МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

РАЗГЛЕЖДАНЕ НА ТЕМАТА „РЕШЕТКИ В РАВНИНАТА“ В ИЗВЪНКЛАСНИТЕ ФОРМИ НА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА

Симеон Станев Първулов

В настоящата работа е показан един подход за разглеждане на темата „Решетки в равнината“ в извънкласните форми на работа по математика.

Една от основните цели на извънкласните форми на работата по математика е развитието на творческите способности на учениците. В изследванията на много психолози и педагози се посочва, че един от начините за реализирането на тази цел, е в извънкласните форми на работа да се разглеждат теореми и задачи, при доказването на които се използва нестандартно изследване на широк набор от теоретични знания и подходи, свързани с интеграцията на тези знания. В настоящата работа се разглеждат теореми и задачи, при доказването на които се използват знания от темите : „Принцип на крайния елемент“, „Принцип на Дирихле“ и „Решетки в равнината“.

Теоремите и задачите от темата дават възможност на ръководителя на занятието да формира у учениците умения за използване на основните методи и прийоми на научното познание за откриване на изходното начало за решаване на нестандартни задачи и за реализиране на плана на решението на задачата. При решаване на голяма част от задачите, за откриване на изходната идея или за реализиране на плана на решението е необходимо въвеждане на подходящи допълнителни елементи. Ето защо темата дава възможност и за формиране на умения за откриване на подходящи допълнителни елементи, които да спомагат за осъществяване на взаимна връзка между условието на задачата, необходимите, достатъчните или необходимите и достатъчни условия за съществуване на структурните елементи на задачата с цел откриване на изходното начало за решаването и. Допълнителните елементи могат да бъдат: прави, отсечки, окръжности, дъги, параметри, функции, геометрични преобразования, геометрични фигури, решетки и др. При подбора на теоремите и задачите основно са използвани [1] и [2].

Определение 1. *Ако в равнината е дадена координатна система и a и b са фиксирани реални числа, то множеството от прави с уравнения $x = ma$, $y = nb$, където m и n са произволни цели числа образуват решетка в равнината.*

Точките с координати (ma, nb) се наричат възли на решетката.

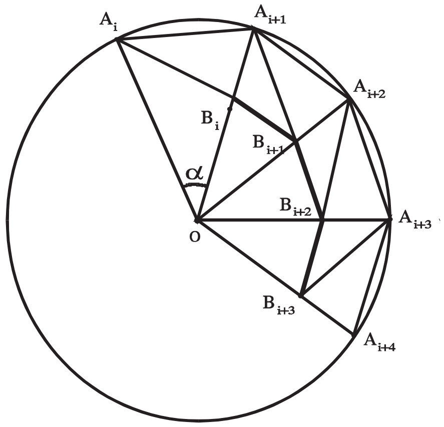
Определение 2. *Ако m и n са цели числа, то множеството прави от равнината с уравнения $x = m$ и $y = n$ образуват целочислена решетка.*

Ако е даден успоредник в равнината и построяваме покриване на равнината с успоредници, еднакви на този успоредник, то ще получим решетка в равнината. В този случай ще казваме, че решетката е породена от дадения успоредник.

Теорема 1. *Ако три върха A, B, C на успоредника $ABCD$ са възли на някоя решетка, то четвъртият връх D също е възел на тази решетка.*

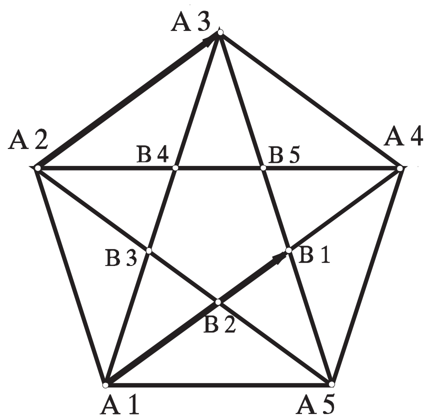
Доказателство. Да извършим транслация на вектор $\overrightarrow{AB}$. След транслацията разстоянията между успоредните прави, върху които лежат възлите на решетката, ще се запазят и ще получим решетка, която ще съвпадне с изходната решетка, защото възелът A ще се изобрази във възелът B. Тогава върхът D ще се изобрази във възела C, откъдето следва, че D е възел на дадената решетка.

Теорема 2. *Правилни n-ъгълници с върхове във възлите на решетка съществуват само при $n = 3$, 4 и 6.*



черт. 1

1) Ще докажем, че при $n > 6$, не съществува правилен n-ъгълник с върхове във възлите на решетка. Нека допуснем, че съществува такъв n-ъгълник. Понеже измежду всички разстояния между два възела на фиксирана решетка има най-малко, то измежду тези n-ъгълници съществува такъв, който има най-малка дължина на страната. Нека $A_1A_2\dots A_n$ е този n-ъгълник. Нека точките $B_i(i = 1, 2, \dots, n)$ са съответно образите на точките $A_i(i = 1, 2, \dots, n)$ при транслации с векторите $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ (черт. 1). Понеже $n > 6$, то $\alpha < 60^\circ$, следователно точките $B_i(i = 1, 2, \dots, n)$ лежат съответно на отсечките $OA_{i+1}(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Лесно се проверява, че триъгълниците $B_iA_{i+1}A_i$ и $B_{i+1}A_{i+2}A_{i+1}(i = 1, 2, \dots, n-2)$ са еднакви. От еднаквостта на тези триъгълници следва, че отсечките $B_iB_{i+1}(i = 1, 2, \dots, n-1)$ са съответно успоредни на отсечките $A_{i+1}A_{i+2}(i = 1, 2, \dots, n-2)$ и $B_iB_{i+1} < A_{i+1}A_{i+2}$. Понеже точките $B_i(i = 1, 2, \dots, n)$ са върхове на успоредниците $A_iB_iA_{i+2}A_{i+1}$, то от теорема 1 следва, че те са възли на фиксираната решетка. Следователно $B_1B_2\dots B_n$ е правилен n-ъгълник с дължина на страната по-малка от дължината на страната на $A_1A_2\dots A_n$ и върховете му са възли на решетката, което е противоречие с допуснатото.



черт. 2

2) При $n = 5$, като използваме същия подход получаваме, че точките $B_1, B_2, \ldots, B_5$ са пресечните точки на диагоналите на петоъгълника $A_1 \ldots A_5$. (черт. 2). Лесно се проверява, че $B_1 \ldots B_5$ е правилен петоъгълник с дължина на страната по-малка от дължината на страната на $A_1 A_2 \ldots A_5$.

3) Ще докажем, че при $n = 3$, 4 и 6 твърдението е вярно. Наистина:
При $n = 4$ твърдението е вярно, защото върху решетка породена от квадрат, съществува квадрат с исканото свойство.
При $n = 3$, разглеждаме решетка породена от правоъгълник, отношението на страните на които е равно на $\sqrt{3}$:1. Лесно може да се построи равностранен триъгълник с върхове във възлите на тази решетка.
Понеже от шест равностранни триъгълника винаги маже да се построи правилен шестоъгълник, то при $n = 6$ твърдението също е вярно.

Теорема 3 (Теорема на Блихфелт). *Ако n е произволно естествено число, а A е фигура в равнината, за която $S(A) > n$, то съществуват $n + 1$ на брой различни вътрешни точки (x_γ, y_γ) на A, за които разликите и са $x_\mu - x_\gamma$ и $y_\mu - y_\gamma$ $(\mu, \gamma = 1, 2, \ldots, n + 1)$ са цели числа.*

Доказателство. Ако в равнината изберем ортогонална координатна система и построим целочислена решетка, то фигурата се разделя от квадратите на решетката на няколко части. Избираме един от квадратите на решетката за основен и транслираме всеки от квадратите, който съдържа част от фигурата в основния. Тогава частите на фигурата A лежащи в различни квадрати, ще се изобразят след тези транслации в основния квадрат. Но сборът от техните лица е равен на лицето на фигурата A следователно е по-голям от n-пъти лицето на квадрата в който лежат. Тогава от усиленият принцип на Дирихле за лицата следва, че поне $n + 1$ от образите на тези части ще имат обща вътрешна точка (x_0, y_0). При транслациите тази точка има различни първообрази (x_γ, y_γ) $(\gamma = 1, 2, \ldots, n + 1)$, и понеже разликите $x_\mu - x_0$, $x_\gamma - x_0$, $y_\mu - y_0$, $y_\gamma - y_0$ са цели числа, то и разликите $x_\mu - x_\gamma$ и $y_\mu - y_\gamma$ $(\mu, \gamma = 1, 2, \ldots, n + 1)$, са цели числа.

Теорема 4 (Теорема на Минковски) *Ако A е симетрично относно началото на координатната система изпъкнало множество от точки в равнината, n е естествено число и $S(A) > 4n$, то A съдържа поне $2n + 1$ различни помежду си* *точки с целочислени координати.*

Доказателство. Нека изберем O за начало на координатна система и намираме образа на A чрез хомотетия с център O и коефициент $\frac{1}{2}$. Така получаваме ново множество A', за което $S(A') > n$. Ето защо от теоремата на Блихфелт следва, че A' съдържа поне $n+1$ различни точки (x_γ, y_γ) $(\gamma = 1, 2, \ldots, n+1)$, за които разликите $x_\mu - x_\gamma$ и $y_\mu - y_\gamma$ $(\mu, \gamma = 1, 2, \ldots, n+1)$, са цели числа.

Да разгледаме най-малкия възможен изпъкнал многоъгълник, който съдържа всички тези точки. Не е трудно да се съобрази, че всеки от върховете му е някоя от точките (x_γ, y_γ). Върховете на произволен изпъкнал многоъгълник очевидно не са среди на отсечки, краищата на които лежат в многоъгълника. Ето защо измежду точките (x_γ, y_γ), ще съществува такава, която не е среда на отсечка, краищата на която са някои от други две от тези точки. Нека такава е например точката (x_1, y_1). Тъй като множеството A е симетрично относно началото, то и A' е симетрично относно началото. Ето защо точката $(-x_1, -y_1)$ също принадлежи на A'. Понеже A е изпъкнало, то от свойствата на хомотетията следва, че и A' също е изпъкнало. Ето защо средите на отсечките с краища точките (x_γ, y_γ) $(\gamma = 2, 3, ..., n+1)$ и точката $(-x_1, -y_1)$ принадлежат на A'. Тези среди са точките с координати $\left(\frac{x_\gamma - x_1}{2}, \frac{y_\gamma - y_1}{2}\right)$ $(\gamma = 2, 3, ..., n+1)$. Първообразите на тези точки при разгледаната хомотетия са точките с координати $(x_\gamma - x_1, y_\gamma - y_1)$ $(\gamma = 2, 3, ..., n+1)$, които са различни от началото и принадлежат на A. Но A е симетрично относно началото, ето защо и точките с координати $(x_1 - x_\gamma, y_1 - y_\gamma)$ $(\gamma = 2, 3, ..., n+1)$ принадлежат на A. Ще покажем, че точките с координати $(x_\gamma - x_1, y_\gamma - y_1)$ $(\gamma = 2, 3, ..., n+1)$ са различни от точките с координати $(x_1 - x_\gamma, y_1 - y_\gamma)$ $(\gamma = 2, 3, ..., n+1)$. Наистина, ако допуснем, че за някои два индекса μ и γ $(\mu, \gamma = 2, 3, ..., n+1)$ $(x_\gamma - x_1, y_\gamma - y_1) = (x_1 - x_\mu, y_1 - y_\mu)$, то $x_1 = \frac{1}{2}(x_\gamma + x_\mu)$ и $y_1 = \frac{1}{2}(y_\gamma + y_\mu)$. Тогава при $\mu = \gamma$ получаваме, че $(x_1, y_1) = (x_\gamma, y_\gamma)$, което е противоречие с $\gamma \neq 1$. При $\mu \neq \gamma$, точката (x_1, y_1) ще бъде среда на отсечката с краища (x_γ, y_γ) и (x_μ, y_μ), което е в противоречие с избора ѝ. Следователно A съдържа поне $2n$, различни от началото точки. Понеже началото на координатната система също има цели координати и принадлежи на A, то твърдението е доказано.

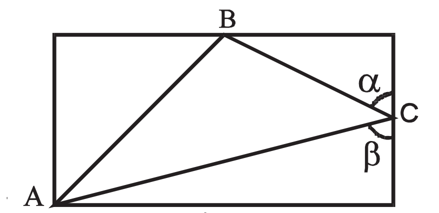
Задача 1. Даден е успоредник, чийто върхове са възли на решетка в равнината. Да се докаже, че ако този успоредник не съдържа в себе си и върху страните си други възли на решетката освен върховете, той поражда решетката.

Решение. Нека $ABCD$ е успоредник с върхове във възлите на дадена решетка, който удовлетворява условието на задачата. От определение 1 следва, че всеки възел на решетката породена от $ABCD$ е възел и на дадената решетка. Ще докажем и обратното, че всеки възел на дадената решетка е възел и на решетката породена от $ABCD$. Да допуснем, че съществува възел K на дадената решетка, който не е възел на решетката породена от $ABCD$. Тогава съществува успоредник $MNPQ$ от решетката породена от $ABCD$, за който K е вътрешна точка или лежи върху някоя от страните му. Да разгледаме транслация с вектор $\overrightarrow{MK}$. Нека точката L е образ на точката A при тази транслация. От това, че K е вътрешна точка за успоредника $MNPQ$ или лежаща върху някоя от страните му следва, че L е вътрешна за $ABCD$

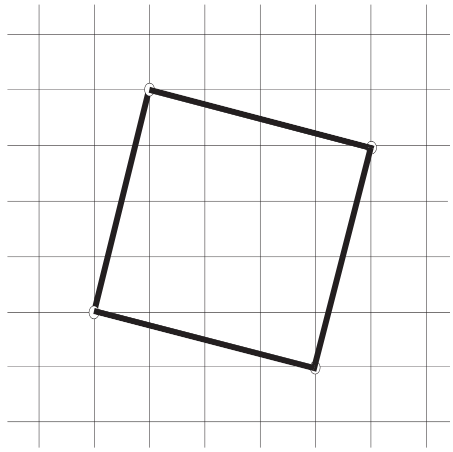
или лежаща върху някоя от страните му. Понеже за успоредника $AMKL$ върховете A, M и K са възли за решетката породена от $ABCD$, то от теорема 1 следва, че и точката L е възел на тази решетка, което е противоречие с условието на задачата.

Задача 2. Да се докаже, че правилен n-ъгълник с върхове във възлите на целочислена решетка съществува само при $n = 4$.

Решение. От теорема 2 следва, че правилен n-ъгълник с върхове във възлите на решетка съществува само при $n = 3$, 4 и 6. Ще докажем, че ако решетката е целочислена, то $n \neq 3$ и 6. Съществуването на правилен шестоъгълник с върхове във възлите на целочислена решетка води до съществуването на равностранен триъгълник с върхове във възлите на тази решетка.



черт. 3


черт. 4

За това достатъчно е да докажем, че не съществува равностранен триъгълник с върхове във възлите на решетката. Нека допуснем, че съществува равностранен триъгълник ABC с върхове във възлите на целочислена решетка. Нека през върховете на триъгълника прекарваме прави успоредни на правите на решетката. Тогава разположението на точките A, B и C върху тези прави ще бъде както е показано на черт. 3. Понеже $\alpha+\beta = 120^\circ$, то $\operatorname{tg} 60^\circ = -\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\sphericalangle\operatorname{tg}\beta}$. Но $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ са рационални числа, следователно $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$ е рационално число, което е противоречие.

Лесно се проверява, че съществува квадрат с върхове във възлите на целочислена решетка. Ще отбележим, че квадратът може да бъде разположен върху целочислената решетка и така, че нито една от страните му да не бъде успоредна на правите, образуващи решетката (виж черт. 4).

Задача 3. Ако е дадена целочислена решетка, то всяка окръжност с център точката $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, която минава през възел на решетката не минава през друг възел на тази решетка.

Решение. Нека точката (x, y) е произволен възел на дадената целочислена решетка. Тогава окръжността с център $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ и радиус равен на разстоянието между точките $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ и (x, y) минава през възела (x, y). Ще докажем, че тази окръжност не минава през друг възел на решетката. Нека допуснем, че тази окръжност минава и през друг възел (u, v). Тогава получаваме равенството $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 =$

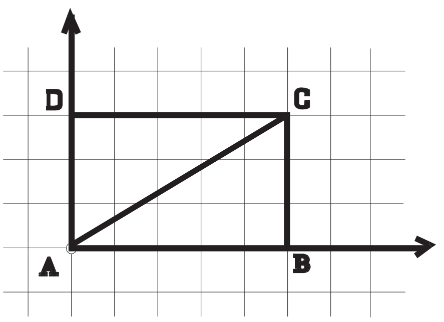
$(u-\sqrt{2})^2+(v-\sqrt{3})^2$, което е еквивалентно на $u^2+v^2-x^2-y^2 = 2(u-x)\sqrt{2}+(v-y)\sqrt{3}$. Ако положим $2(u-x) = c$, $2(v-y) = d$ и $u^2+v^2-x^2-y^2 = n$, където c, d, и n са цели числа получаваме равенството $c\sqrt{2}+d\sqrt{3} = n$ от където следва, че $2cd\sqrt{6} = n^2-2c^2-3d^2$. При $c.d \neq 0$ получаваме $\sqrt{6} = \dfrac{u^2-2c^2-3d^2}{2c.d}$, което е противоречие с това, че $\sqrt{6}$ е ирационално число, а c, d и n цели числа. Ето защо $c.d = 0$. Ако $c = 0$ и $d \neq 0$ получаваме $d\sqrt{3} = n$, което е противоречие с това, че $\sqrt{3}$ е ирационално число. По същия начин получаваме,че не е възможен случая $d = 0$ и $c \neq 0$. Следователно $c = d = 0$, т.е. $x = u$ и $y = v$, което означава, че точките (x, y) и (u, v) съвпадат.

Ако върховете на многоъгълника M са във възлите на целочислена решетка, вътре в многоъгълника лежат n а върху страните му m възела на решетката, то с $f(M)$ ще означим числото $n+\dfrac{m}{2}-1$.

Задача 4. Ако многоъгълникът M с върхове във възлите на целочислена решетка е разбит на два многоъгълника M_1 и M_2 с помощта на начупената линия l, съставена от отсечки, които съединяват възли на решетката, то $f(M) = f(M_1)+f(M_2)$.

Решение. Нека с p означим броя на възлите на решетката лежащи върху l. Нека с n_1 и n_2 означим броя на възлите лежащи съответно вътре в M_1 и M_2, а с m_1 и m_2 броят на възлите лежащи съответно върху страните на M_1 и M_2. Понеже краищата на l лежат върху страните на M, ще получим $n = n_1+n_2+p-2$ и $m = m_1+m_2-2p+2$, тогава $f(M) = n_1+n_2+p-2+\dfrac{m_1+m_2-2p+2}{2}-1 = f(M_1)+f(M_2)$.

Задача 5. Ако $ABCD$ е правоъгълник с върхове във възлите на целочислена решетка и страните му са успоредни на правите на решетката, то $S_{(ABCD)} = f(ABCD) = n+\dfrac{m}{2}-1$ (формула на Пик).

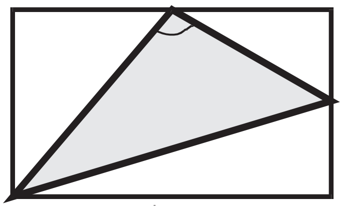


черт. 5

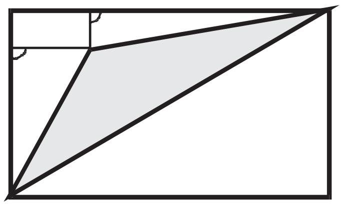
Решение. Нека разгледаме координатна система в равнината с начало точката A и координатни оси лъчите AB и AD (черт. 5). Ако точките B и D имат координати съответно $(p, 0)$ и $(0, q)$, то $S_{ABCD} = p.q$. От друга страна $n = (p-1)(q-1)$ и $m = 2p+2q$, следователно $f(M) = n+\dfrac{m}{2}-1 = p.q$.

Задача 6. Ако ABC е триъгълник с върхове във възлите на целочислена решетка, то $S_{ABC} = f(ABC) = n+\dfrac{m}{2}-1$.

Решение. 1) Нека ABC е правоъгълен триъгълник с върхове във възлите на целочислена решетка. Тогава ако допълним триъгълника до правоъгълник $ABCD$, както е показано на черт. 6, то като използваме, че $S_{ABCD} = f(ABCD) = f(ABC) + f(CAD)$ и $f(ABC) = f(CAD)$, получаваме $f(ABC) = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABC}$.



черт. 6



черт. 7

2) Нека ABC е произволен триъгълник. Тогава, ако през върховете му прекарваме прави, успоредни на правите на решетката получаваме, покриване на правоъгълника, както е показано на черт. 7. Като прилагаме няколко пъти резултата от задача 4 и използваме резултата от 1), получаваме $S_{ABC} = f(ABC) = n + \frac{m}{2} - 1$.

За самостоятелна работа могат да се предложат задачи от вида:

Задача 1. Ако върховете на триъгълник са във възли на дадена решетка и лицето му е равно на S, да се докаже, че $2S$ е цяло число и $S = \frac{1}{2}$, точно тогава, когато ABC не съдържа възли на решетката във вътрешността си или върху страните си т.е. е елементарен триъгълник.

Задача 2. Правоъгълник с размери m и n, където m и n са цели числа, е разделен на квадратчета чрез прави, успоредни на страните му. Да се докаже, че диагоналът му пресича точно $m + n - d$ квадратчета, където $d = (m, n)$ е най-големият общ делител на m и n.

Задача 3. В равнината е дадена целочислена решетка и окръжност с радиус 100, която не минава през никой от възлите на решетката и не се допира до правите ѝ. Колко клетки на решетката може да пресича тази окръжност?

Задача 4. Дадена е затворена начупена линия, върховете на която са възли на целочислена решетка. Да се докаже, че ако всички отсечки на тази начупена линия имат еднаква дължина, то броят им е четно число.

Задача 5. Нека F е многоъгълник, върховете на който са възли на целочислена решетка. Ако n е броят на възлите на решетката лежащи върху контура на F, а m е броят на възлите на решетката, лежащи вътре в F, да се докаже, че лицето на F се дава по формулата $S = n + \frac{m}{2} - 1$.

Задача 6. Върховете на триъгълника ABC съвпадат с възли на целочислена решетка, при което върху страните му не лежат други възли на решетката, а вътре в триъгълника има само един възел O. Да се докаже, че O е пресечната точка на медианите на триъгълника.

Задача 7. Да се докаже, че за произволно неотрицателно цяло число n в равнината съществува кръг, който съдържа точно n точки с цели координати.

Задача 8. Да се докаже,че в равнината съществува система $K_0, K_1, \ldots, K_n$ от концентрични кръгове такива, че за всяко n кръгът K_n съдържа точно n целочислени точки.

В заключение ще отбележим, че формирането у учениците на умения за приложение на основните методи и прийоми на научното познание, за намиране на изходната идея за решаване на нестандартни задачи и реализиране на плана на решението предполага:

1. Подходящ подбор на теоремите и задачите, които трябва да се разглеждат и задачите за самостоятелна работа;

2. Построяване на операционен модел, съответстващ на реалните операции, които учениците трябва да усвоят и усвояването на които осигурява формиране на умения за подходящо съчетаване и приложение на методите на научното познание: за въвеждане на подходящи допълнителни елементи; за откриване на изходната идея и реализиране на плана на решението;

3. Разглеждане на различни идеи и методи за решаване на задачи в зависимост от въведените допълнителни елементи или избора на изходната идея;

4. Разглеждане на групи от взаимно свързани задачи, при решаването на които се използва въвеждането на едни и същи допълнителни елементи или една и съща изходна идея.

Считаме, че единството на тези изисквания определя обучаваща програма за формиране на горепосочените умения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Петков. Комбинаторна геометрия. София, 1978.
[2] Ив. Проданов. Принцип на Дирихл.л София, 1988.

Симеон Станев Първулов
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика
9712 Шумен

ONE APPROACH FOR REVIEW OF THE THEME “GRIDS IN THE PLANE” IN THE EXTRACURRICULAR FORMS OF WORK IN MATHEMATICS

Simeon Stanev Parvulov

This paper presents an approach to the theme “Grids in the plane” in extracurricular studies in mathematics