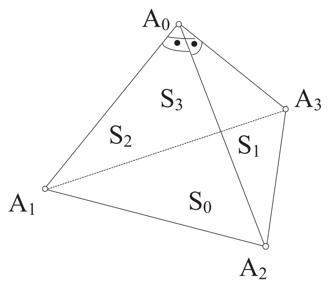
МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

ОБОБЩЕНИЕ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА ЗА n-МЕРНО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Д. А. Белев, В. П. Игнатова-Белева

Увод с малко история. $a^2 + b^2 = c^2$. Малко са хората, които не са чували за Питагоровата теорема. Тя носи името на древногръцкия философ и математик Питагор (IV п.н.е.), но е била известна векове преди неговото време. Известни са няколко десетки различни доказателства на теоремата[1]. Някои от тях се базират на общи твърдения, за които Питагоровата теорема се явява частен случай (например Косинусовата теорема). Един начин за обобщаването ѝ е преминаването към пространство с повече измерения. Например: за правоъгълния паралелепипед в пространството знаем, че квадратът на диагонала му е равен на сбора от квадратите на измеренията му ($d^2 = a^2 + b^2 + c^2$). Вярно е аналогичното твърдение и в R^n.



Идея. Тук ще използваме друга идея за обобщаване на Питагоровата теорема. Тя се основава на теоремата на Фаулхабер[2] – "За всеки правоъгълен тетраедър, сборът от квадратите на лицата на околните стени е равен на квадрата на лицето на основата", т.е. $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2$.

За да формулираме аналогична теорема за n-мерно Евклидово пространство R^n, ще съставим една сравнителна таблица.

---

[1] Желанието да се дава ново доказателство на известната теорема е сравнимо с желанието да се изчислява числото πс все по-голяма точност. Надяваме се доказването на Обобщената Питагорова теорема да добави още едно към многото.

[2] Фаулхабер публикува пръв доказателството ѝ през 1622 г. Теоремата носи още името на Декарт, в чиито записки фигурира от 1619 г. Това е Питагорова теорема за тетраедър (Г. Паскалев и И. Чобанов "Забележителни точки в тетраедъра").

Размерност	Пространство	Геометричен обект на теоремата	Твърдение	Елементи на геометричния обект	Мерки и размерност на величините в равенството
2	R^2 – равнина	правоъгълен триъгълник	$a^2+b^2=c^2$	2 катета – страните прилежащи на правия ъгъл хипотенуза – страната срещу правия ъгъл	дължини размерност $1=2-1$
3	R^3 – пространство	правоъгълен тетраедър	$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_0^2$	3 катета – стените прилежащи на правия ъгъл; хипотенуза – стената срещу правия ъгъл	лица размерност 2=3−1
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
n	R^n – n-мерно Евклидово пространство	правоъгълен n-симплекс – аналог на правоъгълния триъгълник в R^n	$\left[V_{n-1}^1\right]^2+\cdots+\left[V_{n-1}^n\right]^2 = \left[V_{n-1}^0\right]^2$	n катета – $(n-1)$-стените прилежащи на правия ъгъл хипотенуза – $(n-1)$-стената срещу правия ъгъл	$n-1$-обеми размерност $n-1$

И в Обобщената Питагорова теорема получаваме класическото твърдение: “Сборът от квадратите на катетите е равен на квадрата на хипотенузата”, като, разбира се, в понятията катет, хипотенуза и техните мерки влагаме съответния смисъл.

I. Необходима теория. Ще изложим определенията за векторно произведение в R^n, n-симплекс и някои техни свойства, които ще са необходими за доказване на теоремата [1], [2], [3].

1. Векторно произведение в R^n. На всеки $n-1$ вектора $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ в R^n съпоставяме вектор b, изпълняващ условията:

a) $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b$ образуват дясно (положително) ориентирана система вектори;

b) $b \perp a_i$ за $\forall i = \overline{1, n-1}$;

c) $|b| = P_{n-1}$, където P_{n-1} е $(n-1)$-обема на $(n-1)$-паралелепипеда, построен върху векторите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Векторът b наричаме векторно произведение на векторите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ в R^n и записваме $b = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$.

При $n=3$ получаваме познатото векторно произведение в пространството (R^3).

При $n=2$ получаваме векторно произведение в равнината (R^2). Тук то съвпада с ротация на $90°$.

2. Някои свойства на векторното произведение.

a) Векторното произведение е равно на нула, ако някои два от векторите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ са равни.

b) Векторното произведение е равно на нула, ако векторите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ са линейно зависими.

c) Векторното произведение е дистрибутивно т.е. $(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} + b_{n-1}) = (a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}) + (a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge b_{n-1})$.

d) Реален множител може да се изнесе пред знака на векторното произведение, т.е. $(k.a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}) = k.(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1})$.

e) Векторното произведение не се променя при четна пермутация на векторите и се умножава с -1 при нечетна пермутация.

3. Симплекс. Ако в R^n са зададени $n{+}1$ точки $A_0(x_0), A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n)$ (x_i са радиус-векторите на точките) нележащи в една $(n-1)$-равнина, то точките определени от радиус-векторите $x = t_0x_0 + t_1x_1 + t_2x + 2 + \dots + t_nx + n$ с параметри $t_i \geq 0$, за които е изпълнено $t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, образуват n-симплекс[3] с върхове $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$. Симплекса го означаваме така – $A_0A_1A_2\dots A_n$.

За R^2 получаваме 2-симплекса $A_0A_1A_2$, т.е. триъгълник, а за R^3 получаваме 3-симплекса $A_0A_1A_2A_3$ – тетраедър.

4. Стени на симплекс. Ако някой от параметрите $t_i = 0$ в (I.3.), то получаваме $(n-1)$-симплекс, който наричаме $(n-1)$-стена на n-симплекса.

Стените на $(n-1)$-симплекса наричаме $(n-2)$-стени и т.н.т. Така n-симплексът притежава p-стени, като $p = \overline{0, n-1}$.

0-стените съвпадат с върховете на симплекса, а 1-стените са ръбовете му.

5. Обем на симплекс. Обемът на n-симплекс $A_0A_1A_2\dots A_n$ се дава от формулата $V_n = \dfrac{1}{n!}.P_n$, където P_n е n-обемът на n-паралелепипеда, построен върху векторите $a_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ за $i = \overline{1,n}$. Системата вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ е линейно независима поради (I.3.), т.е. те образуват базис в R^n.

6. Правоъгълен симплекс. В n-симплекса $A_0A_1A_2\dots A_n$ задаваме векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$, като $a_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ за $i = \overline{1,n}$. Ще казваме, че n-симплексът $A_0A_1A_2\dots A_n$ е правоъгълен n-симплекс, ако векторите a_i образуват ортогонален базис в R^n (т.е. $a_i \perp a_j$ за $\forall i, j = \overline{1,n}$ и $i \neq j$). Тогава $(n-1)$-стените $A_0A_2A_3\dots A_n$, $A_0A_1A_3A_4\dots A_n$, $A_0A_1A_2A_4\dots A_n, \dots, A_0A_1\dots A_{i-1}A_{i+1}\dots A_n, \dots, A_0A_1\dots A_{n-2}A_n$, $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}$, ще наричаме $(n-1)$-катети на правоъгълния n-симплекс, а $(n-1)$-стената $A_1A_2A_3\dots A_n$ – $(n-1)$-хипотенуза. От това определение и от (I.4.) следва, че и $(n-1)$-катетите са правоъгълни $(n-1)$-симплекси, техните $(n-2)$-катети са правоъгълни $(n-2)$-симплекси и т.н.

За R^2 правоъгълния 2-симплекс $A_0A_1A_2$ е правоъгълен триъгълник с 1-катети A_0A_2 и A_0A_1 и 1-хипотенуза A_1A_2, а за R^3 правоъгълния 3-симплекс $A_0A_1A_2A_3$-правоъгълен тетраедър с 2-катети $A_0A_2A_3$, $A_0A_1A_3$ и $A_0A_1A_2$ (правоъгълни триъгълници) и 2-хипотенуза $A_1A_2A_3$.

II. Питагорова теорема

1. Обобщена Питагорова теорема за правоъгълен n-симплекс в R^n $(n \geq 2)$

Ако в R^n $A_0A_1A_2\dots A_n$ е правоъгълен n-симплекс с $(n-1)$-катети $A_0A_2A_3\dots A_n$, $A_0A_1A_3\dots A_n$, $A_0A_1A_2A_4\dots A_n, \dots, A_0A_1\dots A_{i-1}A_{i+1}\dots A_n, \dots, A_0A_1\dots A_{n-2}A_n$, $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}$ и $(n-1)$-хипотенуза $A_1A_2A_3\dots A_n$, то е в сила равенството

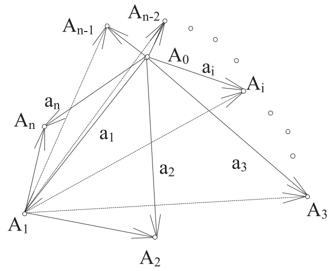
$$\left[V^1_{n-1}\right]^2 + \left[V^2_{n-1}\right]^2 + \left[V^3_{n-1}\right]^2 + \dots + \left[V^n_{n-1}\right]^2 = \left[V^0_{n-1}\right]^2,$$

където V^1_{n-1}, V^2_{n-1}, V^3_{n-1}, …, V^n_{n-1} и V^0_{n-1} са $(n-1)$-обемите съответно на $(n-1)$-катетите $A_0A_2A_3\dots A_n$, $A_0A_1A_3A_4\dots A_n$, $A_0A_1A_2A_4\dots A_n$, …, $A_0A_1\dots A_{i-1}A_{i+1}\dots A_n$, …, $A_0A_1\dots A_{n-2}A_n$, $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}$ и $(n-1)$-хипотенузата $A_1A_2A_3\dots A_n$.

Доказателство: В n-симплекса $A_0A_1A_2\dots A_n$ задаваме векторите a_1, a_2, …, a_n, като $a_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ за $i = \overline{1,n}$. Тогава $(n-1)$-катетите $A_0A_2A_3\dots A_n$, $A_0A_1A_3A_4\dots A_n$,

[3] Често n-симплексът се определя като изпъкналата обвивка на тези $n+1$ точки, а параметрите $t_i \geq 0$ като барицентрични координати на точките, определени от радиус-вектора x (Балк М. Б. и Болтянский В. Г. "Геометрия масс").

$A_0A_1A_2A_4 \dots A_n, \dots, A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n, \dots, A_0A_1 \dots A_{n-2}A_n, A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ ще определят съответно системите вектори[4] $a_2a_3 \dots a_n$, $a_1a_3a_4 \dots a_n$, $a_1a_2a_4 \dots a_n$, $\dots$, $a_1 \dots a_{i-1}a_{i+1} \dots a_n$, $\dots$, $a_1 \dots a_{n-2}a_n$, $a_1a_2 \dots a_{n-1}$, а $(n-1)$-хипотенузата $A_1A_2A_3 \dots A_n$ определя системата вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\dots$, $\overrightarrow{A_1A_n}$.



Тези системи от по $n-1$ вектора определят съответно векторните произведения $b_1 = (a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n)$, $b_2 = (a_1 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n)$, $b_3 = (a_1 \wedge a_2 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n) \dots$, $b_i = (a_1 \wedge \dots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \dots \wedge a_n)$, $\dots$, $b_{n-1} = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-2} \wedge a_n)$, $b_n = (a_1 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1})$ и $b_0 = (\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{A_1A_4} \wedge \dots \wedge \overrightarrow{A_1A_n})$. Като приложим (I.5.) и (I.1.c.), последователно получаваме

$$\left[V_{n-1}^0\right]^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!} p_{n-1}^0\right]^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 . b_0^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 . \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{A_1A_4} \wedge \dots \wedge \overrightarrow{A_1A_n})^2,$$

където P_{n-1}^0 е $(n-1)$-обема на $(n-1)$-паралелепипеда, построен върху векторите $\overrightarrow{A_1A_i}$ и $i = \overline{1,n}$. Но $\overrightarrow{A_1A_i} = a_i - a_1$ за $i = \overline{2,n}$, следователно

$$\left[V_{n-1}^0\right]^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 .((a_2 - a_1) \wedge (a_3 - a_1) \wedge (a_4 - a_1) \wedge \dots \wedge (a_i - a_1) \wedge \dots \wedge (a_n - a_1))^2.$$

Тъй като векторното произведение е дистрибутивно ((I.2.c.) и (I.3.d.)), то

$$((a_2 - a_1) \wedge (a_3 - a_1) \wedge (a_4 - a_1) \wedge \dots \wedge (a_i - a_1) \wedge \dots \wedge (a_n - a_1)) = (a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n) -$$

$$-(a_1 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n) - (a_2 \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_n) - (a_2 \wedge a_3 \wedge a_1 \wedge a_5 \wedge \dots \wedge a_n) - \dots -$$

$$-(a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_{i-1} \wedge a_i \wedge a_{i+1} \wedge \dots \wedge a_n) - \dots - (a_2 \wedge a_3 \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge a_n).$$

Останалите векторни произведения са равни на нула, тъй като векторът a_1 присъства в тях два или повече пъти (I.2.a.). За ненулевите векторни произведения без първото, векторът a_1 стои на мястото на a_i (т.е. a_i липсва в това векторно произведение) за $i = \overline{2,n}$.

Преподреждаме всички векторни произведения без първото, и от (I.2.e.) за $\forall i = \overline{2,n}$ получаваме

$$-(a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_{i-1} \wedge a_i \wedge a_{i+1} \wedge \dots \wedge a_n) = \varepsilon_i (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \dots \wedge a_n),$$

където $\varepsilon_i = 1$, ако i е четно или $\varepsilon_i = -1$, ако i е нечетно. Тогава

$$((a_2 - a_1) \wedge (a_3 - a_1) \wedge (a_4 - 1) \wedge \dots \wedge (a_i - a_1) \wedge \dots \wedge (a_n - a_1)) = (a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n) +$$

$$+\varepsilon_2(a_1 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n) + \varepsilon_3(a_1 \wedge a_2 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_n) + \varepsilon_4(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n) + \dots +$$

$$+\varepsilon_n(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1}) = b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 b_3 + \dots + \varepsilon_i b + i + \dots + \varepsilon_n b_n).$$

Като заместим, получаваме

$$\left[V_{n-1}^0\right]^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 .(b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \dots + \varepsilon_n b_n)^2.$$

От (I.1.b) $\Rightarrow b_i \perp a_j$ за $i \neq j$, но от (I.6.) и $a_i \perp a_j$ за $i \neq j$. $\Rightarrow b_i$ и a_i са колинеарни. $\Rightarrow b_i \perp b_j$ за $i \neq j$, $\Rightarrow$ скаларните произведения $b_ib_j = 0$ за $i \neq j$, като твърденията

[4] i-тият $(n-1)$-катет $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ стои срещу върха A_i на n-симплекса, затова и в системата вектори $a_1 \dots a_{i-1}a_{i+1} \dots a_n$, определена от него, отсъства векторът a_i.

са верни за $\forall i = \overline{1,n}$. Като добавим, че $\varepsilon_i^2 = 1$, то

$$\left[V_{n-1}^0\right]^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 .(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Като разкрием скобите и вземем предвид (I.1.c.)

$$\left[V_{n-1}^0\right]^2 = \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 .b_1^2 + \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 .b_2^2 + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2 .b_n^2 =$$

$$\left[\frac{1}{(n-1)!}.P_{n-1}^1\right]^2 + \left[\frac{1}{(n-1)!}P_{n-1}^2\right]^2 + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)!}.P_{n-1}^n\right]^2,$$

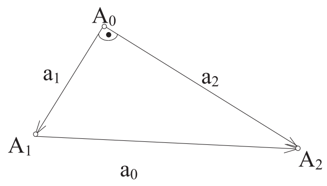
където P_{n-1}^j са $(n-1)$-обемите на $(n-1)$-паралелепипедите, построени съответно върху векторите образуващи векторните произведения b_i за $i = \overline{1,n}$. И накрая от (I.5.) получаваме

$$\left[V_{n-1}^0\right]^2 = \left[V_{n-1}^1\right]^2 + \left[V_{n-1}^2\right]^2 + \left[V_{n-1}^3\right]^2 + \cdots + \left[V_{n-1}^n\right]^2.$$

Като следствие от Обобщената Питагорова теорема можем да получим познатата Питагорова теорема за правоъгълен триъгълник в равнината и теоремата на Фаулхабер (теорема на Декарт) за правоъгълен тетраедър в пространството.

2. Питагорова теорема за правоъгълен триъгълник в R^2. *Ако $n = 2$, то за правоъгълния триъгълник $A_0A_1A_2$ от* (II.1.) *получаваме*

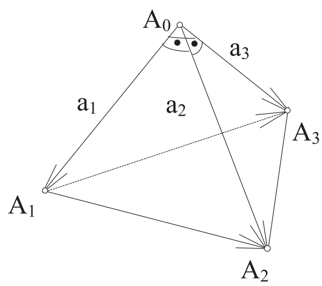
$$\left[V_1^1\right]^2 + \left[V_1^2\right]^2 = \left[V_1^0\right]^2.$$



1-*обемите* V_1^1, V_1^2 *и* V_1^0 *съответно на* 1-*катетите* A_0A_2, A_0A_1 *и 1-хипотенузата* A_1A_2 *са разбира се, техните дължини, което ни дава познатото* $a_1^2 + a_2^2 = a_0^2$.

3. Питагорова теорема за правоъгълен тетраедър в R^3. *Ако $n = 3$, то за правоъгълния тетраедър $A_0A_1A_2A_3$ от $(II.1.)$ получаваме*

$$\left[V_1^1\right]^2 + \left[V_1^2\right]^2 + \left[V_1^3\right]^2 = \left[V_1^0\right]^2.$$



2-*обемите* V_2^1, V_2^2, V_2^3 *и* V_2^0 *съответно на* 2-*катетите* $A_0A_2A_3$, $A_0A_1A_3$, $A_0A_1A_2$ *и* 2-*хипотенузата* $A_1A_2A_3$ *са съответно лицата* S_1, S_2, S_3 *на околните стени* (2-*катетите*) *и* S_0 *на основата* (2-*хипотенузата*). *Така стигаме до теоремата на Фаулхабер* (*теорема на Декарт*) *за правоъгълен тетраедър* $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2$.

Няколко думи за заключение. Надяваме се, че така направеното обобщение много по-добре отговаря на духа на "старата" Питагорова теорема. В прегледаната от нас литература на тема "многомерна геометрия" не намерихме подобно твърдение. Невероятно изглежда, ако в необятния и безкрайно красив океан "геометрия", някой се цопне някъде там в плитчините и намери един малък бисер, но както беше казал някой: "Най-невероятното на чудесата е, че те понякога се случват!"

ЛИТЕРАТУРА

[1] Берже М. Геометрия, Москва, “Мир”, 1984 г.
[2] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства, Москва, “Мир”, 1966 г.
[3] Borsuk K. Multidimensional analytic geometry, 1969 г.

Д. А. Белев
Строителен техникум “Христо Ботев”
бул. Евлоги Георгиев № 34
София

В. П. Игнатова-Белева
Химико Технологичен
и Металургичен Университет
1156 София

A GENERALIZATION OF THE PYTHAGOREAN THEOREM FOR THE n-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Dimiter Andonov Belev, Vasilka Petrova Ignatova–Beleva

Only few people have never heard about the Pythagorean Theorem. It is called after the name of the ancient Greek philosopher and mathematician Pythagor who lived in the 6th century BC, although the theorem was well known centuries before his time. A great variety of proofs of the theorem are known. Some of them are based on general statements for which the Pythagorean Theorem is only a particular case. In the present paper, the theorem is generalized for the n-dimensional Euclidean space.