence définissant $X * X$ est fermée et Y est fermé dans $X \times X \times I$ puisque $\mathcal{W}$ est localement fini).

Identifions $X \times X$ à $p(X \times X \times \{\frac{1}{2}\})$ par l'application $(x, y) \mapsto [x, y, \frac{1}{2}]$ et posons $T = Z \cap (X \times X)$. Soit $\tilde{\xi} : T \to X$ la restriction de ξ et soient π_0, π_1 les projections $\pi_0(x, y) = x$ et $\pi_1(x, y) = y$ de T dans X. Alors $\tilde{\xi}$ est homotope à π_0 par l'homotopie $F^0(x, y, u) = \lambda\big([x, y, \frac{1}{2}(1-u)]\big)$ et est homotope à π_1 par l'homotopie $F^1(x, y, u) = \lambda\big([x, y, u + \frac{1}{2}(1-u)]\big)$. Pour $i = 0, 1$, il existe alors une homotopie $f_i : S(T, R) \to S(X, R)$ entre $\tilde{\xi}_\#$ et $\pi_{i\#}$ telle que $\|f_i(c)\| \subset F^i(\|c\| \times I)$ pour toute chaîne c de $S(T, R)$.

Pour toute cellule $|\sigma|$ de K, $C(|\sigma|, R)$ est un facteur direct de $C(K, R)$, donc nous pouvons identifier $C(|\sigma|, R) \otimes C(|\sigma|, R)$ à un sous-complexe de $C(K, R) \otimes C(K, R)$ et, puisque la contractilité des cellules entraîne que les complexes $C(|\sigma|, R) \otimes C(|\sigma|, R)$ sont acycliques, il y a un morphisme de chaînes $d : C(K, R) \to C(K, R) \otimes C(K, R)$ tel que $d(\sigma)$ appartienne à $C(|\sigma|, R) \otimes C(|\sigma|, R)$ pour toute cellule $|\sigma|$ de K. En outre, notant $\epsilon_K : C(K, R) \to R$ l'augmentation et identifiant $C(K, R) \otimes R$ et $R \otimes C(K, R)$ à $C(K, R)$, $(\epsilon_K \otimes id) \circ d$ et $(id \otimes \epsilon_K) \circ d$ sont homotopes à id par des homotopies envoyant $C(|\sigma|, R)$ dans $C(|\sigma|, R)$ pour toute cellule $|\sigma|$ de K.

Soit $\zeta : S(X, R) \otimes S(X, R) \to S(X \times X, R)$ une application d'Eilenberg-Zilber, et soit $\vartheta = \zeta \circ (\varphi_0 \otimes \varphi_1) \circ d : C(K, R) \to S(X \times X, R)$. Pour toute cellule $|\sigma|$ de K, il y a un élément W_σ de $\mathcal{W}$ contenant $\|\varphi_0(\tau)\| \cup \|\varphi_1(\tau)\|$ pour toute face $|\tau|$ de $|\sigma|$. Alors $S(W_\sigma, R)$ contient $\varphi_0(C(|\sigma|, R)) \cup \varphi_1(C(|\sigma|, R))$, donc $S(W_\sigma, R) \otimes S(W_\sigma, R)$ contient $(\varphi_0 \otimes \varphi_1) \circ d(C(|\sigma|, R))$, et la naturalité de ζ entraîne que $\vartheta\big(C(|\sigma|, R)\big) \subset S(W_\sigma \times W_\sigma, R)$. Nous avons donc $\vartheta\big(C(K, R)\big) \subset S(T, R)$. Les homotopies f_0 et f_1 induisent alors une homotopie h entre $\pi_{0\#} \circ \vartheta$ et $\pi_{1\#} \circ \vartheta$ telle que $\|\pi_{0\#}(\tau)\| \cup \|\pi_{1\#}(\tau)\| \cup \|h(\tau)\| \subset F^0\big(\|\vartheta(\tau)\| \times I\big) \cup F^1\big(\|\vartheta(\tau)\| \times I\big) \subset \lambda(W_\sigma \times W_\sigma \times I)$ pour toute face $|\tau|$ de la cellule $|\sigma|$.

Soit $\epsilon_X : S(X, R) \to R$ l'augmentation. Identifiant $S(X, R) \otimes R$ et $R \otimes S(X, R)$ à $S(X, R)$ et combinant la naturalité de l'homotopie VI (12.5) de [5] entre $\pi_{0\#} \circ \zeta$ et $id \otimes \epsilon_X$ avec une observation faite plus haut, on constate que $\pi_{0\#} \circ \vartheta = \pi_{0\#} \circ \zeta \circ (\varphi_0 \otimes \varphi_1) \circ d$ est homotope à φ_0 par une homotopie h_0 telle que $h_0(C(|\sigma|, R)) \subset S(W_\sigma, R)$ pour toute cellule $|\sigma|$ de K. De même, $\pi_{1\#} \circ \vartheta$ est homotope à φ_1 par une homotopie h_1 telle que $h_1(C(|\sigma|, R)) \subset S(W_\sigma, R)$. Puisque $\lambda(W_\sigma \times W_\sigma \times I)$, qui contient W_σ, est contenu dans un élément de $\mathcal{V}$, le lemme en résulte en combinant h, h_0 et h_1. $\square$

Nous dirons qu'un ouvert O a les propriétés (a), (b) et (c$'$) relativement à un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de O plus fin que $\mathcal{V}$, un complexe simplicial K et des morphismes de chaînes $\psi : S(O, \mathcal{G}, R) \to$

$C(K', R)$ et $\zeta : C(K', R) \to S(X, R)$ vérifiant

(a) Pour tout $G \in \mathcal{G}$, il existe un simplexe s de K tel que $\psi\big(S(G, R)\big)$ soit contenu dans $C(\mathrm{Tr}\, s, R)$.

(b) ζ est une réalisation algébrique complète de K' relativement à $\mathcal{V}$.

(c$'$) Pour tout simplexe singulier σ appartenant à $S(O, \mathcal{G}, R)$, il y a un élément de $\mathcal{V}$ contenant $\|\tau\| \cup \|\zeta \circ \psi(\tau)\|$ pour toute face τ de σ.

Nous dirons que O a les propriétés (a), (b) et (c) relativement à $\mathcal{V}$ s'il existe en outre une homotopie $h : S(O, \mathcal{G}, R) \to S(X, R)$ entre l'inclusion et $\zeta \circ \psi$ vérifiant

(c) Pour tout simplexe singulier σ appartenant à $S(O, \mathcal{G}, R)$, il existe un élément de $\mathcal{V}$ contenant $\|\tau\| \cup \|\zeta \circ \psi(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face τ de σ.

La démonstration du théorème 2 montre que si $\mathcal{G}$, ζ, ψ et h vérifient les conditions (a), (b) et (c) ci-dessus, alors toute réalisation algébrique partielle (dans $S(O, R)$) d'un complexe simplicial relativement à $\mathcal{G}$ se prolonge en une réalisation algébrique complète (dans $S(X, R)$) relativement à $\mathrm{St}^2(\mathcal{V})$. En outre, en appliquant le lemme précédent à la réalisation géométrique du complexe de chaînes $S(O, \mathcal{G}, R)$, on constate que si le couple $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ de recouvrements ouverts de X vérifie les conditions de ce lemme et si O a les propriétés (a), (b) et (c$'$) relativement à $\mathcal{W}$, alors il a les propriétés (a), (b) et (c) relativement à $\mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{V}_0$ un recouvrement ouvert de X. Prenons des recouvrements ouverts $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{W}_0$, $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ vérifiant

(1) Pour $i = 0, 1, 2$, $\mathrm{St}(\mathcal{W}_i)$ satisfait à la condition du lemme 4 relativement à $\mathcal{V}_i$.

(2) $\mathrm{St}(\mathcal{V}_1)$ est plus fin que $\mathcal{W}_0$ et $\mathrm{St}^2(\mathcal{V}_2)$ plus fin que $\mathcal{W}_1$.

Sous ces hypothèses sur les recouvrements, nous avons le fait suivant.

Lemme 5. *Supposons qu'il existe des ouverts O_n et O_n^k, n, k entiers ≥ 1, vérifiant*

(i) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ et $O_n \subset O_{n+1}$ pour tout n.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, $O_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_n^k$ et $O_n^k \subset O_n^{k+1}$ pour tout k.

(iii) O_n^k a les propriétés (a), (b) et (c$'$) relativement au recouvrement ouvert $\mathcal{W}_2$.

Alors il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de X tel que, pour tout complexe simplicial K, toute réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{G}$ se prolonge en une réalisation algébrique complète relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_0)$.

Démonstration. D'après (iii) et (1), O_n^k a les propriétés (a), (b) et (c) relativement à $\mathcal{V}_2$ donc, d'après une remarque faite plus haut, il y a un recouvrement ouvert $\mathcal{G}_n^k$ de O_n^k tel que toute réalisation algébrique partielle (dans $S(O_n^k, R)$) d'un complexe simplicial relativement à $\mathcal{G}_n^k$ se prolonge en une réalisation algébrique complète (dans $S(X,R)$) relativement à $\mathrm{St}^2(\mathcal{V}_2)$.

Prenons des ouverts P_n tels que $X = \bigcup_{n=1}^\infty P_n$ et $\overline{P}_n \subset O_n \cap P_{n+1}$ pour tout n et, pour tout $n \geq 1$, des ouverts Q_n^k tels que $O_n = \bigcup_{k=1}^\infty Q_n^k$ et $\overline{Q}_n^k \subset O_n^k \cap Q_n^{k+1}$ pour tout k. Posant $P_0 = P_{-1} = Q_n^0 = Q_n^{-1} = \emptyset$, prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de X vérifiant, quels que soient n et k

(3) $\mathrm{St}(\overline{P}_n, \mathcal{G}) \cap \mathrm{St}(X \setminus P_{n+1}, \mathcal{G}) = \emptyset$

(4) $\mathrm{St}\big((\overline{P}_n \setminus P_{n-2}) \cap \overline{Q}_n^k, \mathcal{G}\big) \cap \mathrm{St}\big((\overline{P}_n \setminus P_{n-2}) \cap (\overline{P}_n \setminus Q_n^{k+1}), \mathcal{G}\big) = \emptyset$

(5) Tout élément de $\mathcal{G}$ rencontrant $(\overline{P}_n \setminus P_{n-2}) \cap (\overline{Q}_n^k \setminus Q_n^{k-2})$ est contenu dans un élément de $\mathcal{G}_n^k$.

La construction d'un tel recouvrement $\mathcal{G}$ peut se faire comme suit. Prenons une fonction continue $\alpha : X \to \mathbb{R}^+$ telle que $\alpha^{-1}([n-1, n]) = \overline{P}_n \setminus P_{n-1}$ pour tout n. Pour que $\mathcal{G}$ vérifie (3), il suffit que le diamètre de $\alpha(G)$ soit inférieur à $1/3$ pour tout $G \in \mathcal{G}$. Un argument analogue montre qu'il y a un recouvrement $\mathcal{H}_n$ de $\overline{P}_n$ par des ouverts de X tel que $\mathrm{St}(\overline{P}_n \cap \overline{Q}_n^k, \mathcal{H}_n) \cap \mathrm{St}(\overline{P}_n \setminus Q_n^{k+1}, \mathcal{H}_n) = \emptyset$ pour tout k, et comme la famille des $\overline{P}_n \setminus P_{n-2}$, $n \geq 1$, est localement finie dans X, nous pouvons choisir $\mathcal{G}$ de façon que, pour tout n, tout élément de $\mathcal{G}$ rencontrant $\overline{P}_n \setminus P_{n-2}$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{H}_n$. La condition (4) est alors vérifiée. La possibilité de vérifier (5) résulte du fait que les fermés $(\overline{P}_n \setminus P_{n-2}) \cap (\overline{Q}_n^k \setminus Q_n^{k-2})$, $n, k \geq 1$, forment une famille localement finie dans X et que $\mathcal{G}_n^k$ est une famille d'ouverts de X recouvrant $(\overline{P}_n \setminus P_{n-2}) \cap (\overline{Q}_n^k \setminus Q_n^{k-2})$.

Soient K un complexe simplicial et $\nu : C(L,R) \to S(X,R)$ une réalisation algébrique partielle de K relativement à $\mathcal{G}$. Pour tout simplexe σ de K, soit $T_\sigma = \bigcup\{\|\nu(\tau)\| \mid \tau \leq \sigma \text{ et } \tau \subset L\}$. Alors $T_{\sigma'} \subset T_\sigma$ si $\sigma' \leq \sigma$. Pour tout $n \geq 1$, soit M_n le sous-complexe de K formé des simplexes σ tels que $T_\sigma \subset \overline{P}_n \setminus \overline{P}_{n-2}$. Alors $K = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$. En effet, si σ est un simplexe de K, l'ensemble T_σ est un compact non vide et, puisque X est réunion de la suite croissante d'ouverts $\{P_n\}$, il y a un plus petit n tel que $\overline{P}_n$ contienne T_σ. Puisque ν est une réalisation algébrique partielle relativement à $\mathcal{G}$, il y a un élément G de $\mathcal{G}$ contenant T_σ. Alors $\emptyset \neq T_\sigma \setminus \overline{P}_{n-1} \subset G \setminus \overline{P}_{n-1}$, et (3) entraîne que $G \cap \overline{P}_{n-2} = \emptyset$, donc T_σ est contenu dans $\overline{P}_n \setminus \overline{P}_{n-2}$ et σ appartient à M_n. Pour $m \geq n+2$, nous avons $\overline{P}_n \subset \overline{P}_{m-2}$ d'où $M_m \cap M_n = \emptyset$, ce qui entraîne que les complexes $N_n = M_n \cap M_{n+1}$, $n \geq 1$, sont deux à deux disjoints.

Pour $n, k \geq 1$, soit M_n^k le sous-complexe de M_n formé des simplexes σ tels que $T_\sigma \subset (\overline{P}_n \setminus \overline{P}_{n-2}) \cap (\overline{Q}_n^k \setminus \overline{Q}_n^{k-2})$. Il résulte de (4) que $M_n = \bigcup_{k=1}^\infty M_n^k$. En outre, les complexes $N_n^k = M_n^k \cap M_n^{k+1}$, $k \geq 1$, sont deux à deux disjoints.

Il résulte de (5) que $\nu|C(L \cap M_n^k, R)$ est une réalisation algébrique partielle de M_n^k relativement à $\mathcal{G}_n^k$, donc se prolonge en une réalisation algébrique complète $\nu_n^k : C(M_n^k, R) \to S(X, R)$ relativement à $\mathrm{St}^2(\mathcal{V}_2)$, donc aussi relativement à $\mathcal{W}_1$ d'après (2).

Pour $m \geq 1$, posons $M_n(m) = \bigcup_{k=1}^m M_n^k$ et $M(m) = \bigcup_{n=1}^m M_n$. En utilisant les ν_n^k, nous construirons inductivement des morphismes de chaînes $\chi_n^m : C(M_n(m), R) \to S(X, R)$ qui sont des réalisations algébriques relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_1)$ et vérifient $\chi_n^{m+1}|C(M_n(m), R) = \chi_n^m$ et $\chi_n^m|C(M_n(m) \cap L, R) = \nu|C(M_n(m) \cap L, R)$. Puisque $M_n = \bigcup_{m=1}^\infty M_n(m)$, les χ_n^m se recollent en une réalisation algébrique $\chi_n : C(M_n, R) \to S(X, R)$ relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_1)$, donc aussi à $\mathcal{W}_0$, qui prolonge $\nu|C(M_n \cap L, R)$. En utilisant les χ_n, nous construirons inductivement des morphismes de chaînes $\mu_m : C(M(m), R) \to S(X, R)$ qui sont des réalisations algébriques relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_0)$ et vérifient $\mu_{m+1}|C(M(m), R) = \mu_m$ et $\mu_m|C(M(m) \cap L, R) = \nu|C(M(m) \cap L, R)$. Puisque $M = \bigcup_{m=1}^\infty M(m)$, les μ_m se recollent en une réalisation algébrique complète $\mu : C(M, R) \to S(X, R)$ relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{V}_0)$ qui prolonge ν, d'où le lemme. La construction des μ_m à l'aide des χ_n étant identique à la construction des χ_n^m à l'aide des ν_n^k, nous ne donnerons que la construction des χ_n^m et laisserons au lecteur le soin de construire les μ_m.

Nous imposerons aux χ_n^m la condition supplémentaire que $\chi_n^m|C(N_n^m, R) = \nu_n^m|C(N_n^m, R)$. Pour $m = 1$, $M_n(1) = M_n^1$ et nous pouvons prendre $\chi_n^1 = \nu_n^1$. Supposant χ_n^m construit, posons $L_n^m = N_n^m \cup (L \cap M_n^{m+1}) \cup N_n^{m+1} \subset M_n^{m+1}$. Soit $\xi_0 = \nu_n^{m+1}|C(L_n^m, R)$. Définissons $\xi_1 : C(L_n^m, R) \to S(X, R)$ par

$$\xi_1(\sigma) = \begin{cases} \chi_n^m(\sigma) & \text{si } \sigma \in N_n^m \\ \nu(\sigma) & \text{si } \sigma \in L \cap M_n^{m+1} \\ \nu_n^{m+1}(\sigma) & \text{si } \sigma \in N_n^{m+1}, \end{cases}$$

ce qui a un sens puisque χ_n^m prolonge $\nu|C(L \cap M_n(m), R)$ et ν_n^{m+1} prolonge $\nu|C(M_n^{m+1} \cap L, R)$. Pour tout simplexe σ de L_n^m, il y a un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{W}_1)$ contenant $\|\xi_0(\tau)\| \cup \|\xi_1(\tau)\|$ pour toute face τ de σ. En effet, le seul cas non trivial à vérifier est celui où σ appartient à N_n^m. Dans ce cas, nous avons $\xi_1(\tau) = \chi_n^m(\tau) = \nu_n^m(\tau)$ pour toute face τ de σ et, puisque ν_n^m et ν_n^{m+1} sont des réalisations algébriques relativement à $\mathcal{W}_1$, il existe des éléments W et W' de $\mathcal{W}_1$ tels que W contienne $\|\xi_0(\tau)\|$ et que W' contienne $\|\xi_1(\tau)\|$ pour toute face τ de σ. Si v est un sommet de σ, alors $0 \neq \nu(v) = \xi_0(v) = \xi_1(v)$, donc $\emptyset \neq \|\nu(v)\| \subset W \cap W'$, et $W \cup W'$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{W}_1)$ et contient $\|\xi_0(\tau)\| \cup \|\xi_1(\tau)\|$ pour toute face τ de σ. D'après (1), il existe une homotopie $h : C(L_n^m, R) \to S(X, R)$

entre ξ_0 et ξ_1 telle que, pour tout simplexe σ de L_n^m, il existe un élément de $\mathcal{V}_1$ contenant $\|\xi_0(\tau)\| \cup \|\xi_1(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face τ de σ.

Posons $Y = |M_n^{m+1}| \times I$ et $Z = (|M_n^{m+1}| \times \{0\}) \cup (|L_n^m| \times I)$. Définissons un morphisme de chaînes $\zeta : C(Z, R) \to S(X, R)$ en posant $\zeta(\sigma_0) = \nu_n^{m+1}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in M_n^{m+1}$ et, pour $\sigma \in L_n^m$, $\zeta(\sigma_1) = \xi_1(\sigma)$ et $\zeta(\sigma_I) = h(\sigma)$. Soit $r : Y \to Z$ une rétraction cellulaire telle que $r(|\sigma| \times I) \subset |\sigma| \times I$ pour tout $\sigma \in M_n^{m+1}$. Définisssons $\chi_n^{m+1} : C(M_n(m+1), R) \to S(X, R)$ par

$$\chi_n^{m+1}(\sigma) = \begin{cases} \chi_n^m(\sigma) & \text{si } \sigma \in M_n(m) \\ \zeta \circ r_\#(\sigma_1) & \text{si } \sigma \in M_n^{m+1}. \end{cases}$$

Cette définition a un sens car si σ appartient à $M_n(m) \cap M_n^{m+1} = N_n^m$, alors $r_\#(\sigma_1) = \sigma_1$ et $\zeta(\sigma_1) = \chi_n^m(\sigma)$. Le morphisme χ_n^{m+1} prolonge $\nu|C(L \cap M_n(m+1), R)$. En effet, si σ appartient à $L \cap M_n(m)$, alors $\chi_n^{m+1}(\sigma) = \chi_n^m(\sigma) = \nu(\sigma)$ par l'hypothèse de récurrence, et si σ appartient à $L \cap M_n^{m+1}$, alors $r_\#(\sigma_1) = \sigma_1$ et $\zeta(\sigma_1) = \nu(\sigma)$. Si σ appartient à N_n^{m+1}, alors $r_\#(\sigma_1) = \sigma_1$ et $\zeta(\sigma_1) = \nu_n^{m+1}(\sigma)$, donc $\chi_n^{m+1}|C(N_n^{m+1}, R) = \nu_n^{m+1}|C(N_n^{m+1}, R)$. Reste à vérifier que, pour tout simplexe σ de $M_n(m+1)$, il existe un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{V}_1)$ contenant $\|\chi_n^{m+1}(\tau)\|$ pour toute face τ de σ. Si σ appartient à $M_n(m)$, cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Si σ appartient à M_n^{m+1}, il existe $V_\sigma \in \mathcal{V}_1$ contenant $\|\nu_n^{m+1}(\tau)\|$ pour toute face τ de σ. Pour chaque face σ' de σ appartenant à L_n^m, il existe $V_{\sigma'} \in \mathcal{V}_1$ contenant $\|\xi_0(\tau)\| \cup \|\xi_1(\tau)\| \cup \|h(\tau)\|$ pour toute face τ de σ'. Si v est un sommet de σ', alors $\xi_0(v) = \nu_n^{m+1}(v) \neq 0$, donc $\emptyset \neq \|\xi_0(v)\| \subset V_\sigma \cap V_{\sigma'}$. Il en résulte que $\mathrm{St}(V_\sigma, \mathcal{V}_1)$ contient $\|\zeta(c)\|$ pour toute chaîne c de $C((|\sigma| \times I) \cap Z, R)$ et, puisque $r(|\sigma| \times I)$ est contenu dans $(|\sigma| \times I) \cap Z$, $\mathrm{St}(V_\sigma, \mathcal{V}_1)$ contient $\|\chi_n^{m+1}(\tau)\| = \|\zeta \circ r_\#(\tau)\|$ pour toute face τ de σ. $\square$

Le théorème 8 est une conséquence immédiate du lemme 5 et du suivant.

Lemme 6. *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe des ouverts O_n et O_n^k, $n, k \geq 1$, vérifiant*

(i) $X = \bigcup_{n=1}^\infty O_n$ et $O_n \subset O_{n+1}$ pour tout n.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, $O_n = \bigcup_{k=1}^\infty O_n^k$ et $O_n^k \subset O_n^{k+1}$ pour tout k.

(iii) O_n^k a les propriétés (a),(b) et (c') relativement à $\mathcal{U}$.

Démonstration. Soit A un ensemble dont le cardinal est le poids de X. Pour tout $\alpha \in A$, prenons une copie I_α de l'intervalle I de façon que $I_\alpha \cap I_{\alpha'} = \{0\}$ pour $\alpha \neq \alpha'$, et soit $Y = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$. Définissons une distance ρ sur Y en posant

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } x \text{ et } y \text{ appartiennent à un même } I_\alpha \\ \min(1, x + y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i \geq 1$, soit Y_i une copie de Y et munissons le produit $Y^{\mathbb{N}}$ de la distance définie, pour $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ par $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\rho(x_i, y_i)$. Pour $n \geq 1$, posons $Y^n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$ et notons p_n la projection de $Y^{\mathbb{N}}$ sur Y^n.

Nous pouvons supposer que X est un sous-espace de $Y^{\mathbb{N}}$ (voir [8], théorème 4.4.9) et nous munissons X de la distance induite par d, que nous notons encore d. Pour $x \in X$ et $\delta > 0$, nous notons $B(x,\delta)$ la boule ouverte de centre x et de rayon δ dans X.

Fixons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X. Soit $\mathcal{U}'$ un recouvrement ouvert de X tel que $\mathrm{St}(\mathcal{U}')$ soit plus fin que $\mathcal{U}$. Pour $n \geq 1$, soit O_n l'ensemble des points x de X pour lesquels il existe $\delta > \dfrac{9}{2}.2^{-n}$ tel que le produit $B(x,\delta)^3$ soit contenu dans U et que $\lambda_2(B(x,\delta)^3 \times \Delta_2)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{U}'$. Evidemment, O_n est ouvert et contenu dans O_{n+1}, et l'égalité $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ résulte du fait que, pour tout entier n et tout voisinage V d'un point x de X, il y a un voisinage W de x tel que $W^{n+1} \subset U$ et $\lambda_n(W^{n+1} \times \Delta_n) \subset V$.

Posons $O_n^k = \emptyset$ pour $k \leq n$ et, pour $k > n$, soit O_n^k l'ensemble des points x de O_n pour lesquels il existe $\delta > 2^{2-k}$ tel que le produit $B(x,\delta)^{n+2}$ soit contenu dans U_{n+1} et que le diamètre de $\lambda_{n+1}\big(B(x,\delta)^{n+2} \times \Delta_{n+1}\big)$ soit inférieur à 2^{-n}. Evidemment, O_n^k est ouvert et contenu dans O_n^{k+1}, et $O_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_n^k$ pour une raison indiquée ci-dessus.

Reste à montrer que, pour $n < k$ fixés, O_n^k a les propriétés (a), (b) et (c$'$) relativement à $\mathcal{U}$. La construction des objets $\mathcal{G}$, ψ et ζ demandés par ces conditions se fera en plusieurs étapes. Nous utiliserons des décompositions cellulaires des produits Y^n et Y^k pour construire un complexe simplicial K et une décomposition CW $\widetilde{K}$ de $|K|$ dont les cellules sont indexées par les sommets de K *. Nous construirons ensuite un recouvrement ouvert $\mathcal{G}_0$ de O_n^k indexé par les sommets de K qui, comme dans la démonstration du théorème 2, nous fournira le recouvrement $\mathcal{G}$ et le morphisme ψ. Puis nous construirons un CW-complexe P, un morphisme de chaînes $\vartheta : C(\widetilde{K}, R) \to C(P, R)$ et une fonction continue $f : P \to X$. Prenant des morphismes de chaînes convenables $\mu : C(P,R) \to S(P,R)$ et $\nu : C(K', R) \to C(\widetilde{K}, R)$, nous définirons finalement ζ par $\zeta = f_{\#} \circ \mu \circ \vartheta \circ \nu$.

Décomposant chaque intervalle I_α en 2^k sous-intervalles fermés de longueur 2^{-k}, nous obtenons une décomposition cellulaire de Y. Nous munissons Y^n et Y^k des décompositions cellulaires produits correspondantes et de la topologie CW associée à ces décompositions. Soit N le sous-complexe de Y^n formé des cellules

* $\widetilde{K} = |K|$, mais nous utilisons la notation $\widetilde{K}$ pour distinguer les complexes $C(|K|, R)$ et $C(\widetilde{K}, R)$.

$|\sigma|$ telles que $p_n^{-1}(\mathring{\sigma}) \cap O_n^k \neq \emptyset$ et de toutes les faces de telles cellules, et soit M le sous-complexe de Y^k formé des cellules $|\tau|$ telles que $p_k^{-1}(\mathring{\tau}) \cap O_n^k \neq \emptyset$ et de toutes les faces de telles cellules.

Si σ est une cellule de N et $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ sont deux points de $p_n^{-1}(|\sigma|)$, alors $\rho(x_i, y_i) \leq 2^{-k}$ pour $i \leq n$, d'où

(6) $\operatorname{diam} p_n^{-1}(|\sigma|) < 2^{-n} + 2^{-k} < 2.2^{-n}$ pour toute cellule $|\sigma|$ de N.

De façon analogue, nous avons aussi

(7) $\operatorname{diam} p_k^{-1}(|\tau|) \leq 2.2^{-k}$ pour toute cellule $|\tau|$ de M.

La restriction à M de la projection de Y^k sur Y^n est une application cellulaire de M sur N que nous noterons π.

Le complexe simplicial K et la décomposition CW $\widetilde{K}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des cellules de N. Pour toute cellule $|\sigma|$ de N, soit $M(\sigma)$ le sous-complexe de M formé des cellules $|\tau|$ telles que $\pi(|\tau|) = |\sigma|$ et de toutes les faces de telles cellules. $M(\sigma)$ est de la forme $M(\sigma) = |\sigma| \times L(\sigma)$, où $L(\sigma)$ est un sous-complexe de la décomposition CW produit de $Y(n,k) = \prod_{n+1}^k Y_i$. Soient L_j, $j \in J_\sigma$, les composantes de $L(\sigma)$; alors les $M_j = |\sigma| \times L_j$ sont les composantes de $M(\sigma)$. Nous supposons les J_σ deux à deux disjoints et posons $J = \bigcup_{|\sigma| \in \mathcal{S}} J_\sigma$. Si $|\sigma'|$ est une face de $|\sigma|$, alors $M(\sigma) \cap \pi^{-1}(|\sigma'|)$ est contenu dans $M(\sigma')$, de sorte que, pour tout $j \in J_\sigma$, il existe un unique $j' \in J_{\sigma'}$ tel que $M_j \cap \pi^{-1}(|\sigma'|) = |\sigma'| \times L_j$ soit contenu dans $M_{j'}$. Nous écrirons $j' \leq j$ si $j' \in J_{\sigma'}$ et $j \in J_\sigma$ avec $|\sigma'| \leq |\sigma|$ et $M_j \cap \pi^{-1}(|\sigma'|) \subset M_{j'}$, et $j' < j$ si $j' \leq j$ et $j' \neq j$.

L'ensemble des sommets du complexe simplicial K est J et $s = [j_0, \ldots, j_m]$ est un simplexe de K si la numérotation peut être choisie de façon que $j_0 \leq \cdots \leq j_m$. La subdivision barycentrique de N en est une triangulation, et la fonction q qui fait correspondre à chaque élément de J_σ le barycentre de la cellule $|\sigma|$ est une application simpliciale de K dans cette subdivision barycentrique dont la restriction à chaque simplexe de K est injective. En particulier, K est de dimension au plus n.

Soient $|\sigma| \in \mathcal{S}$ et $j \in J_\sigma$. Pour toute face $|\sigma'|$ de $|\sigma|$, soit $j(\sigma')$ l'élément de $J_{\sigma'}$ tel que $M_j \cap \pi^{-1}(|\sigma'|) \subset M_{j(|\sigma'|)}$, et soit c_j le sous-complexe plein de K engendré par les $j(\sigma')$, $|\sigma'| \leq |\sigma|$. La fonction q envoie c_j isomorphiquement sur la subdivision barycentrique de $|\sigma|$, donc $|c_j|$ est une cellule et les $|c_j|$, $j \in J$, forment une décomposition CW de K, que nous noterons $\widetilde{K}$. Pour $j \in J_\sigma$, les faces de $|c_j|$ correspondent bijectivement à celles de $|\sigma|$. Si $|\sigma|$ est de dimension r et j appartient à J_σ, alors q envoie $|c_j|$ homéomorphiquement sur $|\sigma|$, et nous prendrons pour générateur de $C(\widetilde{K}, R)$ correspondant à $|c_j|$ l'élément c_j de $H_r(|c_j|, |\partial c_j|, R)$ que l'isomorphisme induit par q envoie sur $\sigma \in H_r(|\sigma|, |\partial\sigma|, R)$.

Avec ce choix des générateurs, si $\partial\sigma = \sum_t \epsilon_t\sigma_t$, où $|\sigma_t|$ parcourt les $(r-1)$-faces de $|\sigma|$, alors $\partial c_j = \sum_t \epsilon_t c_{j_t}$, où j_t est l'unique élément de J_{σ_t} tel que $j_t \leq j$.

Le recouvrement $\mathcal{G}$ et le morphisme ψ. Construisons un recouvrement ouvert auxiliaire $\mathcal{G}_0 = \{G_j \mid j \in J\}$ de O_n^k indexé par les éléments de J et vérifiant

(8) $\operatorname{diam} G_j < 2.2^{-n}$ pour tout $j \in J$,

(9) le nerf de $\mathcal{G}_0$ est un sous-complexe de K.

Pour $0 \leq m \leq n$, soit $Y^n(m)$ le m-squelette de Y^n et soient $\mathcal{S}_m$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des cellules de dimension m et $\mathcal{S}_{\leq m}$ celui des cellules de dimension au plus m. Notons J_m (resp. $J_{\leq m}$) la réunion des J_σ où $|\sigma|$ parcourt $\mathcal{S}_m$ (resp. $\mathcal{S}_{\leq m}$).

Remarquons que tout sous-complexe Z de la décomposition CW de Y^n que nous utilisons est fermé pour la distance $d_n(x,y) = \sum_{i=1}^n 2^{-i}\rho(x_i,y_i)$, donc $p_n^{-1}(Z)$ est fermé dans $Y^{\mathbb{N}}$. De même, $p_k^{-1}(Z)$ est fermé dans $Y^{\mathbb{N}}$ pour tout sous-complexe Z de Y^k. Si $|\sigma|$ est une $(m+1)$-cellule de Y^n, alors $\overset{\circ}{\sigma}$ est ouvert dans $Y^n(m+1)\setminus Y^n(m)$ pour la distance d_n, donc $p_n^{-1}(\overset{\circ}{\sigma})$ est ouvert dans $p_n^{-1}\big(Y^n(m+1) \setminus Y^n(m)\big)$. D'autre part, si $|\tau_1|$ et $|\tau_2|$ sont deux cellules disjointes de M, il existe $i \leq k$ tel que les projections de $|\tau_1|$ et $|\tau_2|$ sur Y_i soient disjointes, ce qui entraîne que $d(x,y) \geq 2^{-i}.2^{-k}$ si x et y sont des points de $p_k^{-1}(|\tau_1|)$ et $p_k^{-1}(|\tau_2|)$ respectivement. Il en résulte que si M_1 et M_2 sont des sous-complexes disjoints de M, alors $d(x,y) \geq 2^{-2k}$ pour $x \in p_k^{-1}(M_1)$ et $y \in p_k^{-1}(M_2)$.

Dans la construction qui suit, $\overline{G}_j$ désignera la fermeture de G_j relativement à O_n^k. Pour $|\sigma| \in \mathcal{S}$ et $j \in J_\sigma$, soit H_j le sous-complexe de M réunion de tous les $M_{j'}$ tels que $M_{j'} \cap M_j \cap \pi^{-1}(\overset{\circ}{\sigma}) = \emptyset$.

Les complexes M_j avec $j \in J_0$ sont deux à deux disjoints, et il résulte des remarques précédentes que $\{p_k^{-1}(M_j) \cap O_n^k \mid j \in J_0\}$ est une famille discrète de fermés de O_n^k. Nous pouvons donc trouver une famille discrète $\{G_j \mid j \in J_0\}$ d'ouverts de O_n^k telle que $p_k^{-1}(M_j) \cap O_n^k \subset G_j$ pour tout $j \in J_0$ et que $G_j = \emptyset$ si $p_k^{-1}(M_j) \cap O_n^k = \emptyset$. Puisque $p_k^{-1}(M_j) \cap O_n^k$ est contenu dans un ensemble de la forme $p_n^{-1}(|\sigma|)$, où $|\sigma|$ est une cellule de Y^n, il est de diamètre inférieur à 2.2^{-n} d'après (6) et, quitte à diminuer les G_j, nous pouvons supposer qu'ils vérifient (8). Pour $|\sigma| \in \mathcal{S}_0$, nous avons $|\sigma| = \overset{\circ}{\sigma}$, donc $M_j \cap H_j = \emptyset$ pour tout $j \in J_0$, et nous pouvons aussi supposer que $\overline{G}_j \cap p_k^{-1}(H_j) = \emptyset$. Comme les $p_k^{-1}(M_j)$ avec $j \in J_0$ recouvrent $p_n^{-1}(Y^n(0)) \cap O_n^k$, la réunion des G_j avec $j \in J_0$ contient $p_n^{-1}(Y^n(0)) \cap O_n^k$.

Soit $0 \leq m < n$ et supposons construite une famille $\{G_j \mid j \in J_{\leq m}\}$ d'ouverts de O_n^k, localement finie dans O_n^k et telle que $G(m) = \bigcup\{G_j \mid j \in J_{\leq m}\}$ contienne $p_n^{-1}(Y^n(m)) \cap O_n^k$. Les ensembles $p_k^{-1}(M_j) \cap (O_n^k \setminus G(m))$ avec $j \in J_{m+1}$

sont fermés dans O_n^k et forment une famille discrète dans O_n^k. En effet, l'ouvert $G(m) \cup \big(O_n^k \setminus p_n^{-1}(Y^n(m+1))\big)$ ne rencontre aucun de ces fermés, et si le point x de O_n^k n'appartient pas à cet ouvert, il appartient à $p_n^{-1}\big(Y^n(m+1) \setminus Y^n(m)\big)$, donc il y a une unique $(m+1)$-cellule $|\sigma_x|$ telle que $\mathring{\sigma}_x$ contienne $p_n(x)$. Puisque $p_n^{-1}(\mathring{\sigma}_x)$ est ouvert dans $p_n^{-1}\big(Y^n(m+1)\setminus Y^n(m)\big)$, il y a un voisinage V de x dans X tel que $V\cap p_n^{-1}\big(Y^n(m+1)\setminus Y^n(m)\big) \subset p_n^{-1}(\mathring{\sigma}_x)$. Alors $V\cap B(x, 2^{-3k})$ rencontre un seul des ensembles $p_n^{-1}(M_j)\cap(O_n^k\setminus G(m))$ avec $j \in J_{m+1}$ (si $V\cap M_j \neq \emptyset$, alors j appartient à J_{σ_x} et, les complexes M_j avec $j \in J_{\sigma_x}$ étant disjoints, $B(x, 2^{-3k})$ rencontre un seul d'entre eux).

Nous pouvons donc trouver une famille discrète $\{G_j \,|\, j \in J_{m+1}\}$ d'ouverts de O_n^k telle que $p_k^{-1}(M_j)\cap(O_n^k\setminus G(m)) \subset G_j$ pour tout $j \in J_{m+1}$ et que $G_j = \emptyset$ si $p_k^{-1}(M_j)\cap(O_n^k\setminus G(m)) = \emptyset$. Comme précédemment, nous pouvons supposer que le diamètre de G_j est inférieur à 2.2^{-n}. Puisque $\{G_{j'} \,|\, j' \in J_{\leq m}\}$ est localement finie, nous pouvons choisir les G_j de façon que $\overline{G}_j \cap \overline{G}_{j'} = \emptyset$ pour tout $j' \in J_{\leq m}$ tel que $\overline{G}_{j'} \cap p_k^{-1}(M_j) = \emptyset$. Enfin, puisque, pour $|\sigma| \in \mathcal{S}_{m+1}$ et $j \in J_\sigma$, $p_k^{-1}(H_j) \cap p_k^{-1}(M_j) \cap (O_n^k \setminus G(m)) \subset p_k^{-1}(H_j) \cap p_k^{-1}(M_j) \cap p_k^{-1}(\mathring{\sigma}) = \emptyset$, nous pouvons aussi supposer que $\overline{G}_j \cap p_k^{-1}(H_j) = \emptyset$. La famille $\{G_j \,|\, j \in \mathcal{S}_{m+1}\}$ est réunion de deux familles localement finies dans O_n^k, donc est localement finie, et recouvre $[p_n^{-1}(Y^n(m))\cup\bigcup_{j\in J_{m+1}}(p_n^{-1}(M_j)\setminus G(m))]\cap O_n^k = p_n^{-1}(Y^n(m+1))\cap O_n^k$.

La condition (8) est vérifiée par construction. Soit $[j_0, \dots, j_r]$ un simplexe du nerf de $\mathcal{G}_0$, où j_i appartient à J_{σ_i} pour $0 \leq i \leq r$. Supposons la numérotation choisie de façon que $\dim|\sigma_0| \leq \cdots \leq \dim|\sigma_r|$. Puisque les G_j avec j dans $\mathcal{S}_m$ sont deux à deux disjoints, nous avons alors $\dim|\sigma_0| < \cdots < \dim|\sigma_r|$. Soient $0 \leq u < v \leq r$. La relation $G_{j_u} \cap G_{j_v} \neq \emptyset$ entraîne que $\overline{G}_{j_u} \cap p_k^{-1}(M_{j_v}) \neq \emptyset$, donc M_{j_v} n'est pas contenu dans H_{j_u} et nous avons $M_{j_u} \cap M_{j_v} \cap \pi^{-1}(\mathring{\sigma}_u) \neq \emptyset$, ce qui n'est possible que si $|\sigma_u|$ est une face de $|\sigma_v|$ et j_u l'élément de J_{σ_u} tel que $M_{j_v} \cap \pi^{-1}(|\sigma_u|) \subset M_{j_u}$. Ceci montre que $[j_0, \dots, j_r]$ est un simplexe de K, d'où (9).

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des simplexes de K. Pour $s = [j_0, \dots, j_u] \in \mathcal{R}$, posons $G_s = G_{j_0} \cap \cdots \cap G_{j_u}$, et soit $\mathcal{G} = \{G_s \,|\, s \in \mathcal{R}\}$. Puisque K est de dimension finie, nous pouvons, en procédant comme dans la démonstration du théorème 2, construire un morphisme de chaînes $\psi : S(O_n^k, \mathcal{G}, R) \to C(K', R)$ tel que $\psi(S(V_s, R)) \subset C(\mathrm{Tr}\, s, R)$ pour tout $s \in \mathcal{R}$. La condition (a) est donc vérifiée.

Le CW-complexe P et le morphisme ϑ. Pour $j \in J$, nous notons $|\sigma(j)|$ l'unique cellule de N telle que $j \in J_{\sigma(j)}$ et posons $\dim j = \dim|\sigma(j)| = \dim|c_j|$. Soit S_j le 1-squelette de L_j ; puisque L_j est connexe, S_j aussi. Soit T_j un arbre maximal de S_j (un sous-complexe contractile contenant tous les sommets de S_j).

Posons $Q_j = |\sigma(j)| \times S_j$ et $Q = \bigcup_{j\in J} Q_j$. Notons que le sous-complexe Q_j est de dimension au plus $\dim j + 1$.

Soit $\{v_j \,|\, j \in J\}$ une famille de points distincts n'appartenant pas à M. Pour $j \in J$, soit $C_j = \bigcup\{Q_{j'} \,|\, j' \le j\}$ et soit D_j le cône de base C_j et de sommet v_j. Pour $j' < j$, soit $E(j', j)$ le joint de $C_{j'}$ et du 1-simplexe $|v_{j'}, v_j|$. Posons

$$P = Q \cup \bigcup_{j\in J} D_j \cup \bigcup_{j'<j} E(j', j).$$

Si $|\tau|$ est une cellule de M, nous notons $|v_j\tau|$ le cône de base $|\tau|$ et de sommet v_j (pour $|\tau| \subset C_j$) et $|v_{j'}v_j\tau|$ le joint de $|\tau|$ et du 1-simplexe $|v_{j'}, v_j|$ (pour $|\tau| \subset C_{j'}$) ; dans ces notations, nous supposerons toujours que $j' < j$. P est un CW-complexe spécial dont les cellules sont celles de Q et les cellules de la forme $|v_j\tau|$ et $|v_{j'}v_j\tau|$. Nous choisissons comme suit les générateurs de $C(P, R)$ correspondant à ces cellules. Si $|\tau|$ est une cellule de Q et $|\sigma| = \pi(|\tau|)$, alors $\dim|\sigma| \le \dim|\tau| \le \dim|\sigma| + 1$, et il existe $j \in J_\sigma$ tel que $|\tau| \subset Q_j$. Si $\dim|\tau| = \dim|\sigma|$, il y a un sommet z de S_j tel que $|\tau| = |\sigma|\times\{z\}$, et nous prenons le générateur τ de $H(|\tau|, |\partial\tau|, R)$ correspondant au générateur $\sigma \in H(|\sigma|, |\partial\sigma|, R)$ par la projection ; nous noterons aussi $\sigma\times z$ ce générateur. Si $\dim|\tau| = \dim|\sigma|+1$, il y a une 1-cellule $|a|$ de S_j, d'extrémités z_0 et z_1, telle que $|\tau| = |\sigma| \times |a|$, et nous choisissons le générateur $\tau = \sigma\times a$ par récurrence sur la dimension de $|\tau|$ de façon que, si $\partial a = z_1 - z_0$, alors $\partial\tau = \sigma \times z_1 - \sigma \times z_0 - \partial\sigma \times a$ (si $\partial\sigma = \sum_r \epsilon_r\sigma_r$, alors $\partial\sigma \times a = \sum_r \epsilon_r\sigma_r \times a$). Si $\omega = \sum_u \epsilon_u a_u$ est une 1-chaîne dans S_j, nous notons $\sigma\times\omega = \sum_u \epsilon_u\sigma \times a_u$. Nous choisissons ensuite inductivement les générateurs $v_j\tau$ de façon que $\partial(v_j\tau) = \tau - v_j\partial\tau$ (si $\kappa = \sum_r \epsilon_r\tau_r$ est une chaîne dans C_j, $v_j\kappa$ est la chaîne $\sum_r \epsilon_r v_j\tau_r$ dans D_j et une convention analogue s'appliquera aux chaînes $v_{j'}v_j\kappa$). Enfin, nous choisissons inductivement les générateurs $v_{j'}v_j\tau$ de façon que $\partial(v_{j'}v_j\tau) = v_j\tau - v_{j'}\tau + v_{j'}v_j\partial\tau$.

Pour j, j' dans J tels que $\dim j' = \dim j - 1$, notons $\epsilon^j_{j'}$ les coefficients d'incidence tels que $\partial c_j = \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} c_{j'}$ ($\epsilon^j_{j'} = 0$ si $|c_{j'}|$ n'est pas une face de $|c_j|$). Soit $\mathcal{F}(j) = \{j' \in J \,|\, j' < j$ et $\dim j' = \dim j - 1\}$. Pour tout $j \in J$, choisissons un sommet z_j de L_j et posons $|\tau(j)| = |\sigma(j)| \times \{z_j\}$ et

$$\Pi(j) = \bigcup_{j'\le j} D_{j'} \cup \bigcup_{j''<j'\le j} E(j'', j').$$

Pour $j'' \le j' < j$, les sommets z_j et $z_{j'}$ appartiennent à $L_{j''}$ et l'arbre $T_{j''}$ contient une unique 1-chaîne $\omega_{j''}(j', j)$ telle que $\partial\omega_{j''}(j', j) = z_{j'} - z_j$. Pour j tel que $\dim j \geq 2$ et pour $j' \in \mathcal{F}(j)$, définissons des chaînes $\beta^j_{j'}$ et $\gamma^j_{j'}$ dans $\Pi(j)$ par

$$\beta^j_{j'} = v_{j'}\partial\sigma(j') \times \omega_{j'}(j', j) - \sum_{j'' \in \mathcal{F}(j')} \epsilon^{j'}_{j''} v_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j)$$

et

$$\gamma^j_{j'} = v_{j'}v_j\partial\sigma(j') \times z_j + \sum_{j'' \in \mathcal{F}(j')} \epsilon^{j'}_{j''}(v_{j''}v_{j'}\sigma(j'') \times z_{j'} - v_{j''}v_j\sigma(j'') \times z_j)$$

et posons $\beta^j_{j'} = \gamma^j_{j'} = 0$ si $\dim j = 1$. Convenons aussi de poser $\beta^j_{j'} = \gamma^j_{j'} = 0$ si $|c_{j'}|$ n'est pas une face de $|c_j|$; cela permettra de supposer que, dans toutes les formules du type $\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\beta^j_{j'}$ intervenant ci-dessous, j' parcourt tous les indices tels que $\dim j' = \dim j - 1$, j'' tous ceux tels que $\dim j'' = \dim j - 2$ et j''' tous ceux tels que $\dim j''' = \dim j - 3$. Définissons une fonction $\vartheta : C(\widetilde{K}, R) \to C(P, R)$ en posant $\vartheta(c_j) = \tau(j)$ si $\dim j = 0$ et

$$\vartheta(c_j) = \tau(j) + \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}(\sigma(j') \times \omega_{j'}(j', j) + \beta^j_{j'} + \gamma^j_{j'})$$

si $\dim j > 0$. Notons que $\vartheta(c_j)$ appartient à $C(\Pi(j), R)$. Nous allons montrer que ϑ est un morphisme de chaînes. Pour cela, nous devons vérifier que $\vartheta(\partial c_j) = \partial\vartheta(c_j)$ si $\dim j > 0$. Notons d'abord que le choix des générateurs c_j et τ garantit que si $\partial c_j = \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} c_{j'}$, alors $\partial\sigma(j) = \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j')$ et $\partial\tau(j) = \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j') \times z_j$.

Si $|c_j|$ est une 1-cellule de sommets $|c_{j_1}|$ et $|c_{j_0}|$ et si $\partial c_j = \epsilon^j_{j_1}c_{j_1} + \epsilon^j_{j_0}c_{j_0}$, alors

$$\begin{aligned}
\partial\vartheta(c_j) &= \partial(\tau(j) + \epsilon^j_{j_1}\sigma(j_1) \times \omega_{j_1}(j_1, j) + \epsilon^j_{j_0}\sigma(j_0) \times \omega_{j_0}(j_0, j)) \\
&= \epsilon^j_{j_1}\sigma(j_1) \times z_j + \epsilon^j_{j_0}\sigma(j_0) \times z_j \\
&\quad + \epsilon^j_{j_1}\sigma(j_1) \times (z_{j_1} - z_j) + \epsilon^j_{j_0}\sigma(j_0) \times (z_{j_0} - z_j) \\
&= \epsilon^j_{j_1}\sigma(j_1) \times z_{j_1} + \epsilon^j_{j_0}\sigma(j_0) \times z_{j_0} = \vartheta(\partial c_j).
\end{aligned}$$

Si $\dim j > 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial\vartheta(c_j) &= \partial\big(\tau(j) + \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}(\sigma(j') \times \omega_{j'}(j', j) + \beta^j_{j'} + \gamma^j_{j'})\big) \\
&= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j') \times z_j + \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\big(\sigma(j') \times (z_{j'} - z_j) - \partial\sigma(j') \times \omega_{j'}(j', j)\big) \\
&+ \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\big(\partial\sigma(j') \times \omega_{j'}(j', j) - v_{j'}\partial\sigma(j') \times (z_{j'} - z_j)\big) \\
&- \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\big(\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j) - v_{j''}\sigma(j'') \times (z_{j'} - z_j) \\
&\qquad + v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j)\big) \\
&+ \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\big(v_j\partial\sigma(j') \times z_j - v_{j'}\partial\sigma(j') \times z_j\big) \\
&+ \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\big(v_{j'}\sigma(j'') \times z_{j'} - v_{j''}\sigma(j'') \times z_{j'} + v_{j''}v_{j'}\partial\sigma(j'') \times z_{j'}\big) \\
&- \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\big(v_j\sigma(j'') \times z_j - v_{j''}\sigma(j'') \times z_j + v_{j''}v_j\partial\sigma(j'') \times z_j\big).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}v_j\partial\sigma(j') \times z_j = v_j\partial\big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j')\big) \times z_j = v_j\partial\partial(\sigma(j)) = 0$$

et, notant que $\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''} = 0$ (c'est le coefficient de $0 = \partial\partial(\sigma(j))$ sur $c_{j''}$), nous avons aussi

$$\sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}v_j\sigma(j'') \times z_j = \sum_{j''} \big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\big)v_j\sigma(j'') \times z_j = 0$$

$$\sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}v_{j''}v_j\partial\sigma(j'') \times z_j = \sum_{j''} \big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\big)v_{j''}v_j\partial\sigma(j'') \times z_j = 0.$$

Comme $\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}v_{j'}\partial\sigma(j') \times z_{j'} = \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}v_{j'}\sigma(j'') \times z_{j'}$, il reste après simplification

$$\begin{aligned}
\partial\vartheta(c_j) &= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j') \times z_{j'} - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j) \\
&\quad - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j) + \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}v_{j''}v_{j'}\partial\sigma(j'') \times z_{j'}.
\end{aligned}$$

Si $\dim j = 2$, alors $\partial\sigma(j'') = 0$ et cette expression se réduit à

$$\partial\vartheta(c_j) = \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j') \times z_{j'} - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j).$$

Si $\dim j = 2$, alors

$$\begin{aligned}\vartheta(\partial c_j) &= \vartheta\big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'} c_{j'}\big)\\ &= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\big(\tau(j') + \sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j'', j')\big).\end{aligned}$$

Dans l'arbre $T_{j''}$, nous avons $\omega_{j''}(j'', j') = \omega_{j''}(j'', j) - \omega_{j''}(j', j)$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j'', j') &= \sum_{j''} \sigma(j'') \times \big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\big)\omega_{j''}(j'', j)\\ &\qquad - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j)\\ &= -\sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j),\end{aligned}$$

et

$$\vartheta(\partial c_j) = \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\sigma(j') \times z_{j'} - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j) = \partial\vartheta(c_j)$$

si $\dim j = 2$.

En utilisant l'observation précédente sur $\omega_{j''}(j'', j')$, nous obtenons, quand

$\dim j > 2$

$$\begin{aligned}
\vartheta(\partial c_j) &= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \vartheta(c_{j'}) \\
&= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \big(\tau(j') + \sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''}(\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j'', j') + \beta^{j'}_{j''} + \gamma^{j'}_{j''})\big) \\
&= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \tau(j') - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \sigma(j'') \times \omega_{j''}(j', j) \\
&+ \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''} \big(v_{j''} \partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j'', j') \\
&\qquad\qquad - \sum_{j'''} \epsilon^{j''}_{j'''} v_{j'''} \sigma(j''') \times \omega_{j'''}(j'', j')\big) \\
&+ \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''} \big(v_{j''} v_{j'} \partial\sigma(j'') \times z_{j'} + \sum_{j'''} \epsilon^{j''}_{j'''} (v_{j'''} v_{j''} \sigma(j''') \times z_{j''} \\
&\qquad\qquad - v_{j'''} v_{j'} \sigma(j''') \times z_{j'})\big).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{j',j'',j'''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} v_{j'''} v_{j''} \sigma(j''') \times z_{j''} &= \sum_{j'',j'''} \epsilon^{j''}_{j'''} v_{j'''} v_{j''} \sigma(j''') \times \big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''}\big) z_{j''} \\
&= O
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{j',j'',j'''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} v_{j'''} v_{j'} \sigma(j''') \times z_{j'} = \sum_{j',j'''} \epsilon^j_{j'} v_{j'''} v_{j'} \sigma(j''') \times \big(\sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''}\big) z_{j'} = 0$$

puisque$\sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} = 0$ (c'est le coefficient de $0 = \partial\partial(c_{j'})$ sur $c_{j'''}$). De plus,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j',j'',j'''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} v_{j'''} \sigma(j''') \times \omega_{j'''}(j'', j') \\
&\qquad = \sum_{j'''} v_{j'''} \sigma(j''') \times \big(\sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} \omega_{j'''}(j'', j')\big)
\end{aligned}$$

et la chaîne $\omega(j''') = \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} \omega_{j'''}(j'', j')$ de $T_{j'''}$ vérifie

$$\begin{aligned}
\partial\omega(j''') &= \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} (z_{j''} - z_{j'}) \\
&= \sum_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''} \big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \epsilon^{j'}_{j''}\big) z_{j''} - \sum_{j'} \epsilon^j_{j'} \big(\sum_{j''} \epsilon^{j'}_{j''} \epsilon^{j''}_{j'''}\big) z_{j'} = 0
\end{aligned}$$

et comme $T_{j'''}$ est un complexe acyclique de dimension un, nous avons $\omega(j''') = O$, donc

$$\sum_{j',j'',j'''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\epsilon^{j''}_{j'''} v_{j'''}\sigma(j''') \times \omega_{j'''}(j'',j') = 0.$$

Comme en outre

$$\begin{aligned}\sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''} v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j'',j') &= \sum_{j''}\big(\sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}) v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j'',j) \\ &\quad - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''} v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j',j) \\ &= - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''} v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j',j),\end{aligned}$$

nous obtenons après simplification

$$\begin{aligned}\vartheta(\partial c_j) &= \sum_{j'} \epsilon^j_{j'}\tau(j') - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''}\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j',j) \\ &\quad - \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''} v_{j''}\partial\sigma(j'') \times \omega_{j''}(j',j) + \sum_{j',j''} \epsilon^j_{j'}\epsilon^{j'}_{j''} v_{j''}v_{j'}\partial\sigma(j'') \times z_{j'} \\ &= \partial\vartheta(c_j).\end{aligned}$$

La fonction f. Pour construire f, nous utiliserons le fait que la subdivision barycentrique de M en est une triangulation. Nous notons b_τ le barycentre de la cellule $|\tau|$ de M. Pour chaque cellule $|\tau|$ de M, il existe, par définition de M, une cellule $|\tau'|$ dont $|\tau|$ est une face et telle que $p_k^{-1}(\mathring{\tau}') \cap O^k_n \neq \emptyset$; fixons une telle cellule $|\tau'|$ et un point $x(\tau)$ de $p_k^{-1}(\mathring{\tau}') \cap O^k_n$ en convenant de prendre $|\tau'| = |\tau|$ si $p_k^{-1}(\mathring{\tau}) \cap O^k_n \neq \emptyset$. Si $|\tau_1|$ et $|\tau_2|$ sont deux cellules de M telles que $|\tau_1| \cap |\tau_2| \neq \emptyset$ et si $x(\tau_i)$ appartient à $p_k^{-1}(\mathring{\tau}'_i)$ pour $i = 1, 2$, alors $\emptyset \neq |\tau_1| \cap |\tau_2| \subset |\tau'_1| \cap |\tau'_2|$, donc $d(x(\tau_1), x(\tau_2)) \leq 4.2^{-k}$ d'après (7).

Le sous-complexe Q de M est de dimension $n+1$, donc si le simplexe $|b_{\tau_0}, \dots, b_{\tau_r}|$ ($|\tau_0| < \cdots < |\tau_r|$) de la subdivision barycentrique de M est contenu dans Q, alors $r \leq n+1$. D'après ce qui précède, tous les $x(\tau_i)$ sont dans la boule fermée $\overline{B}(x(\tau_0), 2^{2-k})$. Puisque $x(\tau_0)$ appartient à O^k_n, le produit $\overline{B}(x(\tau_0), 2^{2-k})^{n+2}$ est contenu dans U_{n+1}, ce qui permet, pour un point $y = \sum_{i=0}^r t_i b_{\tau_i}$ de ce simplexe, de poser

$$f(y) = \lambda_r(x(\tau_0), \dots, x(\tau_r); t_0, \dots, t_r).$$

D'après $(\star)$, $f(y)$ ne dépend pas du choix du simplexe de la subdivision barycentrique de Q contenant y (pourvu que $|\tau_0| < \cdots < |\tau_r|$), et nous définissons ainsi une fonction $f : Q \to X$ telle que $f(b_\tau) = x(\tau)$ pour toute cellule $|\tau|$ de Q. Par définition de O_n^k, le diamètre de $f(|b_{\tau_0}, \ldots, b_{\tau_r}|)$ est inférieur à 2^{-n}, donc $d(f(y), f(b_{\tau_i})) < 2^{-n}$ pour tout $y \in |b_{\tau_0}, \ldots, b_{\tau_r}|$ et $0 \leq i \leq r$. Pour tout $j \in J$, posons $f(v_j) = x(\tau(j))$. Nous avons alors

(10) $d(f(y), f(v_j)) < \frac{9}{2}.2^{-n}$ pour tout $y \in C_j \cup \{v_{j'} \mid j' \leq j\}$.

En effet, si $|\tau|$ est une cellule de C_j, alors $\pi(|\tau|) \subset |\sigma(j)|$, et si $x(\tau)$ appartient à $p_k^{-1}(\overset{\circ}{\tau}{}')$ et $x(\tau(j))$ à $p_k^{-1}(\overset{\circ}{\tau}_j)$, alors $|\tau| \cap |\tau'| \neq \emptyset \neq |\tau(j)| \cap |\tau_j|$, donc, en utilisant (6) et (7), nous obtenons

$$\begin{aligned} d(x(\tau), x(\tau(j))) &\leq \operatorname{diam} p_k^{-1}(|\tau'|) + \operatorname{diam} p_n^{-1}(|\sigma(j)|) + \operatorname{diam} p_k^{-1}(|\tau_j|) \\ &< 2.2^{-k} + (2^{-n} + 2^{-k}) + 2.2^{-k} \leq \frac{7}{2}.2^{-n}. \end{aligned}$$

Nous avons donc en particulier $d(f(v_{j'}), f(v_j)) < \frac{7}{2}.2^{-n}$ si $j' \leq j$. Si le simplexe $|b_{\tau_0}, \ldots, b_{\tau_r}|$ est contenu dans C_j, alors $|\tau_r| \subset C_j$ et $d(f(v_j), f(y)) \leq d(f(v_j), f(b_{\tau_r})) + d(f(b_{\tau_r}), f(y)) < \frac{7}{2}.2^{-n} + 2^{-n} = \dfrac{9}{2}.2^{-n}$ pour tout y dans ce simplexe, d'où (10).

Tout point y de D_j s'écrit $y = t_0u + t_1v_j$ où u appartient à C_j et (t_0, t_1) à Δ_1, et tout point y de $E(j', j)$ s'écrit $y = t_0u + t_1v_{j'} + t_2v_j$ où u appartient à $C_{j'}$ et (t_0, t_1, t_2) à Δ_2. Puisque $f(v_j)$ appartient à $O_n^k \subset O_n$, $B(f(v_j), \frac{9}{2}.2^{-n})^3$ est contenu dans U_2, donc nous pouvons poser

$$f(y) = \lambda_1(f(u), f(v_j); t_0, t_1)$$

pour $y = t_0u + t_1v_j \in D_j$ et

$$f(y) = \lambda_2(f(u), f(v_{j'}), f(v_j); t_0, t_1, t_2)$$

pour $y = t_0u + t_1v_{j'} + t_2v_j \in E(j', j)$. Il résulte de $(\star)$ que ces définitions sont compatibles entre elles et compatibles avec la définition de $f|Q$. Puisque les fonctions λ_m sont continues, la fonction f ainsi construite est continue. Par définition de O_n, $\lambda_2(B(f(v_j), \frac{9}{2}.2^{-n})^3 \times \Delta_2)$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}'$, donc il résulte de (10) que

(11) $f\big(\bigcup_{j' \leq j} \Pi(j')\big)$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}'$ pour tout $j \in J$.

Soit $\mu : C(P, R) \to S(P, R)$ un morphisme de chaînes tel que $\mu(\tau) \in S(|\tau|, R)$ pour toute cellule $|\tau|$ de P. Pour tout simplexe s' de K', soit $|c_{j(s')}|$

la plus petite cellule de $\widetilde{K}$ contenant $|s'|$. Soit $\nu : C(K', R) \to C(\widetilde{K}, R)$ un morphisme de chaînes tel que $\nu(s') \in C(|c_{j(s')}|, R)$ pour tout simplexe s' de K', et soit enfin $\zeta = f_{\#} \circ \mu \circ \vartheta \circ \nu : C(K', R) \to S(X, R)$.

Si s' est un simplexe de K', alors, pour toute face s'' de s', $\nu(s'')$ appartient à $C(|c_{j(s')}|, R)$, donc $\vartheta(\nu(s''))$ est contenu dans $C\big(\bigcup_{j \le j(s')} \Pi(j), R\big)$, et $\|\zeta(s'')\|$ est contenu dans $f(\bigcup_{j \le j(s')} \Pi(j))$. D'après (11), il y a un élément U' de $\mathcal{U}'$ contenant $f(\bigcup_{j \le j(s')} \Pi(j))$, donc $\|\zeta(s'')\| \subset U'$ pour toute face s'' de s', ce qui montre que ζ est une réalisation algébrique de K' relativement à $\mathcal{U}'$, donc a fortiori relativement à $\mathcal{U}$, et la condition (b) est vérifiée.

Soit $G_s = G_{j_0} \cap \dots \cap G_{j_r}$ un élément non vide de $\mathcal{G}$, où $s = [j_0, \dots, j_r]$ est un simplexe de K. Puisque $G_{j_r} \neq \emptyset$, il contient un point x_s de $p_k^{-1}(M_{j_r}) \cap O_n^k$. D'après (8), G_s est contenu dans $B(x_s, 2.2^{-n})$. En outre, $d(x_s, f(v_{j_r})) < 3.2^{-n}$ car si $f(v_{j_r}) = x(\tau(j_r))$ appartient à $p_k^{-1}(\mathring{\tau}_r)$, alors $\emptyset \neq |\tau_r| \cap |\tau(j_r)| \subset |\tau_r| \cap M_{j_r}$ et $d(x_s, f(v_{j_r})) \le \operatorname{diam} p_k^{-1}(|\tau_r|) + \operatorname{diam} p_k^{-1}(M_{j_r}) \le \operatorname{diam} p_k^{-1}(|\tau_r|) + \operatorname{diam} p_n^{-1}(|\sigma(j_r)|) \le 2.2^{-k} + 2.2^{-n} \le 3.2^{-n}$ d'après (6) et (7). Puisque x_s appartient à O_n, il y a un élément U'_s de $\mathcal{U}'$ qui contient $\lambda_3\big(B(x_s, \frac{9}{2}.2^{-n})^3 \times \Delta_2\big) \supset B(x_s, \frac{9}{2}.2^{-n})$, donc U'_s contient G_s et $f(v_{j_r})$.

Nous avons $\psi\big(S(G_s, R)\big) \subset C(\operatorname{Tr} s, R)$, qui est la somme des complexes $C(s', R)$ où s' parcourt les simplexes de $\operatorname{Tr} s$. Pour chaque tel simplexe, $\zeta(C(s', R))$ est contenu dans $S\big(f(\bigcup_{j \le j(s')} \Pi(j)), R\big)$ et $f(\bigcup_{j \le j(s')} \Pi(j))$ est contenu dans un élément $U'_{s'}$ de $\mathcal{U}'$. Alors $S(\bigcup_{s'} U'_{s'}, R)$ contient $\zeta(C(\operatorname{Tr} s, R)) \supset \zeta \circ \psi\big(S(G_s, R)\big)$. Pour tout simplexe s' de $\operatorname{Tr} s$, le plus petit simplexe fermé de K contenant $|s'|$ contient $|j_0, \dots, j_r|$, donc $|c_{j(s')}|$ contient $|c_{j_r}|$ et $j_r \le j(s')$. Par suite, $U'_{s'}$ contient $f(v_{j_r})$, donc $U'_{s'} \cap U'_s \neq \emptyset$, et $S(\operatorname{St}(U'_s, \mathcal{U}'), R)$ contient $S(G_s, R) \cup S(\bigcup_{s'} U'_{s'}, R) \supset S(G_s, R) \cup \zeta \circ \psi\big(S(G_s, R)\big)$, et comme $\operatorname{St}(U'_s, \mathcal{U}')$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$, la condition (c′) est vérifiée. □

Les théorèmes 7 et 8 montrent que tout espace ULC contractile métrisable a la propriété du point fixe pour les applications multivoques compactes s.c.s. F telles que $F(x)$ soit $\mathbb{Q}$-acyclique pour tout x. Ce résultat se généralise à tous les espaces ULC contractiles séparés par les techniques développées dans [3] et [4].

REFERENCES

[1] K. Borsuk. Theory of retracts. PWN, Warszawa, 1967.

[2] R. Cauty. Un espace métrique linéaire qui n'est pas un rétracte absolu. *Fund. Math.* **146** (1994), 85–99.

[3] R. Cauty. Solution du problème de point fixe de Schauder. *Fund. Math.* **170** (2001), 231–246.

[4] R. Cauty. Un théorème de point fixe pour les fonctions multivoques acycliques. In: Functional Analysis and its Applications, éds V. Kadets, W. Żelasko, North-Holland, 2004, 71–80.

[5] R. Dold. Lectures on Algebraic Topology. Springer Verlag, Berlin, 1972.

[6] C. H. Dowker. Mapping theorems for non compact spaces. *Amer. J. Math.* **69** (1947), 200–242.

[7] A. N. Dranishnikov. Sur un problème de P.S. Alexandrov. *Mat. Sb.* **135(177)** (1988), 551–557 (en russe).

[8] R. Engelking. General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[9] J. B. Giever. On the equivalence of two singular homology theories. *Ann. Math.* **51** (1950), 178–191.

[10] A. Granas, J. Dugundji. Fixed Point Theory. Springer Verlag, Berlin, 2003.

[11] S. T. Hu. Theory of retracts. Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[12] S. Mardešić. Comparison of singular and Čech homology in locally connected spaces. *Michigan Math. J.* **6** (1959), 151–166.

[13] S. Mardešić, J. Segal. Shape Theory. North-Holland, Amsterdam, 1982.

[14] E. Michael. Local properties of topological spaces. *Duke Math. J.* **21** (1954), 163–171.

[15] E. H. Spanier. Algebraic Toplogy. Mc Graw-Hill, New-York, 1966.

Université Paris 6
Institut de Mathématiques de Jussieu
case 247, 4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
e-mail: `cauty@math.jussieu.fr`

Received October 7, 2005