МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

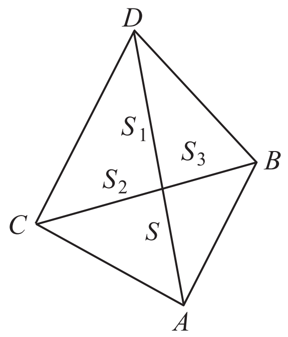
ФОРМУЛИ ЗА ДВУСТЕННИТЕ ЪГЛИ, КОИТО ОКОЛНИТЕ СТЕНИ НА ЕДНА ТРИЪГЪЛНА ПИРАМИДА СКЛЮЧВАТ С РАВНИНАТА НА ОСНОВАТА

Климент Василев Василев, Донка Пашкулева

В настоящата статия ще бъде изведена една зависимост между двустенните ъгли в триъгълна пирамида, с помощта на материала по математика, изучаван в средното училище. Разглежданата задача е подходяща за подготовка за олимпиади, курсове за зрелостници и кандидат-студенти и други форми на извънкласна работа.

Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ (черт. 1). Правим следните означения:

$$\sigma_1 = S_{BCD}, \qquad \sigma_2 = S_{ACD}, \qquad \sigma_3 = S_{ABD}, \qquad \sigma = S_{ABC}.$$



Черт. 1

Околните стени, образувани от триъгълниците BCDq ACD и ABD ще означим съответно с S_1, S_2, S_3, а на основата с S. Двустенните ъгли, които околните стени сключват помежду си, а така също и с основата, ще означим така: $\sphericalangle(S_1, S_2)$, $\sphericalangle(S_1, S_3)$, $\sphericalangle(S_2, S_3)$, $\sphericalangle(S_1, S)$, $\sphericalangle(S_2, S)$ и $\sphericalangle(S_3, S)$.

Ще докажем, че е изпълнено равенството

$$\cos \sphericalangle(S_1, S) = \frac{\sigma_1 - \displaystyle\sum_{j=1,\ j\neq i}^{3} \sigma_j \cos \sphericalangle(S_i, S_j)}{\sigma} \tag{1}$$

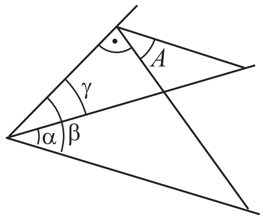
за $i = 1, 2, 3$.

Най-напред ще дадем две леми, които ще ни бъдат необходими по-нататък.

Лема 1.

За всеки тристенен ъгъл с равнинни ъгли α, β, γ и двустенни ъгли срещу тях A, B, C, са изпълнени следните равенства (черт. 2):

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta.\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \quad \cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha.\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}, \quad \cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$



Черт. 2

Доказателството на Лема 1 е дадено в [2]. Друго доказателство може да се намери в цитираната в [1] литература. Тази лема е давана като задача за приемен изпит във ВУЗ през 1962 г.

Лема 2.

$$(2) \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\sigma_2\sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3)-2\sigma_1\sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3)-2\sigma_1\sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2)}.$$

Едно доказателство на Лема 2, чрез използване на косинусовата теорема, херонова формула и Лема 1 е дадено в [1].

Като разгледаме последователно стените S_1, S_2, S_3 за основи на триъгълната пирамида $ABCD$ и приложим Лема 2, ще получим

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma\sigma_2\cos\sphericalangle(S_2,S) - 2\sigma\sigma_3\cos\sphericalangle(S_3,S) - 2\sigma_2\sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3).$$
$$\sigma_2^2 = \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma\sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S) - 2\sigma\sigma_3\cos\sphericalangle(S_3,S) - 2\sigma_1\sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3).$$
$$\sigma_3^2 = \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma\sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S) - 2\sigma\sigma_2\cos\sphericalangle(S_2,S) - 2\sigma_1\sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2).$$

Като повдигнем (2) на квадрат и заместим в последните три уравнения, след преработка получаваме системата:

$$\begin{aligned}
&\sigma\sigma_2\cos\sphericalangle(S_2,S) + \sigma\sigma_3\cos\sphericalangle(S_3,S) = \\
&\quad = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3) - \sigma_1\sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3) - \sigma_1\sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2). \\
&\sigma\sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S) + \sigma\sigma_3\cos\sphericalangle(S_3,S) = \\
&\quad = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3) - \sigma_1\sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2) - \sigma_2\sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3). \\
&\sigma\sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S) + \sigma\sigma_2\cos\sphericalangle(S_2,S) = \\
&\quad = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2) - \sigma_1\sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3) - \sigma_2\sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3).
\end{aligned}$$

Като решим системата, получаваме

$$(3) \quad \begin{aligned}
\cos\sphericalangle(S_1,S) &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2) - \sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3)}{\sigma} \\
\cos\sphericalangle(S_2,S) &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1\cos\sphericalangle(S_2,S_1) - \sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3)}{\sigma} \\
\cos\sphericalangle(S_1,S) &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S_3) - \sigma_2\cos\sphericalangle(S_2,S_3)}{\sigma}
\end{aligned}$$

Решението може да бъде записано по-сбито така:

$$\cos\sphericalangle(S_i,S)=\frac{\sigma_i-\sum\limits_{j=1,\ j\neq 1}^{3}\cos\sphericalangle(S_i,S_j)\sigma_j}{\sigma} \tag{4}$$

за $i=1,2,3$.

Следствие 1.

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\cos\sphericalangle(S_i,S)=\sigma. \tag{5}$$

Достатъчно е в лявата част да заместим изразите за $\cos\sphericalangle(S_1,S)$, $\cos\sphericalangle(S_2,S)$, $\cos\sphericalangle(S_3,S)$ и след преработка, като използваме (2), ще получим (5). От друга страна, ако бяхме разгледали стените S_1, S_2, S_3 като основи на пирамидата, след освобождаване от знаменателя в (3) щяхме да получим аналогични изрази като (5). Така със следствието ще доказваме една теорема, известна от курса по стереометрия в средното училище, че сумата от произведенията на лицата на околните стени по косинуса на ъгъла, който те сключват с равнината на основата, е равно на лицето на основата. Следствието ни избавя от момента, когато някоя околна стена сключва тъп ъгъл с равнината на основата, понеже трябва да отчитаме къде се проектира върхът на пирамидата.

Следствие 2. *Необходимо и достатъчно условие върхът D на пирамидата да се проектира във вътрешността на основата е*

$$\begin{aligned}
\sigma_1-\sigma_2\cos\sphericalangle(S_1,S_2)-\sigma_3\cos\sphericalangle(S_1,S_3)>0\\
\sigma_2-\sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S_2)-\sigma_3\cos\sphericalangle(S_2,S_3)>0\\
\sigma_3-\sigma_1\cos\sphericalangle(S_1,S_3)-\sigma_2\cos\sphericalangle(S_2,S_3)>0
\end{aligned}$$

Следствие 2 е очевидно, понеже от него следва, че $\cos\sphericalangle(S_1,S)$, $\cos\sphericalangle(S_2,S)$ и $\cos\sphericalangle(S_3,S)$ трябва да са положителни числа. Сега ще приложим доказаното към някои задачи, които се срещат в различни сборници, излезли у нас през последните 30 години.

1. Даден е правилен тетраедър. Определете големината на двустенния ъгъл между две съседни стени.

Решение: Съгласно Лема 1 получаваме:

$$\sphericalangle(S_1,S_2)=\sphericalangle(S_1,S_3)=\sphericalangle(S_2,S_3)=\sphericalangle(S_1,S)=\sphericalangle(S_2,S)=\sphericalangle(S_3,S)=\varphi.$$

Понеже всички стени на тетраедъра са еднакви триъгълници, имаме $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$, и като заместим в (1) ще получим

$$\cos\varphi=\frac{\sigma-\sigma\cos\varphi-\sigma\cos\varphi}{\sigma},$$

$\cos\varphi=1-\cos\varphi$, откъдето $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$.

2. Да се намери връзка между двустенните ъгли, които сключват околните стени помежду си и с равнината на основата на правилна триъгълна пирамида.

Решение: Полагаме

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle(S_1, S) = \sphericalangle(S_2, S) = \sphericalangle(S_3, S) = \varphi_1,\\
&\sphericalangle(S_1, S_2) = \sphericalangle(S_1, S_3) = \sphericalangle(S_2, S_3) = \varphi_2,\\
&\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma',\\
&\sigma = \sigma''.
\end{aligned}$$

Като заместим в (2), ще получим

$$\sigma'' = \sigma'\sqrt{3 - \cos\varphi_2}.$$

Като заместим в (1) получаваме $\cos\varphi_1 = \dfrac{\sigma'(1 - 2\cos\varphi_2)}{\sigma''}$, като заместим израза за σ'' в последния израз, след преработка получаваме:

$$\sqrt{3}\cos\varphi_1 = \sqrt{1 - 2\cos\varphi_2}.$$

Оттук след повдигане на квадрат получаваме:

$$3\cos^2\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 = 1.$$

3. Околните ръбове DA, DB и DC на триъгълната пирамида $ABCD$ са взаимно перпендикулярни. Да се намерят двустенните ъгли, които околните стени сключват с равнината на основата, ако $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$.

Решение:

$$\sigma_1 = \frac{bc}{2}, \qquad \sigma_2 = \frac{ac}{2}, \qquad \sigma_3 = \frac{ab}{2}.$$

Съгласно Лема 1

$$\cos\sphericalangle(S_1, S_2) = \cos\sphericalangle(S_1, S_3) = \cos\sphericalangle(S_2, S_3) = 0.$$

Като заместим в (2) получаваме:

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Като заместим във фирмула (1), за $i = 1 \div 3$, получаваме:

$$\begin{aligned}
\cos\sphericalangle(S_1, S) &= \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}\\
\cos\sphericalangle(S_2, S) &= \frac{ac}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}\\
\cos\sphericalangle(S_3, S) &= \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.
\end{aligned}$$

4. Да се докаже, че лицето на всяка стена на пирамидата е по-малко от сбора на лицата на останалите стени.

Доказателство:

Като използваме формула (1) и се освободим от знаменателя, получаваме:

$$\sigma\cos\sphericalangle(S_i, S) = \sigma_i - \sum_{J=1,\ j\neq i}^{3} \sigma_j\cos\sphericalangle(S_i, S_j).$$

Оттук

$$\sigma_i = \sigma\cos\sphericalangle(S_i, S) + \sum_{J=1,\ j\neq i}^{3} \sigma_j\cos\sphericalangle(S_i, S_j).$$

Като вземем предвид, че $\cos\varphi \leq 1$, получаваме

$$\sigma_i < \sigma + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{3} \sigma_j.$$

Оттук за $i = 1,\ 2,\ 3$ получаваме:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &< \sigma + \sigma_2 + \sigma_3\\ \sigma_2 &< \sigma + \sigma_1 + \sigma_3\\ \sigma_3 &< \sigma + \sigma_1 + \sigma_2.\end{aligned}$$

Аналогично, като използваме (5), получаваме $\sigma < \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, с което теоремата е доказана.

За упражнение предоставяме следната задача:

5. Даден е тетраедъра $ABCD$, за който $DC = AB$, $DB = AC$, $DA = BC$. Да се пресметне сумата от косинусите на двустенните ъгли.

Отг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Василев К., Д. Пашкулева. Една задача за сечение на паралелепипед с равнина, Математика и математическо образование (1997). Доклади на Двадесет и шеста конференция на СМБ, 300-303.

[2] Байчева Ц., К. Кирилова. Косинусова теорема за тристенен ъгъл. Математика и информатика, кн. 5-6, 1997.

Климент Василев Василев
бул. "Ал. Стамболийски" 114, ап. 14
1303 София

Донка Желева Пашкулева
Институт по математика и информатика
Българска Академия на Науките
ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 8
1113 София

FORMULAE ABOUT THE DIHEDRAL ANGLES WHICH THE PROFILE PLANES OF A THREE-CORNERED PYRAMID FORMS WITH THE PLANE OF THE BASE

Kliment Vasilev Vasilev, Donka Zheleva Pashkouleva

In the article a rellation between the dihedral angles in a three-cornered pyramid is derived by means of mathematical knowledge obtained in the secondary school. The problem that is studied, is suitable for mathematics olympiads, graduate courses for secondary school, preparatory classes for university entrance exams and other extra-curricular activities.