МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

ЕДНА ПОЛЕЗНА КОНСТАНТА ПРИ РЕШАВАНЕ НА НЯКОИ ЗАДАЧИ ЗА ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

Тома Маринов Георгиев

В статията е разгледана една интересна константа, която е характерна при прекарване на произволна права през пресечната точка на диагоналите на изпъкнал четириъгълник. Показано е приложението на тази константа при решаването на геометрични задачи, като това е особено ефективно, когато четириъгълникът е трапец или вписан в окръжност четириъгълник. Разработката може да бъде полезна за работа с ученици, проявяващи повишен интерес към математиката.

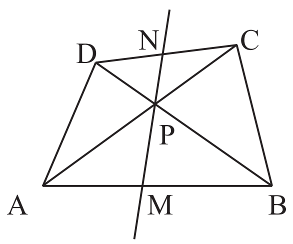
Основно твърдение: *Ако права, прекарана през пресечната точка P на диагоналите на четириъгълника $ABCD$, пресича страните AB и CD съответно в точките M и N, то* $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{DN}{NC}=\dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$.

Доказателство: Ще използвам известните твърдения:

Лема 1: *Ако височините, прекарани през върховете C и C_1 на триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са равни, то* $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$.

Лема 2: *Ако ъглите при върховете C и C_1 на триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са равни, то* $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{CA.CB}{C_1A_1.C_1B_1}$.

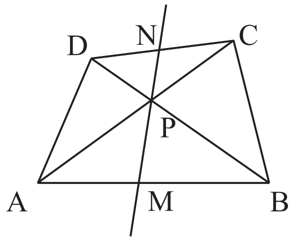
Разглеждаме равенствата (получени от прилагането на Лема 2)



$\dfrac{S_{AMP}}{S_{CNP}}=\dfrac{PA.PM}{PC.PN}$, $\dfrac{S_{BMP}}{S_{DNP}}=\dfrac{PB.PM}{PD.PN}$, разделяме ги почленно, след което се получава $\dfrac{S_{AMP}}{S_{BMP}}\cdot\dfrac{S_{DNP}}{S_{CNP}}=\dfrac{PA.PD}{PC.PB}$. Но $\dfrac{S_{AMP}}{S_{BMP}}=\dfrac{AM}{MB}$, $\dfrac{S_{DNP}}{S_{CNP}}=\dfrac{DN}{NC}$ (от Лема 1), $\dfrac{PA.PD}{PC.PB}=\dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$ (от Лема 2), откъдето следва, че $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{DN}{NC}=\dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$.

Виждаме, че произведението на отношенията, в които произволна права, прекарана през пресечната точка на диагоналите на четириъгълник, разделя две негови срещуположни страни е константа за четириъгълника. В следващите задачи ще илюстрирам някои от възможностите за приложението на тази константа.

Задача 1. *В четириъгълника $ABCD$ е прекарана права през пресечната точка P на диагоналите AC и BD, която пресича страните AB и CD съответно в точките M и N. Да се докаже, че необходимото и достатъчно условие AB и CD да са успоредни, е* $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = 1$.



Доказателство: Нека $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = 1$. От $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$ следва, че $S_{APD} = S_{BPC}$ и тогава $S_{ABC} = S_{ABD}$ (триъгълниците са съставени от равнолицеви части). Триъгълниците ABC и ABD са с обща основа AB и равни лица и следователно с равни височини през C и D, откъдето следва, че CD е успоредна на AB.

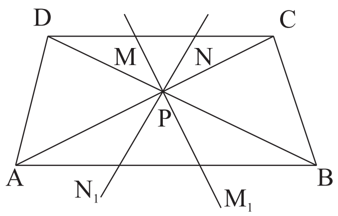
Нека сега AB и CD са успоредни. Тогава триъгълниците ABC и ABD са равнолицеви (с обща основа и равни височини, прекарани към нея), откъдето и триъгълниците APD и BPC са равнолицеви и от $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$ следва, че $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = 1$.

Пряко следствие от **Задача 1.** се явява известното твърдение:

Задача 2. *В четириъгълника $ABCD$ страните AB и CD са успоредни тогава и само тогава, когато средите им и пресечната точка на диагоналите AC и BD лежат на една права.*

Предлагам и още едно приложение на **Задача 1.**:

Задача 3. *В четириъгълника $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка P, точките M и N лежат върху страната CD, като $DM = CN$ и правите MP и NP пресичат страната AB съответно в точките M_1 и N_1. Да се докаже, че страните AB и CD са успоредни тогава и само тогава, когато $AM_1 = BN_1$.*



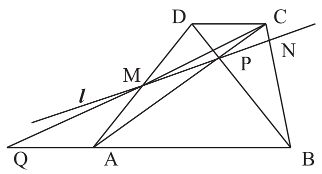
Решение: Нека $AM_1 = BN_1$. Тогава и $AN_1 = BM_1$ и можем да означим $DM = CN = x$, $MN = y$, $AN_1 = BM_1 = x_1$, $N_1M_1 = y_1$. От $\dfrac{AM_1}{M_1B} \cdot \dfrac{DM}{MC} = \dfrac{AN_1}{N_1B} \cdot \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$ следва, че $\dfrac{x_1 + y_1}{x_1} \cdot \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{x_1}{x_1 + y_1} \cdot \dfrac{x+y}{x}$.

Оттук лесно се вижда, че се получават последователно равенствата $\dfrac{x_1 + y_1}{x_1} = \dfrac{x+y}{x}$ и $\dfrac{x_1 + y_1}{x_1} \cdot \dfrac{x}{x+y} = 1$. Получава се, че $\dfrac{AM_1}{M_1B} \cdot \dfrac{DM}{MC} = 1$ и съгласно доказаното в **Задача 1.** AB и CD са успоредни.

Ако AB и CD са успоредни, лесно следва, че при $DM = CN$ и $BM_1 = AN_1$ (образи на DM и CN при хомотетията с център P, която преобразува правата CD в правата AB) и следователно и $AM_1 = BN_1$.

Стойността на разглежданата константа е равна на отношението на лицата на два срещулежащи триъгълника, получени при прекарването на диагоналите на четириъгълника, и в случая, когато тези триъгълници са подобни, тя е равна на отношението на квадратите на две срещуположни страни на четириъгълника. Четириъгълник, за който посочените триъгълници са подобни се явява вписан в окръжност или с успоредни две срещуположни страни.

Задача 4. *Да се построи трапец $ABCD$ по дадени върхове B и C, среда M на бедрото AD и права l, определена от точка M и пресечната точка на диагоналите.*



Решение:

1. Анализ: Нека P е пресечната точка на диагоналите на трапеца, а Q е симетричната точка на C относно средата M на AD. Точка Q ще лежи върху правата AB и $AQ = CD$. Ако правата MP пресича BC в точка N, то $\dfrac{AM}{MD} \cdot \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{S_{APB}}{S_{CPD}}$ и $\dfrac{S_{APB}}{S_{CPD}} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$ (поради това, че триъгълниците APB и CPD са подобни). Точка M е среда на AD и от $AM = MD$ следва, че $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$. Отсечките $BN = a,\ NC = b$ и $BQ = c$ могат да се построят директно. Ако означим $AB = x$ и $CD = y$, получава се системата $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{a}{b} \\ x + y = c \end{array}\right.$ и $x = \dfrac{c.a}{a + \sqrt{a.b}}$. Могат да се построят отсечките $d = \sqrt{a.b}$ и $x = \dfrac{c.a}{a+d}$. Това дава възможност да се построи точка A, а след това и точка D, симетрична на A относно M.

2. Построение:

1) Точка N, пресечна на правата l и BC;

2) Точка Q, симетрична на C относно M;

3) Отсечка $AB = x$ върху лъча $\vec{BQ}$ по формулите $x = \dfrac{c.a}{a+d},\ d = \sqrt{a.b}$, където $BN = a,\ NC = b$ и $BQ = c$ (виж [1] стр. 134);

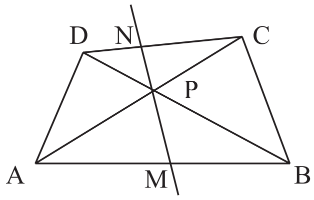
4) Точка D, симетрична на точка A относно точка M;

5) Четириъгълник $ABCD$.

3. Доказателство: AB и CD са успоредни по построение. Пресечната точка на правата, определена от точка M и пресечната точка на диагоналите на трапеца, дели бедрото BC в отношение $AB^2 : CD^2$ (виж анализа) и по построение това е точка N. Следователно правата l минава през точка M – среда на AD и пресечната точка на диагоналите на $ABCD$.

4. Изследване: Ако правата l пресича отсечката BC във вътрешна точка и точка M не лежи на правата BC, задачата има едно решение. Ако правата l не пресича отсечката BC във вътрешна точка или точка M лежи върху правата BC, задачата няма решение.

Задача 5. *Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$, в който AD и BC не са успоредни, се пресичат в точка P. Върху страните AB и CD са избрани точки M и N така, че $AM : MB = DN : NC = AD : BC$. Докажете, че точките M, N и P лежат на една права тогава и само тогава, когато $ABCD$ е вписан в окръжност.*



Решение: Нека четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и правата MP пресича DC в точка F. Тогава имаме $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DF}{FC} = \dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$. Триъгълниците APD и BPC са подобни по първи признак за подобност ($\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$ връхни ъгли, $\sphericalangle DAP = \sphericalangle CBP$ – вписани ъгли, опиращи се на дъгата с краища D и C).

Следователно $\dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}} = \dfrac{AD^2}{BC^2}$. От условието следва, че $\dfrac{AD^2}{BC^2} = \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{AD}{BC}$ и се получава, че $\dfrac{DF}{FC} = \dfrac{AD}{BC}$ и $F \equiv N$ (защото делят DC вътрешно в едно и също отношение).

Нека сега точките M, P и N лежат на една права. Тогава следва, че $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}}$, от условието на задачата имаме $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{AD^2}{BC^2}$ и получаваме, че $\dfrac{S_{APD}}{S_{BPC}} = \dfrac{AD^2}{BC^2}$. Остава само да установим, че триъгълниците APD и BPC са подобни, откъдето ще следва, че AB се вижда под равни ъгли от C и D и точките A, B, C и D лежат на една окръжност.

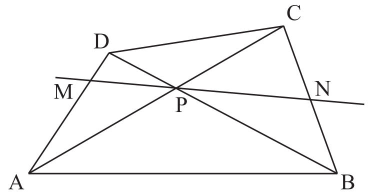
За целта първо ще покажем, че два триъгълника са еднакви ако имат страна, срещулежащ ъгъл и лице съответно равни. Разполагаме двата триъгълника така, че равните им страни да съвпаднат и триъгълниците да бъдат разположени в една полуравнина относно общата си страна. Останалите два върха принадлежат на геометричното място от точки, от които общата им страна се вижда под един и същи ъгъл и на права успоредна на общата страна, поради равенството на ъглите и лицата. Лесно се вижда, че двата триъгълника или съвпадат или са симетрични относно симетралата на общата им страна.

Ако разгледаме подобност с коефициент $k = \dfrac{BC}{AD}$, триъгълник APD се преобразува в триъгълник $A_1P_1D_1$, в който $A_1D_1 = BC$, $\sphericalangle A_1P_1D_1 = \sphericalangle APD$ и $S_{A_1P_1D_1} = S_{APD}.\dfrac{BC^2}{AD^2} = S_{BPC}$ и се получава, че триъгълниците $A_1P_1D_1$ и BPC са еднакви, защото имат съответно равни страна, срещулежащ ъгъл и лице. Тогава ако разгледаме подобността, която е композиция от горната подобност и еднаквостта, при която триъгълниците $A_1P_1D_1$ и BPC са съответни, тя преобразува триъгълник APD в триъгълник BPC и те са подобни. От това, че AD и BC не са успоредни следва, че съответни и следователно равни са ъглите DAP и CBP.

Задача 6. *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и диагоналите му се пресичат в точка P. Върху страната BC е избрана вътрешна точка N и е прекарана правата NP, която пресича страната AD в точка M.*

а) Да се докаже, че $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AB}{CD} \cdot \dfrac{MD}{BN} = \dfrac{CD}{AB} \cdot \dfrac{AM}{NC}$.

б) Да се намери отношението $PM : PN$, ако са известни дължините на страните на четириъгълника $ABCD$ и отношението $BN : NC$.



Решение:
а) Нека $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = \varphi$ (измерват се с половината на мярката на дъгата с краища C и D като вписани ъгли в описаната около четириъгълника окръжност), $\sphericalangle APM = \sphericalangle CPN = \beta$ и $\sphericalangle DPM = \sphericalangle BPN = \gamma$ (връхни ъгли).

От синусова теорема за триъгълниците AMP и BNP получаваме, че $\dfrac{PM}{\sin\varphi} = \dfrac{AM}{\sin\beta}$ и $\dfrac{PN}{\sin\varphi} = \dfrac{BN}{\sin\gamma}$. Като се разделят почленно последните две равенства се получава равенството $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AM}{BN}\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Аналогично след разглеждане на триъгълниците DMP и CNP се достига до $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{MD}{NC}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Умножаваме почленно последните две равенства и последователно получаваме

$$\left(\frac{PM}{PN}\right)^2 = \frac{AM.MD}{BN.NC} = \frac{AM}{MD}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{MD^2}{BN^2} = \frac{S_{APB}}{S_{CPD}}\cdot\frac{MD^2}{BN^2} = \frac{AB^2}{CD^2}\cdot\frac{MD^2}{BN^2}$$

(използвахме равенствата $\dfrac{AM}{MD}\cdot\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{S_{APB}}{S_{CPD}}$ и $\dfrac{S_{APB}}{S_{CPD}} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$, защото триъгълниците APB и DPC са подобни). Получава се $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{MD}{BN}$. Аналогично се получава и равенството $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{CD}{AB}\cdot\dfrac{AM}{NC}$.

б) Полагаме $\dfrac{PM}{PN} = \alpha$, $BN = x$, $NC = y$, $\dfrac{AB}{CD} = k$, $BC = a$, $AD = b$. В подусловие а) получихме, че $\alpha = k.\dfrac{MD}{x}$ и $\alpha = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{AM}{y}$ и $AM + MD = AD$. Тези равенства водят до системата $\left|\begin{array}{l} x+y=a \\ \dfrac{\alpha}{k}.x+\alpha.k.y=b \end{array}\right.$ с решение $x = \dfrac{(\alpha.k.a-b).k}{\alpha(k^2-1)}$, $y = \dfrac{k.b-\alpha.a}{\alpha.(k^2-1)}$ при $k \neq 1$. Получаваме $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{(\alpha.k.a-b).k}{\alpha.(k^2-1)}\cdot\dfrac{\alpha.(k^2-1)}{k.b-\alpha.a} =$ $= \dfrac{(\alpha.k.a-b).k}{k.b-\alpha.a} = k^2.\dfrac{\alpha-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{k}}{k.\dfrac{b}{a}-\alpha}$ и оттук $\alpha = \dfrac{\dfrac{x}{y}\cdot k\cdot\dfrac{b}{a}+k\cdot\dfrac{b}{a}}{\dfrac{x}{y}+k^2}$, следователно $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{AD}{BC}+\dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{AD}{BC}}{\dfrac{BN}{NC}+\dfrac{AB^2}{CD^2}}$. Проверката показва, че последното равенство при $k=1$ добива вида $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AD}{BC}$. Четириъгълникът $ABCD$ при $AB = CD$ е с успоредни страни AD и BC и отсечките PM и AD се преобразуват съответно в отсечките PN и CB при хомотетията с център точка P, преобразуваща правата AD в правата CB. От това следва, че $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AD}{BC}$. Следователно за произволен вписан четириъгълник е изпълнено, че $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{AD}{BC}+\dfrac{AB}{CD}\cdot\dfrac{AD}{BC}}{\dfrac{BN}{NC}+\dfrac{AB^2}{CD^2}}$.

Възможностите за приложение на разглежданата в статията константа могат да бъдат проверени и при самостоятелното решение от читателя на следните задачи:

Задача 7. *В четириъгълника $ABCD$ диагоналите се пресичат в точка P. През P са прекарани две прави, които пресичат страната BC в точки M и M_1 и страната AD в точки N и N_1 (P е пресечната точка на MN и M_1N_1). Ако $\dfrac{BM}{MC}+\dfrac{AN}{ND}=\dfrac{BM_1}{M_1C}+\dfrac{AN_1}{N_1D}$, докажете, че отсечките BM, MM_1, M_1C са пропорционални на отсечките AN_1, N_1N, ND.*

Задача 8. *Ако права, прекарана през пресечната точка P на диагоналите на четириъгълника $ABCD$, пресича страните AB и CD съответно в точките M и N и дължините на отсечките AM, MB, CN, ND, NP, в посочения ред, образуват геометрична прогресия с първи член a и частно q намерете дължината на отсечката PM.*

Отг. aq^2.

Задача 9. *Даден е четириъгълник $ABCD$, който е вписан в окръжност и диагоналите му AC и BD се пресичат в точка P. Да се построи права през точка P, която пресича страните BC и AD съответно в точките M и N такава, че да е изпълнено равенството $\dfrac{BM^2}{MC^2}+\dfrac{AN^2}{ND^2}=2.\dfrac{AB^2}{CD^2}$.*

Задача 10. *В окръжност са прекарани хордите AC и BD, които се пресичат в точка P. Ако N е средата на BC, а H – ортогоналната проекция на P върху AD, да се докаже, че $\dfrac{PH}{PN}\leq\dfrac{AD}{BC}$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски Математика за 9. клас на средните общообразователни училища, С., Анубис, 1998.

ул. “Цар Александър II” № 80, вх. В, ап. 44
3700 Видин

ONE USEFUL CONSTANT IN SOLVING SOME PROBLEMS CONNECTED WITH QUADRANGLES

Toma Marinov Georgiev

This article deals with an interesting constant, which is typical when drawing an arbitrary straight line cross the point of intersection of the diagonals of a projecting quadrangle. Here is shown the usage of this constant in solving geometrical problems and what is more – this is especially effective when the quadrangle is a trapezium or when it is inscribed in a circumference. This article can be useful while working with students showing heightened interest in mathematics.