

Provided for non-commercial research and educational use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

# Serdica

## Mathematical Journal

# Сердика

## Математическо списание

---

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.  
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.  
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on  
Serdica Mathematical Journal  
which is the new series of  
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes  
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>  
or contact: Editorial Office  
Serdica Mathematical Journal  
Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences  
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49  
e-mail: [serdica@math.bas.bg](mailto:serdica@math.bas.bg)

## SOLUTIONS GLOBALES RÉGULIÈRES POUR QUELQUES ÉQUATIONS LINEAIRES D'ÉVOLUTION DU TYPE PSEUDO-DIFFÉRENTIEL SINGULIER

D. Gourdin, H. Kamoun, O. Ben Khalifa

*Communicated by T. Gramchev*

ABSTRACT. We give here examples of equations of type (1)  $\partial_{tt}^2 y - p(t, D_x)y = 0$ , where  $p$  is a singular pseudo-differential operator with regular global solutions when the Cauchy data are regular,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^5$ .

**1. Introduction.** a) Dans cet article, nous résolvons l'équation linéaire

$$(1.1) \quad Ly = 0$$

où  $L$  est un opérateur du type pseudo différentiel singulier

$$(1.2) \quad L = \partial_{tt}^2 - p(t, \nabla_x)$$

où  $\nabla_x = (\partial_1, \dots, \partial_n) = \text{grad}_x$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $D = (\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n) = \text{grad}_{t,x}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

---

2000 *Mathematics Subject Classification*: 35C15, 35D05, 35D10, 35S10, 35S99.

*Key words*: Linear Cauchy problem, global solution, Sobolev spaces, Integral Kirchhof solutions.

avec

$$(1.3) \quad p(t, \nabla_x)y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} v.p \int e^{ix\xi} p(t, \xi) \hat{y}(t, \xi) d\xi,$$

et  $p(t, \xi)$  prolongeable en une fonction méromorphe  $p(t, \zeta)$  ( $\zeta \in \mathbb{C}^n$ ).  
Nous traitons complètement le cas où  $n = 5$ .

b) La résolution classique du problème de Cauchy par superposition d'ondes planes pour

$$(1.4) \quad \begin{cases} \square y = 0 \\ y(t=0) = 0, \quad y'_t(t=0) = g \end{cases}$$

permet d'obtenir des propriétés de décroissance lorsque  $t \rightarrow +\infty$  de  $Dy$  dans les normes  $L^p - L^q$ , obtenues grâce aux représentations intégrales particulières de  $y$  ( $n \geq 3$ ) :

$$(1.5) \quad y(t, x) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r Q(r, x) dr,$$

avec

$$(1.6) \quad Q(r, x) = \frac{1}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} g(x + rz) dz.$$

(1.5) et (1.6) se simplifient lorsque  $n = 3$ .

$$(1.7) \quad \begin{cases} y(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r Q(x, r) dr = tQ(t, x) \\ y(t, x) = \frac{t}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} g(x + tz) dz. \end{cases}$$

Notre problème (1.2) (1.3) trouve un exemple d'opérateur  $L$  en exhibant  $p_n(t, \nabla_x)$  de telle façon que la solution  $y$  du problème de Cauchy associée à (1.3).

$$(1.8) \quad \begin{cases} \partial_{tt}^2 y - p_n(t, \nabla_x)y = 0 \\ y(t=0) = 0, \quad y'_t(t=0) = g \end{cases}$$

soit la fonction :

$$(1.9) \quad y(t, x) = \frac{t}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} g(x + tz) dz,$$

quelque soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n$  étant l'aire de la sphère  $S^{n-1}(0,1)$ .

c) L'équation d'Euler-Poisson-Darboux ([11]) comparée à notre équation. Nos opérateurs linéaires ne sont pas hyperboliques mais peuvent être comparés à l'opérateur de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux suivante :

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) = \Delta_x I(x, t)$$

Elle a pour propriété d'avoir pour solution la moyenne sphérique de toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  définie par l'expression

$$(1.10) \quad I(x, t) = \frac{1}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} f(x + t\xi) d\xi$$

pour tout  $t \geq 0$ , ou même de toute fonction  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  étant un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $x$  de  $D$  ayant une distance à la frontière de  $D$  supérieure strictement à  $t$ .

Signalons que J. Leray et S. Delache ([9]) ont étudié la solution fondamentale de cette équation et d'une équation généralisée mettant en évidence des propriétés de lacune de la théorie de Gårding. (cf aussi [12]).

Dans ce travail au lieu de  $I(x, t)$ , nous considérons

$$(1.11) \quad I'(x, t) = tI(x, t) = \frac{t}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} f(x + t\xi) d\xi$$

et nous cherchons une équation de la forme :

$$(1.12) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} I' - N(t, D_x).I' = \Delta_x I'$$

dont la solution est  $I'$  satisfaisant les données de Cauchy

$$I'(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} I'(x, 0) = f(x).$$

Pour calculer  $N$  précisément, nous nous limitons au cas  $n = 5$  et nous utilisons des fonctions  $\sigma(t, \xi)$  attachés à des opérateurs singuliers et méromorphes en  $\xi$ .

Nous utilisons des valeurs principales d'intégrales pour exprimer ensuite l'opérateur  $N$  sous forme  $Nu = T(Qu)$  où  $T$  est un opérateur linéaire "convolution avec une fonction  $\chi$ " et  $Q$  un opérateur pseudo-différentiel.

Signalons que nos opérateurs satisfont à la propriété de Huygens considéré par P.Günther ([10]) dans sa classification.

## 2. Enoncés des résultats.

**Théorème 2.1.** *Les opérateurs  $p(t, D_x)$  tels que le problème de Cauchy :*

$$(2.1) \quad \begin{cases} Ly = \partial_{tt}^2 y - p(t, D_x) y = 0 \\ y(t=0) = 0, \quad y_t(t=0) = g \end{cases}$$

admette une solution de la forme :

$$(2.2) \quad y = \frac{t}{w_n} \int_C g(x + tz) dz,$$

où  $C$  est une hypersurface régulière compacte fermée de  $\mathbb{R}^n$  paramétrable en coordonnées polaires sur  $\mathbb{R}^n$ , sont déterminés par l'expression intégrale avec valeur principale :

$$p(t, D_x)y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{U_\xi} e^{ix\xi} p(t, \xi) \widehat{y}(t, \xi) d\xi$$

( modulo un espace vectoriel d'opérateurs de convolution  $q$  du type  $qy = y *_x h$ ,  $h$  étant une fonction analytique transformée de Fourier inverse d'une distribution à support compact )

où

$$p(t, \xi) = \frac{\int_C e^{it(z.\xi)} (2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2) dz}{t \int_C e^{it(z.\xi)} dz}$$

a un prolongement méromorphe  $p(t, \zeta)$  sur  $\mathbb{C}_\zeta^n$  et  $U_\xi$  est l'ouvert complémentaire dans  $\mathbb{R}_\xi^n$  de

$$F = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; \int_C e^{it(z.\xi)} dz = 0 \right\}.$$

**Proposition 2.1.** Lorsque  $C = S^{n-1}$ ,  $p(t, \xi)$  peut s'écrire :

$$p(t, \xi) = -|\xi|^2 + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi| \sin \theta_1] \cos^n \theta_1 d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi| \sin \theta_1] \cos^{n-2} \theta_1 d\theta_1} |\xi|^2 - \frac{2}{t} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[t|\xi| \sin \theta_1] \sin \theta_1 \cos^{n-2} \theta_1 d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi| \sin \theta_1] \cos^{n-2} \theta_1 d\theta_1} |\xi|.$$

De plus

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t, \xi) = -\frac{3}{n} |\xi|^2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t, \xi) = -|\xi|^2$$

**Proposition 2.2.** Lorsque  $C = S^{n-1}$ , on a :

- pour  $n = 1$  ( $C = \{-1, 1\}$ ),  $p(t, \xi) = -|\xi|^2 + 2 \frac{t |\xi| |\sin t| |\xi|}{t^2 \cos t |\xi|}$ ,
- pour  $n = 3$   $p(t, \xi) = -|\xi|^2$ ,
- pour  $n = 5$   $p(t, \xi) = -|\xi|^2 + \frac{6}{t^2} + 2 \frac{|\xi|}{t} \frac{t |\xi| |\sin t| |\xi|}{t |\xi| \cos t |\xi| - \sin t |\xi|}$ .

**Remarque 1.** La solution générale pour  $n = 5$  est :

$$p(t, D_x) + \sum_{k \in \text{I}f \text{ini} \subset N} c_k \left[ \frac{-2 \frac{\lambda_k}{t} (\frac{\lambda_k}{t} \|x\| \cos \frac{\lambda_k}{t} \|x\| - \sin \frac{\lambda_k}{t} \|x\|)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \|x\|^3} \right] *$$

où  $p(t, \xi)$  est donné par la proposition 2.2 et le théorème 2.1,  $c_k$  étant des constantes arbitraires.

**Remarque 2.** 1) On peut calculer les valeurs de  $p(t, \xi)$  pour tout  $n$  impair par récurrence sur  $n$  à l'aide des fonctions élémentaires, comme cela a été donné par la proposition 2.2 pour  $n = 1, 3, 5$ .

2) Lorsque  $n$  est pair, on ne peut pas calculer  $p(t, \xi)$  à l'aide des fonctions élémentaires .

3) Cependant par la méthode de descente, pour les mêmes valeurs de  $p(t, \xi)$ , que celles calculables à partir de la proposition 2.1 par les fonctions élémentaires dans le cas impair  $n = 2m + 1$  on obtient, lorsque  $n = 2m$ , la résolution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Ly = \partial_{tt}^2 y - p(t, D_x) y = 0 \\ y(t = 0) = 0, \quad y_t(t = 0) = g, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

avec  $p(t, D_x)y$  exprimée par des valeurs principales d'intégrales, sous la forme

$$(2.3) \quad y = \frac{t}{w_n} \int_{B^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n, |z| \leq 1\}} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz.$$

4) En particulier lorsque  $n = 5$ , on précisera par la suite l'expression de  $p(t, D_x)u$  sous la forme  $p(t, D_x)u = T(Qu)$  où  $Q$  est pseudo-différentiel en  $x$  d'ordre 8 et  $T$  est un opérateur linéaire de convolution par une fonction  $\chi \in \cap_{s > 5} L^s(\mathbb{R}^5)$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$  grâce à un calcul de résidus dans le domaine complexe.

**Proposition 2.3.** Lorsque  $n = 5$ , l'opérateur  $L$  défini pour tout  $t > 0$  et  $u \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$  ( $\wedge$  étant l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $|\xi|$ )

par l'expression :

$$\begin{aligned}
 Lu &= \square u - Nu = \square u - \left( \frac{6}{t^2} u - Mu \right) \\
 &= \square u - \frac{6}{t^2} u - 2 \frac{\wedge}{t} (2\pi)^{-\frac{5}{2}} v.p \int_{\mathbb{R}^5} \frac{e^{ix \cdot \xi} t |\xi| \sin t |\xi|}{t |\xi| \cos t |\xi| - \sin t |\xi|} \widehat{u}(\xi) d\xi \\
 &= \square u - \frac{6}{t^2} u - 2 \frac{\wedge}{t} (2\pi)^{-\frac{5}{2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{C} \cup_{k=1}^{+\infty} ]\lambda_{k-\epsilon}, \lambda_{k+\epsilon}[} \frac{e^{ix \cdot \xi} t |\xi| \sin t |\xi|}{t |\xi| \cos t |\xi| - \sin t |\xi|} \widehat{u}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

où  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  est l'ensemble dénombrable des zéros positifs de  $\lambda \cos \lambda - \sin \lambda$ , existe, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 Lu &= \square u - \left( \frac{6}{t^2} u + (2\pi)^{-5} \int_{S_w^4(0,1)} d\omega \times \int_0^{+\infty} \{ \log |t\rho \cos t\rho - \sin t\rho | \} \right. \\
 &\quad \left. \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{2\rho^5}{t^2 p(\rho)} \int_{\mathbb{R}_y^5} e^{i \|x-y\| \rho \sin \theta_1} p(|D_y|) u(t, y) dy \right] d\rho \right)
 \end{aligned}$$

(où intervient une intégrale absolument convergente au voisinage des zéros  $\rho_k = \frac{\lambda_k}{t}$  de  $t\rho \cos t\rho - \sin t\rho$ ,  $k = 1, \dots, +\infty$  en  $\rho$  et au voisinage de l'infini en  $\rho$ ) avec  $\omega = (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4, \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4, \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, \cos \theta_1 \sin \theta_2, \sin \theta_1)$ ,  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]^3$ ,  $\theta_4 \in [0, 2\pi]$  et  $p = p(\rho)$  est un polynôme réel fixé, quelconque de degré 8 en  $\rho$  ayant ses zéros dans  $C_{\mathbb{C}}[0, +\infty[$ , et vérifie :

$$L \left( \frac{t}{w_n} \int_{S^4} g(x + tz) dz \right) = 0 \quad (n = 5) \quad \text{pour tout } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^5).$$

Ainsi  $L$  est donc indépendant du polynôme  $p$  ayant les propriétés énoncées précédemment .

En particulier en prenant

$$p(\rho) = \rho^2 (1 + \rho^2) (4 + \rho^2) (9 + \rho^2).$$

On obtient la proposition suivante.

**Proposition 2.4.**  $N$  est un opérateur linéaire, continu sur  $C^2([0, +\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$  dans  $C^2([0, +\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$  qui peut s'écrire :

$$N = T [ -\Delta_x (1 - \Delta_x) (4 - \Delta_x) (9 - \Delta_x) u ]$$

où  $T$  est l'opérateur linéaire continu :

$$\begin{aligned}
 T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^5) &\longrightarrow \cap_{r>5} W^{\infty, s}(\mathbb{R}^5) \subset \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^5) \\
 \varphi &\longmapsto \chi * \varphi
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{2\pi}{t} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_p^3}{p(\rho_p)} \frac{2t\rho_p}{t^2} \left[ \frac{1}{\|x\|} - \frac{2 \sin \|x\| \rho_p}{\|x\|^2 \rho_p} - \frac{2(\cos \|x\| \rho_p - 1)}{\|x\|^3 \rho_p^2} \right] \\ & - \frac{\pi}{24} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{2}{t} \frac{-t \sinh t}{t \cosh t - \sinh t} \right) \left[ \frac{1}{\|x\|} + \frac{2}{\|x\|^2} e^{-\|x\|} + \frac{2}{\|x\|^3} (e^{-\|x\|} - 1) \right] \\ & + \frac{2\pi}{15} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{4}{t} \frac{-2t \sinh 2t}{2t \cosh 2t - \sinh 2t} \right) \left[ \frac{1}{2\|x\|} + \frac{1}{2\|x\|^2} e^{-2\|x\|} + \frac{1}{4\|x\|^3} (e^{-2\|x\|} - 1) \right] \\ & - \frac{3\pi}{40} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{6}{t} \frac{-3t \sinh 3t}{3t \cosh 3t - \sinh 3t} \right) \left[ \frac{1}{3\|x\|} + \frac{2}{9\|x\|^2} e^{-3\|x\|} + \frac{2}{27\|x\|^3} (e^{-3\|x\|} - 1) \right] \end{aligned}$$

et s'étend en un opérateur linéaire, continu sur  $W^{8,1}$  à valeurs dans  $\bigcap_{r>5} L^r(\mathbb{R}^5)$ .

**Remarque 3.** Si on choisit  $p(\rho)$  de degré inférieur à 8, on obtient une autre fonction  $\chi$  représentée par une série non convergente.

Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** Soit  $1 \leq p \leq 2, q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q \in [2, +\infty], 6 \left(1 - \frac{2}{q}\right) \leq N_p \leq 6 \left(1 - \frac{2}{q}\right) + 1, N = N_p + s, s \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $g \in W^{N=N_p+s,p}(\mathbb{R}_x^5)$ , il existe une solution unique du système

$$(2.4) \quad \begin{cases} Ly = 0, \\ y_{/t=0} = 0, y_{t/0} = g, \end{cases}$$

avec  $y \in C^0(\mathbb{R}_t^+, W^{s,q}(\mathbb{R}_x^5)) \cap C^1(\mathbb{R}_t^+, W^{s-1,q}(\mathbb{R}_x^5)) \cap C^2(\mathbb{R}_t^+, W^{s-2,q}(\mathbb{R}_x^5))$ . où  $Ly = \square y - N(t, D_x)y, N(t, D_x)$  est un opérateur défini par les propositions 2.3 et 2.4, en particulier

$$N(t, D_x)u = \frac{6}{t^2}u + \frac{2}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}}v.p \int_{\mathbb{R}^5} e^{ix.\xi} \frac{|\xi| \sin t|\xi|}{\cos t|\xi| - \frac{\sin t|\xi|}{t|\xi|}} \widehat{u}(t, \xi) d\xi.$$

Ces théorèmes et propositions se démontrent à l'aide de propositions et lemmes intermédiaires énoncés et démontrés dans les paragraphes suivants.

Nous explicitons les opérateurs  $p(t, D_x)$  dans le cas  $n$  impair plus particulièrement pour  $n = 5$ .

Dans un travail ultérieur nous considérons le cas pair  $n = 2$ .

**3. Les opérateurs singuliers  $p(t, D_x)$  utilisés.** Ce sont les opérateurs décrits au théorème 2.1 et de la proposition 2.1 et de 2.2 obtenue en utilisant la remarque suivante :

C est une hypersurface régulière compacte de  $\mathbb{R}^n$  paramétrable en coordonnées polaires sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$(3.1) \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_2 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ x_n = r \sin \theta_1 \\ \text{Avec } r = \rho(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \geq 0, \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \theta_{n-1} \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

où

$$\rho : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{n-2} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

est une fonction à valeurs strictement positives, périodique de période  $\pi$  par rapport à  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$  et périodique de période  $2\pi$  par rapport à  $\theta_{n-1}$ , avec  $w_n =$  aire de  $C$ .

$$dx_1 \cdots dx_n = r^{n-1} \cos^{n-2} \theta_1 \cos^{n-3} \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}.$$

**4. Existence de l'opérateur  $L = \partial_{tt}^2 - p(t, D_x)$  lorsque  $n = 5$ , sur l'espace  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$ .**

Preuve de la proposition 2.3. La preuve repose sur les deux importants lemmes suivants :

**Lemme 4.1.** *Pour tout  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^5))$  l'intégrale :*

$$K(t, x) = \int_0^{+\infty} \{ \log |t\rho \cos t\rho - \sin t\rho| \} \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{2\rho^3}{t^2 (1 + \rho^2)(4 + \rho^2)(9 + \rho^2)} \int_{\mathbb{R}^5_y} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} (-\Delta)(1 - \Delta)(4 - \Delta)(9 - \Delta) u(t, y) dy \right] d\rho$$

est absolument convergente au voisinage des zéro  $\rho_k$  de la fonction  $t\rho \cos t\rho - \sin t\rho$  en  $\rho$  ( $k = 0, \dots, \infty$ ) et au voisinage de l'infini en  $\rho$ .

**Lemme 4.2.** *On a l'égalité suivante :*

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}_{[0, +\infty[ \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{\epsilon}{7})} } [\log(t\rho \cos t\rho - \sin t\rho)] \times \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{2\rho^3}{t^2(1 + \rho^2)(4 + \rho^2)(9 + \rho^2)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} (-\Delta)(1 - \Delta)(4 - \Delta)(9 - \Delta)u(t, y) dy \right] d\rho$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{C}_{[0, +\infty[ \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{t}{\epsilon})} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^2(1+\rho^2)(4+\rho^2)(9+\rho^2)} \frac{-t^2\rho \sin t\rho}{(t\rho \cos t\rho - \sin t\rho)} \times \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} (-\Delta)(1-\Delta)(4-\Delta)(9-\Delta) u(t, y) dy \right] d\rho$$

De plus

$$Mu = (2\pi)^{-5} \int_{S_w^4} K(t, x, w) dw, \quad Lu = \square u - \frac{6}{t^2} u - Mu.$$

vérifie

$$L\left(\frac{t}{w_5} \int_{S^4} g(x + tz) dz\right) = 0$$

**Plus généralement :**

**Lemme 4.3.** Pour toute polynôme réel  $p(\rho)$  ayant zéros sur  $]-\infty, 0] \cup \{i\mathbb{R}\}$  de degré 8, l'intégrale

$$K_p(t, x) = \int_0^{+\infty} \{ \log |t\rho \cos t\rho - \sin t\rho| \} \times \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{2\rho^5}{t^2 p(\rho)} \int_{\mathbb{R}_y^n} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} p(|D_y|) u(t, y) dy \right] d\rho$$

est absolument convergente au voisinage des zéro  $\rho_k$  de la fonction  $t\rho \cos t\rho - \sin t\rho$  en  $\rho$  ( $k = 0, \dots, \infty$ ) et au voisinage de l'infini en  $\rho$ .

**Lemma 4.4.** On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} K_p(t, x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{C}_{[0, +\infty[ \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{t}{\epsilon})} [ \log(t\rho \cos t\rho - \sin t\rho) ] \times \\ &\quad \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{2\rho^5}{t^2 p(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} p(|D_y|) u(t, y) dy \right] d\rho \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{C}_{[0, +\infty[ \cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k, \frac{t}{\epsilon})} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2 p(\rho)} \frac{-t^2\rho \sin t\rho}{(t\rho \cos t\rho - \sin t\rho)} \times \\ &\quad \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} p(|D_y|) u(t, y) dy \right] d\rho \end{aligned}$$

De plus

$$Mu = (2\pi)^{-5} \int_{S_w^4} K(t, x, w) dw, \quad Lu = \square u - \frac{6}{t^2} u - Mu.$$

vérifie

$$L\left(\frac{t}{w_5} \int_{S^4} g(x + tz) dz\right) = 0$$

**5. Inégalités du type Strichartz et extension de  $L$ .** On a pour tout  $t > 0$

$$Lu = \square u - \left( \frac{6}{t^2} u - Mu \right) = \square u - Nu$$

avec (d'après le lemme 4.4)

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{6}{t^2} u + (2\pi)^{-5} \int_{S_w^4(0,1)} dw \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2\rho^5 t}{t^2 p(\rho)} \frac{t\rho \sin t\rho}{t\rho \cos t\rho - \sin t\rho} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\mathbb{R}_y^5} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} p(|D_y|) u(t, y) dy \right] d\rho \\ &= (2\pi)^{-5} \int_{\mathbb{R}_y^5} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} p(|D_y|) u(t, y) dy \\ &\quad \times \left[ \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta_1 d\theta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta_2 \cos \theta_3 d\theta_2 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\theta_4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 \theta_1 d\theta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta_2 \cos \theta_3 d\theta_2 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\theta_4 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_0^{+\infty} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{2\rho t}{t^2} \frac{t\rho \sin t\rho}{t\rho \cos t\rho - \sin t\rho} \right) \frac{1}{p(\rho)} \rho^4 d\rho \right) \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta_2 \cos \theta_3 d\theta_2 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\theta_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta_2 + 1}{2} d\theta_2 = 2\pi^2.$$

Donc

(5.1)

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{1}{16\pi^3} \int_{\mathbb{R}_y^5} p(|D_y|) u(t, y) dy \times \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta_1 d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 \theta_1 d\theta_1 \right] \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{+\infty} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{2\rho t}{t^2} \frac{t\rho \sin t\rho}{t\rho \cos t\rho - \sin t\rho} \right) \frac{\rho^4}{p(\rho)} d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Notons

$$I = \int_0^{+\infty} e^{i\|x-y\|\rho \sin \theta_1} \frac{\rho^4}{p(\rho)} \left[ \frac{6}{t^2} + \frac{2\rho t}{t^2} \frac{t\rho \sin t\rho}{t\rho \cos t\rho - \sin t\rho} \right] d\rho,$$

et effectuons un calcul de résidus sur  $I$  en supposant que  $p(\rho) = \rho^2 (1 + \rho^2)(4 + \rho^2)(9 + \rho^2)$ .

Si  $\rho$  tend vers  $0$ , alors  $\frac{\rho^4}{p(\rho)} \left[ \frac{6}{t^2} + \frac{2\rho t}{t^2} \frac{t\rho \sin t\rho}{t\rho \cos t\rho - \sin t\rho} \right]$  tend vers  $0$ ;

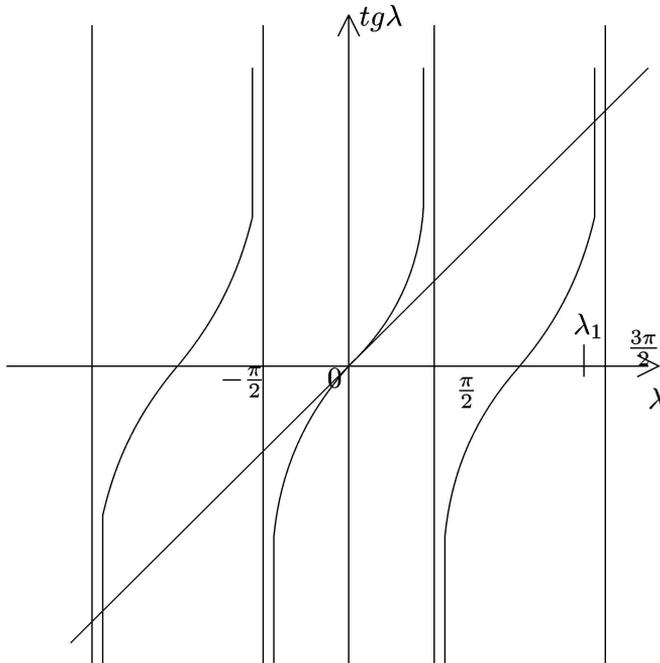
si  $\rho$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\frac{\rho^4}{p(\rho)} \left[ \frac{6}{t^2} + \frac{2\rho t}{t^2} \frac{t\rho \sin t\rho}{t\rho \cos t\rho - \sin t\rho} \right]$  tend vers  $0$ ;

donc  $I$  est semi convergente (cf H. Cartan Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes).

Selon que  $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$  on notera :  $I = I_1$  ou  $I_2$ .

Appelons  $\lambda_k$  les solutions réelles de l'équation  $\lambda \cos \lambda - \sin \lambda = 0$ .

D'après le lemme de l'appendice 1, les seules solutions complexes de cette équation sont réelles et forme une suite croissante  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  avec  $\lambda_{-k} = -\lambda_k$ ,  $\lambda_k \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$  ( $\forall k \in \mathbb{Z}$ ),  $\lambda_k - k\pi$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . On a :  $\lambda_k = t\rho_k$ , en notant  $\rho_k$  la solution correspondante de l'équation  $t\rho \cos t\rho - \sin t\rho = 0$  d'inconnue  $\rho$ , d'après le graphe :



Les résultats des calculs de résidus sont donnés par les deux lemmes suivants :

**Lemme 5.1.** *Pour  $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$  et  $t > 0$ , on a*

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\|x-y\|}{t} \mu \sin \theta_1} \frac{\left(\frac{\mu}{t}\right)^4}{p\left(i\frac{\mu}{t}\right)} \left[ \frac{6i}{t^2} - \frac{2i\mu}{t^2} \frac{\mu \sinh \mu}{\mu \cosh \mu - \sinh \mu} \right] d\mu \\
 & - \frac{i\pi}{t} \sum_{p=1}^{+\infty} e^{i\|x-y\| \rho_p \sin \theta_1} \frac{\rho_p^4}{p(\rho_p)} \frac{2 t \rho_p}{t^2} \\
 & - \frac{\pi}{t} \left\{ e^{-\|x-y\| \sin \theta_1} \left[ \frac{t}{48} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{2}{t} \frac{-t \sinh t}{t \cosh t - \sinh t} \right) \right] \right. \\
 & + e^{-2\|x-y\| \sin \theta_1} \left[ -\frac{t}{15} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{4}{t} \frac{-2t \sinh 2t}{2t \cosh 2t - \sinh 2t} \right) \right] \\
 & \left. + e^{-3\|x-y\| \sin \theta_1} \left[ \frac{3t}{80} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{6}{t} \frac{-3t \sinh 3t}{3t \cosh 3t - \sinh 3t} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

**Lemme 5.2.** *Pour  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$  et  $t > 0$ , on a*

$$\begin{aligned}
 I_2 = & -\frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{\frac{\|x-y\|}{t} \mu \sin \theta_1} \frac{\left(\frac{\mu}{t}\right)^4}{p\left(i\frac{\mu}{t}\right)} \left[ \frac{6i}{t^2} - \frac{2i\mu}{t^2} \frac{\mu \sinh \mu}{\mu \cosh \mu - \sinh \mu} \right] d\mu \\
 & + \frac{i\pi}{t} \sum_{p=1}^{+\infty} e^{i\|x-y\| \rho_p \sin \theta_1} \frac{\rho_p^4}{p(\rho_p)} \frac{2 t \rho_p}{t^2} \\
 & + \frac{\pi}{t} \left\{ e^{\|x-y\| \sin \theta_1} \left[ -\frac{t}{48} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{2}{t} \frac{-t \sinh t}{t \cosh t - \sinh t} \right) \right] \right. \\
 & + e^{2\|x-y\| \sin \theta_1} \left[ \frac{t}{15} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{4}{t} \frac{-2t \sinh 2t}{2t \cosh 2t - \sinh 2t} \right) \right] \\
 & \left. + e^{3\|x-y\| \sin \theta_1} \left[ -\frac{3t}{80} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{6}{t} \frac{-3t \sinh 3t}{3t \cosh 3t - \sinh 3t} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Nous utiliserons dans la suite les lemmes 5.1 et 5.2 pour calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1 \cos^3 \theta_1 d\theta_1$  et  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 I_2 \cos^3 \theta_1 d\theta_1$ .

En effet en remplaçant  $\theta_1$  par  $\theta_1 = -\theta'_1$  lorsque  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$  ainsi  $\theta'_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et en notant  $\theta'_1$  par  $\theta_1$  on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1 \cos^3 \theta_1 d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 I_2 \cos^3 \theta_1 d\theta_1 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta_1 \int_0^{+\infty} e^{\frac{\|x-y\|}{t} \rho \sin \theta_1} \frac{\rho}{(1+\rho)^5} \left[ \frac{6}{t^2} + \frac{2t\rho}{t^2} \frac{t\rho \sin t\rho}{(t\rho \cos t\rho - \sin t\rho)} \right] d\rho \\ &= \frac{\pi}{t} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\rho_p^4}{p(\rho_p)} \frac{2t\rho_p}{t^2} \left( 2\operatorname{Re} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\|x-y\|\rho_p \sin \theta_1}}{i} \cos 3\theta_1 d\theta_1 \right) \\ &\quad - \frac{\pi}{24} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{2}{t} \frac{-t \sinh t}{t \cosh t - \sinh t} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\|x-y\| \sin \theta_1} \cos^3 \theta_1 d\theta_1 \\ &\quad + \frac{2\pi}{15} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{4}{t} \frac{-2t \sinh 2t}{2t \cosh 2t - \sinh 2t} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\|x-y\| \sin \theta_1} \cos^3 \theta_1 d\theta_1 \\ &\quad - \frac{3\pi}{40} \left( \frac{6}{t^2} + \frac{6}{t} \frac{-3t \sinh 3t}{3t \cosh 3t - \sinh 3t} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3\|x-y\| \sin \theta_1} \cos^3 \theta_1 d\theta_1 . \end{aligned}$$

On calcule donc, en annexe :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\|x-y\|\rho_p \sin \theta_1} \cos 3\theta_1 d\theta_1, \\ Q_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\|x-y\| \sin \theta_1} \cos^3 \theta_1 d\theta_1, \\ Q_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\|x-y\| \sin \theta_1} \cos^3 \theta_1 d\theta_1, \\ Q_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3\|x-y\| \sin \theta_1} \cos^3 \theta_1 d\theta_1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{i}{\|x-y\|\rho_p} - \frac{2e^{i\|x-y\|\rho_p}}{\|x-y\|^2 \rho_p^2} - 2i \frac{e^{i\|x-y\|\rho_p} - 1}{\|x-y\|^3 \rho_p^3}, \\ Q_1 &= \frac{1}{\|x-y\|} + \frac{2}{\|x-y\|^2} e^{-\|x-y\|} + \frac{2}{\|x-y\|^3} (e^{-\|x-y\|} - 1), \\ Q_2 &= \frac{1}{2\|x-y\|} + \frac{1}{2\|x-y\|^2} e^{-2\|x-y\|} + \frac{1}{4\|x-y\|^3} (e^{-2\|x-y\|} - 1), \\ Q_3 &= \frac{1}{3\|x-y\|} + \frac{2}{9\|x-y\|^2} e^{-3\|x-y\|} + \frac{2}{27\|x-y\|^3} (e^{-3\|x-y\|} - 1) . \end{aligned}$$

D'après la formule (5.1) nous obtenons une expression de  $Nu$  donnée par la proposition 2.4 énoncée dans le paragraphe 2.

**6. Inégalités  $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$  pour le système (6.1).**

$$(6.1) \quad \begin{cases} Ly &= (\square - N)y = 0 \\ y_{/t=0} &= 0, y_{t/0} = g \end{cases}$$

**6.1. Inégalité  $\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2$  pour (6.1).** On a

$$y(t, x) = \frac{t}{w_n} \int_S g(x + tz) dz.$$

Donc

$$\|y\|_{\mathcal{L}^2} \leq t \|g\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Et par transformation de Fourier on obtient :

$$\|Dy\|_{\mathcal{L}^2} = \|\nabla y\|_{\mathcal{L}^2} + \|\partial_t y\|_{\mathcal{L}^2} \leq c [\|g\|_{\mathcal{L}^2}], \forall t \geq 0.$$

On conjecture que  $c = 1$ .

**6.2. Inégalité  $\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^\infty$  pour (6.1).** On s'intéresse à

$$\begin{cases} Ly &= (\square - N)y = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^{n+1} \quad (n = 5) \\ y_{/t=0} &= 0 \quad y_{t/0} = g \text{ dans } \mathbb{R}^n \quad (n = 5) \end{cases}$$

$$y = \frac{t}{w_n} \int_{S^4} g(x + tz) dz = \Omega(t) g$$

1. On a

$$\begin{aligned} - \int_{S^4} g(x + tz) dz &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} g(x + sz) ds dz \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} (\nabla g)(x + sz) \cdot z ds dz \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5} (\nabla g)(x + sz)(sz) ds dz \\ & \quad (\text{On pose } Z = sz) \\ &= \int_{|Z|>t} |Z|^{-5} (\nabla g)(x + Z) \cdot Z dZ \\ & \quad (\text{car } s = |Z| \text{ et } s^4 dz = dZ \text{ sur } S^4(0, s) ) \end{aligned}$$

Cela implique

$$\left| \int_{S^4} g(x + tz) dz \right| \leq t^{-4} \int_{|Z|>t} (\nabla g)(x + Z) dZ \\ \leq t^{-4} \|g\|_{1,1} .$$

2. De façon analogue on a :

$$\begin{aligned} -t \int_{S^4} (\nabla g)(x + tz) z dz &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} (\nabla g)(x + sz) z ds dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} (\nabla \nabla g)(x + sz)(z, z) ds dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5} \frac{s^4}{s^5} (\nabla \nabla g)(x + sz)(sz, sz) ds dz \\ &\quad (\text{ et en posant } Z = sz) \\ &= t \int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^6} (\nabla \nabla g)(x + Z)(Z, Z) dZ \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} | t \int_{S^4} (\nabla g)(x + tz) \cdot z dz | &\leq t^{-3} \int_{|Z|>t} | \nabla \nabla g(x + Z) | dZ \\ | t \int_{S^4} (\nabla g)(x + tz) \cdot z dz | &\leq t^{-3} \|g\|_{2,1} . \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} -t \int_{S^4} (\nabla g)(x + tz) dz &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} (\nabla g)(x + sz) ds dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} (\nabla \nabla g)(x + sz) \cdot z ds dz \\ &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5} (\nabla \nabla g)(x + sz)(sz) ds dz \\ &\quad (\text{ et on pose } Z = sz) \\ &= t \int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^5} (\nabla \nabla g)(x + Z)(Z) dZ \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| t \int_{S^4} (\nabla g)(x + tz) dz \right| &\leq t^{-3} \int_{|Z|>t} | \nabla \nabla g(x + Z) | dZ \\ \left| t \int_{S^4} (\nabla g)(x + tz) dz \right| &\leq t^{-3} \|g\|_{2,1} . \end{aligned}$$

Rappelons que,

$$\begin{cases} w_n y_t(t, x) &= \int_{S^4} g(x + tz) dz + t \int_{S^4} \nabla g(x + tz) z dz \\ w_n \nabla y(t, x) &= t \int_{S^4} \nabla g(x + tz) dz \end{cases}$$

Par conséquent nous obtenons pour  $t \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \|D\Omega(t)g\|_\infty &\leq \frac{1}{w_n t^3} \left[ \frac{1}{t} \|g\|_{1,1} + \|g\|_{2,1} \right] \\ \|D\Omega(t)g\|_\infty &\leq \frac{1}{w_n t^3} \left[ \frac{1}{t} + 1 \right] \|g\|_{2,1} \leq \frac{2}{w_n t^3} \|g\|_{2,1} \quad \text{car } \|g\|_{1,1} \leq \|g\|_{2,1}. \end{aligned}$$

3. Maintenant soit  $0 \leq t \leq 1$ .

On a

$$\begin{aligned} - \int_{S^4} g(x + tz) dz &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} g(x + sz) ds dz \\ &= - \int_{S^4} \int_t^{+\infty} (s - t) \frac{d^2}{ds^2} g(x + sz) ds dz \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s - t)^2}{2} \frac{d^3}{ds^3} g(x + sz) dz ds \\ &\quad \left( = \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s - t)^2}{2} \sum_{ijklm} \partial_i \partial_j \partial_k g(x + sz)(z, z, z) dz ds \right) \\ &\quad \left( = \int_{|Z|>t} \frac{(|Z| - t)^2}{2|Z|^7} \sum_{ijklm} Z_i Z_j Z_k (\partial_i \partial_j \partial_k g)(x + Z) dZ \right) \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s - t)^3}{6} \frac{d^4}{ds^4} g(x + sz) dz ds \\ &\quad \left( = \int_{|Z|>t} \frac{(|Z| - t)^3}{6|Z|^8} \sum_{ijklm} Z_i Z_j Z_k Z_l (\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l g)(x + Z) dZ \right) \\ &= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s - t)^4}{24} \frac{d^5}{ds^5} g(x + sz) dz ds \\ &\quad \left( = \int_{|Z|>t} \frac{(|Z| - t)^4}{24|Z|^9} \sum_{ijklm} Z_i Z_j Z_k Z_l Z_m (\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \partial_m g)(x + Z) dZ \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\left| - \int_{S^4} g(x + tz) dz \right| \leq \sum_{ijklm} \int |(\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \partial_m g)(x + Z)| dZ$$

$$\left| - \int_{S^4} g(x + tz) dz \right| \leq g_{5,1}.$$

De façon analogue, on a les mêmes résultats pour les autres termes discutés dans le cas  $t > 1$ .

Ainsi nous avons obtenu pour  $0 \leq t \leq 1$  :

$$\|D\Omega(t)g\|_\infty \leq c \|g\|_{6,1}.$$

Donc on a prouvé que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\|D\Omega(t)g\|_\infty(t) \leq c (1+t)^{-3} \|g\|_{6,1}.$$

Par interpolation on obtient le théorème suivant.

**Théorème 6.1.** Soit  $2 \leq q \leq +\infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\forall N_p > 6 \left(1 - \frac{2}{q}\right)$  alors

$\exists c = c(q) \forall g \in W^{N_p, p}$ ,  $\forall t \geq 0$  :

$$\|D\Omega(t)g\|_q \leq c (1+t)^{-3(1-\frac{2}{q})} \|g\|_{N_p, p}$$

$N_p = 6 \left(1 - \frac{2}{q}\right)$  est possible lorsque  $q \in \{2, +\infty\}$ .

## 7. Existence d'une solution de l'équation linéaire (n=5)

$Ly = 0$ ,  $y_{/t=0} = 0$ ,  $y'_{/t=0} = g$ .

Preuve du théorème 2.2. Soit  $g \in W^{N, p}(\mathbb{R}_x^5)$  ( $N = N_p + s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ).  
Considérons  $(\chi_n)_n$  les fonctions régularisantes de Friedrichs ;  $\chi_n * g \rightarrow_{n \rightarrow \infty} g$  dans  $W^{N, p}(\mathbb{R}^5)$  et  $\chi_n * g = g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$ .

Alors la solution de

$$\begin{cases} Ly_n & = 0 \\ y_{n/t=0} & = 0, \quad y_{n \setminus t=0} = g_n \end{cases}$$

est

$$y_n = \frac{t}{w_5} \int_{S(0,1)} g_n(x + tz) dz.$$

En utilisant le théorème 6.1, on montre que la suite  $(y_n)_n$  est de Cauchy et converge vers la solution cherchée.

**8. Remarques.** On a  $Ly = (\square - N)y = \partial_{tt}^2 y - p(t, Dy)$

a)

$$p(t, \xi) = \frac{\int_C e^{itz \cdot \xi} (2i(z \cdot \xi) - t(z \cdot \xi)^2) dz}{t \int_C e^{itz \cdot \xi} dz}$$

puisque,

$$e^{itz \cdot \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k z^k \xi^k}{k!} = 1 + itz \cdot \xi + \frac{i^2 t^2 z^2 \xi^2}{2} + \dots$$

alors

$$e^{itz \cdot \xi} (2i(z \cdot \xi) - t(z \cdot \xi)^2) = 2iz \cdot \xi + (2i^2 t - t)(z \cdot \xi)^2 + \dots$$

D'où

$$\begin{aligned} p(t, \xi) \xrightarrow{t \rightarrow 0} &= \frac{-3 \int_C (z \cdot \xi)^2 dz}{\int_C dz} \quad \text{si } \int_C (z \cdot \xi) dz = 0 \Leftrightarrow \int_C z dz = 0 \quad \forall \xi \\ &= \frac{-3|\xi|^2}{n} \quad \text{si } C = S^{n-1}(0, 1) \end{aligned}$$

b)

$$p(t, \xi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -|\xi|^2 \quad \text{si } C = S^{n-1}(0, 1)$$

c) On conjecture que l'on peut avoir un théorème analogue au théorème 2.2 du paragraphe 2 lorsque  $n \geq 5$  et  $C = S^{n-1}$ ; dans ce cas  $p_n(t, \xi) = T_1(t, \xi) + T_2(t, \xi)$  avec  $T_1(t, \xi) \sim_{|\xi| \rightarrow \infty} -|\xi|^2$  ( $\forall t > 0$ ) et  $T_2(t, \xi) = \frac{2}{t} \frac{D'_t}{D_0}$  avec  $D = \int_S e^{itz \cdot \xi} dz$  ( $= t|\xi| \cos t|\xi| - \sin t|\xi|$  lorsque  $n = 5$ ), on a en effet

$$\begin{aligned} p(t, \xi) &= -\frac{\int_S e^{itz \cdot \xi} (z \cdot \xi)^2 dz}{\int_S e^{itz \cdot \xi} dz} + \frac{2 \int_S i e^{itz \cdot \xi} (z \cdot \xi) dz}{t \int_S e^{itz \cdot \xi} dz}, \\ T_1(t, \xi) &= -\frac{\int_S e^{itz \cdot \xi} (z \cdot \xi)^2 dz}{\int_S e^{itz \cdot \xi} dz}, \\ T_2 &= \frac{2 D'_t}{t D} \quad \text{avec } D = \int_S e^{itz \cdot \xi} dz \end{aligned}$$

d)  $T_2(t, \xi)$  est un symbole singulier car  $D(t, |\xi|)$  admet une infinité de zéros relativement à  $|\xi|$ .

Cependant on peut donner un sens à l'opérateur singulier correspondant  $T_2(t, D_x)$  comme on l'a fait aux paragraphes 4 et 5 dans le cas  $n = 5$ .

Nous examinerons ces généralisations dans un travail ultérieur.

Les auteurs remercient les professeurs Pietro d'Ancona, Todor Gramchev, Satyanad Kichenassamy et Jean Vaillant pour leurs remarques judicieuses.

#### REFERENCES

- [1] ROBERT A. ADAMS. Sobolev Spaces. Pure Appl. Math. vol. **65**, Academic Press, 1975.
- [2] R. COURANT, D. HILBERT. Methods of Mathematical Physics, Volume II. Partial differential equations. Transl. and rev. from the German Original. Reprint of the 1st Engl. ed. 1962, Wiley Classics Edition, John Wiley & Sons, New York 1989.
- [3] J. DIEUDONNÉ. Calcul Infinitésimal . 2 ed, rev. et corr., Collection Methodes, Hermann, Paris, 1980 (in French).
- [4] J. GINIBRE, G. VELO. Inégalités de Strichartz généralisées de l'équation des ondes. Séminaire sur les Equations aux Dérivées partielles. Ecole Polytechnique Palaiseau, Exp No 17, 1995.
- [5] R. RACKE. Lectures on Non linear Evolution Equations. Initial Value Problems. Aspects Math. vol. **19**, Fried. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.
- [6] R. S. STRICHARTZ. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solution of wave equations. *Duke Math. J.* **44**, 3 (1977), 705–714.
- [7] M. E. TAYLOR. Partial differential equations III. Non linear Equations. Appl. Math. Sci. vol. **117**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [8] M. BERGER, D. GAUDUCHON, E. MAZET. Le spectre d'une Variété Riemannienne. Lecture Notes in Math. vol. **194**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [9] S. DELACHE, J. LERAY. Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux et de l'opérateur de Tricomi-Clairaut, hyperbolique d'ordre 2. *Bull. Soc. Math. France* **99** (1971), 313–336.
- [10] P. GÜNTHER. Über einige spezielle probleme aus der theorie des linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss.leipzig. Math. Nat. Kl **102**, 1 (1957), 50 (in German).

- [11] F. JOHN. Plane waves and spherical means applied to partial differential equation. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No 2.
- [12] G. BEYLKIN. The fundamental identity for iterated spherical means and the inversion formula for diffraction tomography and inverse scattering. *J. Math. Phys.* No 24 6pp (1983), 1399–1400.

*Laboratoire d'Analyse complexe  
l'Institut de Maths de Jussieu  
Université Pierre et Marie Curie  
Paris VI  
175, rue du Chevaleret  
75013 Paris, France  
e-mail : gourdin@math.jussieu.fr*

*Received June 13, 2007  
Revised November 5, 2007*