*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000*
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000*
*Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*
*Lovetch, April 3–6, 2000*

# КАК СЕ ГОТВЯТ ЗАДАЧИ? – ЗАПОВЯДАЙТЕ В КУХНЯТА

**Борислав Михайлов**

В доклада се разглежда идеята за създаване на задачи като важен елемент от учебния процес по математика. Как да се изменят началните условия на дадена задача, така че да се получат съществено нови задачи, се показва посредством теоремата на Менелай.

*Какво означава да си учител по математика?* За някои ученици това означава да знаеш по едно решение на всички задачи от съответните сборници. И именно те остават с впечатлението, че математиката е сбор от факти (теореми и задачи), отдавна измислени от някои математически гении. От учениците се очаква само да се научат да възпроизвеждат доказателства и решения, а от учителите им – да ги научат на това. А всъщност голяма част от математиката като наука се състои във откриването и поставянето на задачи, чиито решения понякога се търсят с векове. Именно този процес остава забулен в тайна и може би това е причината математиката да се възприема традиционно като суха и скучна.

*Кое може да стане катализатор на идеи за раждането на нови задачи? Как да се отърсим от излишните условия в да дена задача? Какво да променим от началните условия, така че да получим друга или дори цял клас от задачи?* На тези и подобни въпроси ще се опитаме да отговорим с помощта на един пример от геометрията.

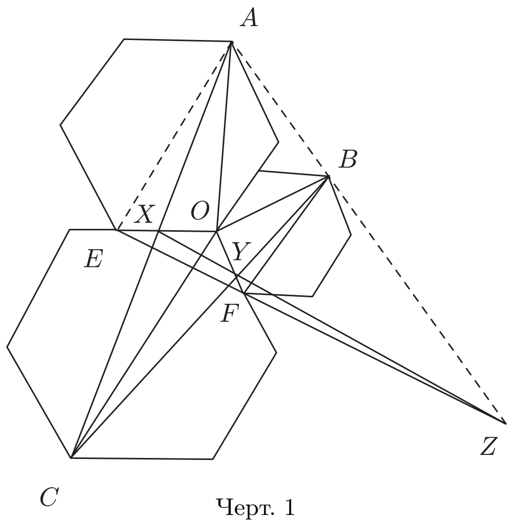
**Теорема на Менелай.** *Даден е $\triangle ABC$. Ако права пресича правите $AB$, $BC$, $CA$ съответно в точките $Z$, $Y$, $X$, то* $\dfrac{CX}{XA}\cdot\dfrac{AZ}{ZB}\cdot\dfrac{BY}{YC}=1$.

Проследявайки равенството забелязваме, че можем да тълкуваме $X$, $Z$ и $Y$ като центрове на хомотетии, при които $C$ се изобразява в $A$, $A$ – в $B$ и накрая $B$ – в $C$. Това тълкуване позволява към $C$ да се прикрепи фигура, която след последователното прилагане на тези хомотетии се възстановява.

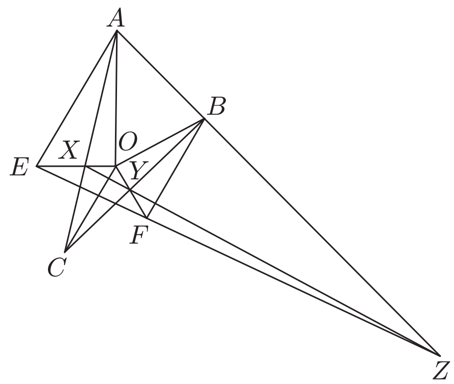
Така например, можем да считаме $C$ за център на окръжност $\gamma$, която чрез $X$ се изобразява в окръжност $\alpha$, после $\alpha$ чрез $Z$ – в окръжност $\beta$ и накрая $\beta$ чрез $Y$ се изобразява в $\gamma$:

**Теорема.** *Окръжностите $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ са вън една от друга. Нека $X$ е пресечната точка на вътрешните общи допирателни на $\alpha$ и $\gamma$, $Y$ – на $\beta$ и $\gamma$ и $Z$ – пресечната точка на общите външни допирателни на $\alpha$ и $\beta$. Тогава $X$, $Y$, $Z$ лежат на една права.*

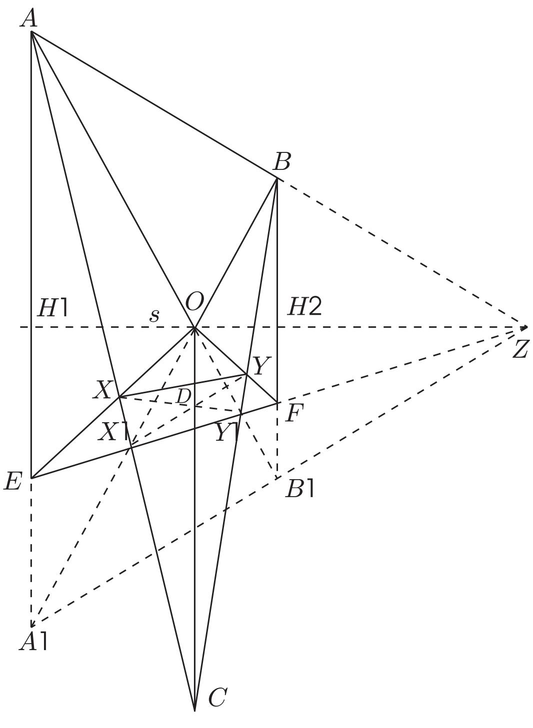
Друг пример – три правилни шестоъгълника с общ връх $O$ (черт. 1). Като откроим някои елементи на чертежа, получаваме черт. 2, който отразява следното: $\triangle AOE$ и $\triangle BOF$ са с ъгли $30°$, $60°$, $90°$, $OC$ разполовява $\sphericalangle EOF$, $X = AC \cap OE$, $Y = BC \cap OF$. Тогава правите $AB$, $EF, XY$ минават през една и съща точка $Z$.




Черт. 1




Черт. 2




Черт. 3

Тук вече трите подобни фигури липсват. Обаче тяхната роля се изпълнява от отсечките $CO,\ AE,\ BF$. Оттук незабавно следва, че ъглите $30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$ са несъществени (правилните шестоъгълници окончателно се изгубиха).

Забелязваме, че $AEFB$ е трапец и че $\triangle AEO$ и $BFO$ са подобни и противоположно ориентирани. Ето защо възниква следният въпрос:

*Как да се намери в един трапец $ABCD$ такава точка $O$, че $\triangle AEO$ и $\triangle BFO$ да са подобни и противоположно ориентирани?*

**Решение.** (черт. 3): През точка $Z = AB \cap EF$ построяваме права $s \perp AE$. Нека $A_1$ и $B_1$ са симетрични с $A$ и $B$ спрямо $s$. Тогава $O = AB_1 \cap A_1B$ с търсената точка. Наистина, $\sphericalangle EAO = \sphericalangle FBO$ поради равнобедрения трапец $AA_1B_1B$. Още $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{AE}{BF}$ и това е достатъчно.

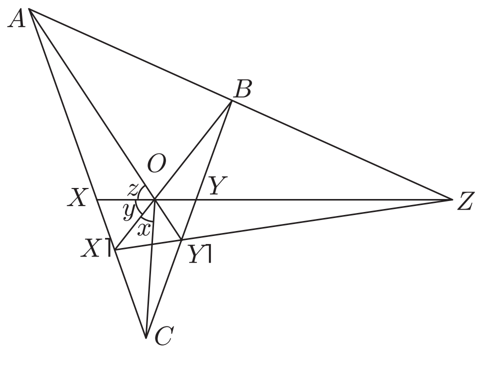
(Единственост: Нека $OH_1$ и $OH_2$ са височини в $\triangle AEO$ и $\triangle BFO$. Тогава $\dfrac{AH_1}{BH_2} = \dfrac{AE}{BF}$ и следователно $Z \in H_1H_2$, т.е. $O \in s$. Равенството $\dfrac{OH_1}{OH_2} = \dfrac{AE}{BF}$ определя мястото на $O$ върху $H_1H_2$).

Нека сега $X_1 = EF \cap A_1O$,
$Y_1 = EF \cap B_1O$ и $C = AX_1 \cap BY_1$. Доказва се, че $OC || AA_1$. Нека $X = AC \cap EO$ и $Y = BC \cap FO$ (всъщност поставихме черт. 2 върху черт. 3). Получихме следната

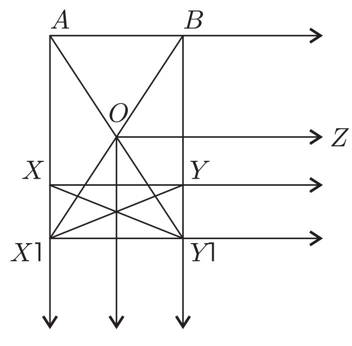
**Задача.** *Четириъгълникът $AX_1Y_1B$ е такъв, че ако $O = AY_1 \cap BX_1$ и $C = AX_1 \cap BY_1$, то $OC$ разполовява $\sphericalangle X_1OY_1$. Права през точка $Z = AB \cap X_1Y_1$ пресича $AX_1$ и $BY_1$ съответно в точките $X$ и $Y$. Да се докаже, че $\sphericalangle XOX_1 = \sphericalangle YOY_1$.*

Сега забелязваме, че $OC$ и $OZ$ са ъглополовящи на ъглите между диагоналите на $AX_1Y_1B$. Поставяме

**Обратна задача.** *Нека $AX_1Y_1B$ е четириъгълник и $O = AY_1 \cap BX_1,\ C = AX_1 \cap BY_1,\ Z = AB \cap X_1Y_1$. Ако $\sphericalangle COZ = 90^\circ$, да се докаже, че $OC$ е ъглополовяща на $\sphericalangle X_1OY_1$.*




Черт. 4




Черт. 5

**Решение** (черт. 4). Нека $OZ$ пресича $AX_1$ и $BY_1$ съответно в точките $X$ и $Y$ и нека $\sphericalangle COX_1 = x$,
$\sphericalangle X_1OX = y,\ \sphericalangle XOA = z$. Известно е, че $C,\ X_1,\ X,\ A$ образуват хармонична четворка. Затова

$$1 = \frac{CX_1}{X_1X} : \frac{CA}{AX} = \frac{\sin x}{\sin y} : \frac{\sin(x+y+z)}{\sin z} =$$

$$= \frac{\sin(90^\circ - y)}{\sin y} : \frac{\sin(90^\circ + z)}{\sin z} = \operatorname{cotg} y : \operatorname{cotg} z \Longrightarrow y = z.$$

Следователно $OX$ разполовява $\sphericalangle AOX_1$ и задачата е решена.

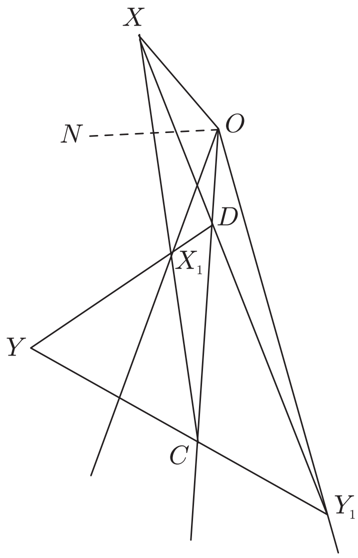
Да се върнем на черт. 3. Въпросът дали точка $D = XY_1 \cap X_1Y$ лежи на $OC$ има положителен отговор. За целта нека устремим $Z$ и $C$ към безкрайност, като спазим $\sphericalangle COZ = 90^\circ$. Получаваме черт. 5, който дава отговора на въпроса.

Така се появи следната

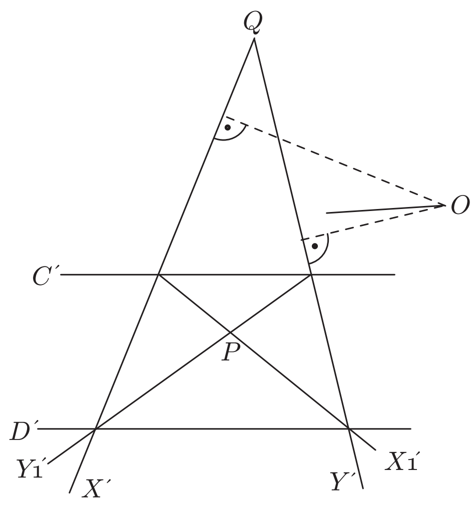
**Задача.** *На раменете на ъгъл с връх $O$ са взети точките $X_1$ и $Y_1$, а на ъглополовящата му – точките $C$ и $D$. Нека $X = CX_1 \cap DY_1$ и $Y = CY_1 \cap DX_1$. Да се докажe, че $\sphericalangle XOX_1 = \sphericalangle YOY_1$.*

Едно нейно решение е дадено в списание "Математика Плюс", бр. 3, 1999 г. (***M*⁺136**).

Тук ще дадем решение, като ще разгледаме случая, в който $X$ и $Y$ са от една и съща страна на правата $CD$ (черт. 6).




Черт. 6




Черт. 6′

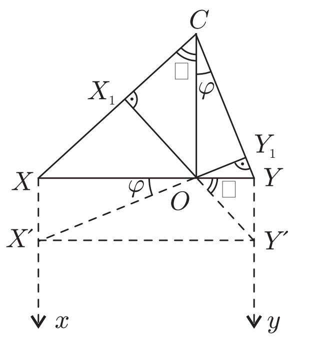
Извършваме полярно преобразуване спрямо $O$ (Образът на произволен обект $Z$ означаваме с $Z'$.) Получаваме допълнителна конфигурация, която за удобство изнасяме като отделен черт. 6′ в който правите $C'$ и $D'$ са успоредни помежду си и са перпендикулярни на правата $CD$ от черт. 6. Понеже $\sphericalangle X_1OD = \sphericalangle Y_1OD$ от черт. 6, то правите $X_1'$ и $Y_1'$ сключват равни ъгли с правата $CD$ от черт. 6. Ето защо на черт. 6′ се определи равнобедрен трапец и затова правите $X'$ и $Y'$ сключват равни ъгли с правата $CD$ от черт. 6. Това означава, че на черт. 6 $\sphericalangle XOY$ се разполовява от правата $ON \perp OC$.

**Следствие 1.** *$CL$ е ъглополовяща в $\triangle ABC$. Точките $X$ и $Y$ описват съответно отсечките $AC$ и $LC$, така че $XY || AB$. Да се намери геометричното място на точка $M = LX \cap BY$.*

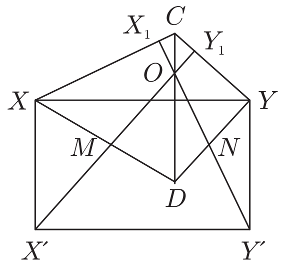
**Следствие 2.** *На бедрото $AD$ на трапеца $ABCD$ има такава точка $N$, че $\sphericalangle ANB = \sphericalangle DNC$. Ако $AC \cap BD = M$, да се докаже, че $\sphericalangle MNA = \sphericalangle NAB$.*

**Следствие 3.** *На височината $CH$ на $\triangle ABC$ е взета точка $D$. Ако $AD \cap BC = A_1$ и $BD \cap AC = B_1$, да се докаже, че $\sphericalangle A_1HC = \sphericalangle B_1HC$.*

Да се върнем на черт. 4. Да оставим от него $\triangle CXY$, височината $CO$ и нека считаме, че $\sphericalangle CX_1O = CY_1O = 90°$. Построяваме лъч $\vec{x}$ с начало $X$ и лъч $\vec{y}$ с начало $Y$, еднопосочни с $\overrightarrow{CO}$. Ако $OY_1 \cap \vec{x} = X'$ и $OX_1 \cap \vec{y} = Y'$, да се докаже, че $XX' = YY'$ (черт. 7).




Черт. 7




Черт. 8

**Решение.** $XX' = XO\,\mathrm{tg}\,\varphi = XO.\dfrac{OY}{CO} = OY \cdot \dfrac{XO}{CO} = OY\,\mathrm{tg}\,\psi = YY'$.

Задачата може да се видоизмени така:

*Точка $O$ е на страната $XY$ на правоъгълника $XYY'X'$. През $X$ и $Y$ се построяват съответно прави $x$ и $y$, така че $x \perp OY'$ и $y \perp OX'$. Ако $C = x \cap y$, то $CO \perp XY$.*

**Обобщение:** *Точка $O$ може и да не е на $XY$ – твърдението остава вярно. За извършване на доказателството се транслира $\triangle XYC$ докато $XY$ мине през $O$.*

**Видоизменение:** *$CD$ е височина в $\triangle ABC$. Ако $O \in CD$, нека перпендикулярите от $O$ към $BC$ и $AC$ пресичат $AB$ съответно в точките $A_1$ и $B_1$. Тогава $A_1B_1$ е страна на правоъгълник, вписан в $\triangle ABC$.*

Да разгледаме обобщението (черт. 8)

Построяваме $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{XX'}$. Тогава $M = DX \cap X'O$ е среда на $DX$ и $N = DY \cap Y'O$ – на $DY$. Получихме следната:

**Задача. (XV Всерусийска олимпиада 1989 г.)** *Четириъгълникът $CXDY$ е с взаимно перпендикулярни диагонали; $M$ и $N$ са средите на $DX$ и $DY$. Перпендикулярът от $M$ към $CY$ и перпендикулярът от $N$ към $CX$ се пресичат в точка $O$. Да се докаже, че $O \in CD$.*

**Задача.** *$ABCD$ е тетраедър, за който $AB \perp CD$. През точка $O$ от $CD$ минават равнините $\alpha \perp AD$ и $\beta \perp BD$. Ако $X = AC \cap \beta$ и $Y = BC \cap \alpha$, да се докаже, че $XY || AB$.*

**Упътване.** Проектирайте ортогонално върху $(ABD)$.

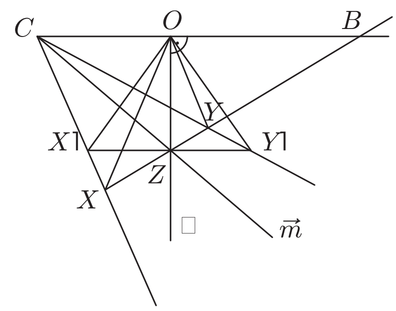
**Добавка.** От черт. $6'$ следва, че $PQ \perp ON$. Това показва, че в черт. 6 образът на $PQ$ е на $ON$.

Накрая да се върнем отново на черт. 4.

Понеже $(OX_1,\ OC,\ OY_1,\ OZ) = -1$, то $\sphericalangle X_1OC = \sphericalangle Y_1OC$. Оттук и следната

**Задача.** *Точка $O$ е в ъгъл с връх $C$. Да се намери точка $Z$, така че щом права през $Z$ пресече раменете на $\sphericalangle C$ в точки $X_1$ и $Y_1$, то $OC$ да разполовява $\sphericalangle X_1OY_1$.*

**Аналогична задача.** *Точка $O$ е извън $\sphericalangle C$. Да се намери в $\sphericalangle C$ точка $Z$, така че щом права през $Z$ пресече раменете на $\sphericalangle C$ в точки $X$ и $Y$, то $OZ$ да разполовява $\sphericalangle XOY$.*




Черт. 9

**Решение.** През $O$ (черт. 9) построяваме права $\zeta \perp CO$. През $C$ построяваме в $\sphericalangle C$ лъч $\vec{m}$, така че всяка успоредна на $CO$ отсечка с краища на раменете на $\sphericalangle C$ да се разполовява от $\vec{m}$. Точка $Z = \zeta \cap \vec{m}$ е търсената. Наистина, $Z$ е среда на $X_1Y_1$ с краища на раменете на $\sphericalangle C$ и $X_1Y_1 || CO$. От

$$\begin{aligned} -1 &= (OX_1,\ OZ,\ OY_1,\ OC) \\ &= (CX_1,\ CZ, CY_1,\ CO) \\ &= (X,\ Z,\ Y,\ B) \\ &= (OX,\ OZ,\ OY,\ OB) \end{aligned}$$

следва, че $OZ$ разполовява $\sphericalangle XOY$.

Борислав Михайлов
бул. "Шести септември" № 204
Пловдив

## IF YOU WANT TO KNOW HOW TO COOK PROBLEMS – COME TO THE KITCHEN!

**Borislav Mikhailov**

The idea that generating problems is equally (if not more) important to solving problems is considered in the paper. How to modify the initial conditions of a problem so as to generate a whole new class of problems is demonstrated on the basis of a well known theorem from geometry.