МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

ВЪРХУ ЕДИН МЕТОД ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА КОМБИНАТОРНИ ТЪЖДЕСТВА

Красимир Янков Йорджев

Разгледан е един метод за получаване на някои комбинаторни тъждества. Използувана е връзката между комбинаториката и броя на числата записани в дадена бройна система и притежаващи дадени свойства (напр. имащи точно k различни от нула цифри в записа си).

Целта на настоящата работа е да демонстрираме един метод за получаване и тълкуване на някои комбинаторни тъждества. Този метод в известен смисъл се различава от общоизвестните комбинаторни методи [1÷6] и е напълно достъпен за учениците от средния курс. Желателно е темата да бъде обсъдена с учениците веднага след темата "бройни системи" [7].

Въвеждаме понятието *n-разрядно p-ично число*. Това е число, записано в p-ична бройна система с точно n цифри, като при необходимост в ляво запълваме с нули. Така например числото пет, записано като седем разрядно двоично число изглежда по следния начин: 0000101. Тогава символа $\binom{n}{k}$ може да означава броя на n-разрядните двоични числа, в записа на които има точно k единици. Веднага трябва да посочим и връзката на двоичната бройна система с комбинаториката. Ако трябва да изберем k елемента измежду елементите на едно n-елементно множество, то избраните елементи "маркираме" с единици, а неизбраните с нули, т.е. всяка комбинация се кодира еднозначно с някакво n-разрядно двоично число и обратно на всяко n-разрядно двоично число съответствува единствена комбинация. От посоченото взаимно-еднозначно съответствие веднага следват някои повече, или по-малко известни комбинаторни тъждества.

Задача 1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1}$$

Решение. Равенството (1) следва от факта, че броят на n разрядните двоични числа записани с k единици и $(n-k)$ нули е равен на броя на n-разрядните двоични числа, записани с $(n-k)$ единици и k нули. Това е така, тъй като във всяко двоично число можем да сменим единиците с нули, а нулите с единици, откъдето следва и твърдението.

Задача 2.

$$\binom{n-p}{m-p} = \binom{n-p}{n-m} \tag{2}$$

Решение. Твърдението следва непосредствено от задача 1. И наистина, ако в едно $(n-p)$-разрядно двоично число имаме точно $(m-p)$ единици, то в това число ще имаме точно $(n-p)-(m-p)=(n-m)$ нули.

Задача 3.

$$\binom{n+p}{n-m}=\binom{n+p}{m+p} \tag{3}$$

Упътване. Решението е аналогично на решението на задача 2.

Задача 4.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \tag{4}$$

Решение. Тъждеството 4 следва от факта, че броят на всички n-разрядни двоични числа $\underbrace{000...00}_{n}$, $\underbrace{000...01}_{n}$, $\underbrace{000...10}_{n}, \dots, \underbrace{111...11}_{n}$, чийто десетичен запис е съответно $0,1,2,...,(2^n-1)$, е равен на 2^n. При това броя на всички n-разрядни двоични числа е равен на $c_1+c_2+\cdots+c_n$, където с c_k сме означили броя на n разрядните двоични числа, в записа на които има точно k единици, а както отбелязахме по-горе $c_k=\binom{n}{k}$.

Задача 5.

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \tag{5}$$

Решение. Нека с A означим множеството на n-разрядните двоични числа, записани с точно k единици. Но A е обединение на две непресичащи се подмножества – подмножеството B на n-разрядните двоични числа, започващи с 0 и имащи в записа си точно k единици и подмножеството C на n-разрядните двоични числа, започващи с 1 и имащи в записа си точно k единици. Тъй като $|A|=\binom{n}{k}$, $|B|=\binom{n-1}{k}$ и $|C|=\binom{n-1}{k-1}$, то получаваме и (5)

Задача 6.

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \tag{6}$$

Упътване. До формула (6) ще достигнем, ако пресметнем броя на всички $(n+m)$-разрядни двоични числа записани с точно k на брой единици, като отчитаме броя на единиците в първите n позиции.

Задача 7.

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 \tag{7}$$

Решение. Във формула (6), навсякъде m и k заменяме с n. Лявата част на равенството (7) се получава веднага, а до дясната част достигаме, припомняйки си задача 1, т.е. $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$.

Задача 8.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n} \tag{8}$$

Решение. Броят на всички $(2n+1)$-разрядни двоични числа с k нули и s единици е равен на броят на всички $(2n+1)$-разрядни двоични числа с s нули и k единици. Ако k се мени измежду числата $0, 1, 2, \ldots, n$, то s ще бъде съответно $2n+1, 2n, 2n-1, \ldots, n+1$. Следователно, ако сменим местата на нулите и единиците получаваме:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{s=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{s}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}$$

Съгласно задача 4 имаме:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n+1}$$

откъдето следва и твърдението, разделяйки двете страни на последното равенство на 2.

До тук използувахме основно двоичната бройна система при доказателството на комбинаторни тъждества, но е възможно използуването на бройна система с произволна основа. Ето и някои примери:

Задача 9.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^{n-k}=p^n \tag{9}$$

Решение. Аналогично на доказателството на тъждеството от задача 4 не е трудно да се види, че броят на всички n-разрядни p-ични числа е равен на p^n. Нека α е последната цифра в p-ична бройна система. Тогава $\binom{n}{k}$ представлява броя на всички n-разрядни p-ични числа, в които на точно k места участвува цифрата α. В едно такова число, ако зачеркнем навсякъде α, то получаваме $(n-k)$-разрядно $(p-1)$-ично число, откъдето следва и формула (9).

От (9) при $p=2$ получаваме тъждеството (2), а полагайки $p=x+1$ получаваме формулата за развитието на $(x+1)^n$ по степените на x. Формула (5) пък ще ни помогне да опишем известния алгоритъм за намиране на биномните коефициенти с помощта на триъгълника на Паскал.

Задача 10.

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}=\binom{n}{m+k}\binom{m+k}{m}=\binom{n}{m+k}\binom{m+k}{k} \tag{10}$$

Упътване. До формула (10) ще достигнем, ако пресметнем по няколко различни начина броят на n-разрядните троични числа, записани с точно k на брой двойки и m на брой единици.

Задача 11.

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k} \tag{11}$$

Упътване. Разсъждаваме както при пример 10, като в случая ще пресметнем по няколко начина броя на n-разрядните троични числа с k на брой двойки и m на брой единици плюс двойки (т.е. различни от нула цифри).

Задача 12.

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m} \tag{12}$$

Упътване. Пресмятаме броя на всички n-разрядни троични числа, записани с помощта на точно m двойки. От лявата страна на равенството k може да се интерпретира като броя на различните от нула цифри при записа на дадено троично число.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Айгнер. Комбинаторная теория. Москва, Мир, 1982.
[2] Н. Я. Виленкин. Популярная комбинаторника. Москва, Наука, 1975.
[3] Я. Гульден, Д. Джексон. Перечислительная комбинаторика. Москва, Наука, 1990.
[4] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечин. Комбинаторный анализ-задачи и упражнения. Москва, Наука, 1982.
[5] Д. Риордан. Комбинаторные тождества. Москва, Наука, 1982.
[6] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. Москва, Мир, 1990.
[7] С. В. Фомин. Системы счисления. Москва, Наука, 1980.

Красимир Янков Йорджев
Тракийски университет
Технически колеж
“Граф Игнатиев” 38
8602 Ямбол

ON A METHOD OF GETTING SOME COMBINATORIAL IDENTITIES

Krassimir Yankov Iordjev

A method of getting some combinatorial identities hase been considered. The conection between combinatorial analysis and number of integers which are writing in given numeration system and having some properties (for example having equal k non-zero digits in his notation) has been used.