

*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2007  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2007  
Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
St. Konstantin & Elena resort, Varna, April 2–6, 2007*

**ЕЛЕКТРОНЕН УЧЕБНИК ПО МАТЕМАТИКА ЗА ОСМИ  
КЛАС**

**Ангел А. Гушев, Веселин А. Гушев**

Дидактическият модел е удобно средство за реализиране на оптимална стратегия на педагогическата работа, проектиране на учебни модули с необходимата методическа компетентност и за пряко приложение в учебната практика. Използването на on line-базирани уроци е от важно значение за ефективността и качеството на преподаване в съвременни условия.

Следвайки модела на дидактическо моделиране, в настоящата работа е разработена обучаваща среда – вариант на електронен учебник по математика за осми клас.

Софтуерната основа на разработената среда е динамичният математически софтуер **БЕОМЕТ**. Той осигурява нови възможности за преподаване и усвояване на материала в урока по математика и предоставя нови методи за визуализиране, чийто ефект не може да се постигне при използването на традиционните средства за преподаване като черна дъска и тебешир.

Развитието на съвременните информационни технологии предлага редица възможности за реализиране на гъвкави образователни услуги, свързани с дистанционното и компютърно подпомогнатото обучение. Приложението на новите технологии може да се разглежда в две посоки:

- прилагане на web-базирани варианти на дидактически материали и пособия и тяхната реализация като интерактивни мултимедийни проекти;
- определяне на подходящи образователни практики и технологии, които са ориентирани към използването на интерактивна мултимедия.

Интерактивните мултимедийни продукти могат да бъдат класифицирани в три групи:

◇ в първата от тях попадат мултимедийни приложения от тип “запази и покажи”. Това са предимно on line-курсове, които са с лесна навигация и предлагат възможности за търсене в богати бази от данни.

◇ втората обхваща мултимедийни приложения в реално време като видео-конференции.

◇ третата група представлява комбинация от първите две. Така се създават виртуални класни стаи, в които има възможност за интерактивно обучение с участието на on line инструктори.

Дидактическият модел е удобно средство за реализиране на оптимална стратегия на педагогическата работа и проектиране на учебни модули с необходимата

методическа компетентност и пряко приложение в учебната практика. Използването на *on line*-базирани уроци е от важно значение за ефективността и качеството на преподаване в съвременни условия.

Предложената образователна технология се основава на принципа на нагледността и на визуализацията като стратегия на учене.

Целта ѝ е да се използват и двата начина на представяне на информацията (словесен и нагледен), за да се подпомага не само общото разбиране на контекста на дадено учебно съдържание, но и да се формира у учащите се способност за превеждане на информация от езика на словото на езика на образите.

За да се овладее и ефективно използва тази стратегия е необходимо някои по-значими части от определена информация да се представят под формата на таблици, диаграми, схеми, графики, анимации и др. Така се развива усет не само за подбиране на най-важното, но и неговото лаконично и пространствено представяне. В хода на тази дейност учителят е не само регулатор в процеса на учене и обучение, но той по-скоро е модератор в една отворена учебна среда и предлага на ученика широка палитра от учебни ситуации.

Следвайки модела на дидактическо моделиране, разработената обучаваща среда служи за подпомагане на обучението по математика. Посредством нея обучаемите получават помощ при изграждането и структурирането на знанията.

Отделните информационни единици се предлагат така, че всеки модул, *web*-страница, анимация или визуализация да се отнася до самостоятелна тема, която е изложена на това място изчерпателно, точно и достъпно. От едно общо начало следват връзки към други учебни единици.

Вътрешната структура, заложена в конкретната тематика, служи за шаблон при осъществяване на навигацията между отделните модули, с което се постига интуитивна ориентация и запазване на вътрешната спойка между модулите [6, 7].

Софтуерната основа на разработената обучаваща среда е програмата **GEONET**. Тя служи за създаване на геометрични и графични конструкции, като предлага една чертежна повърхнина и множество конструкционни инструменти. Създадените геометрични и графични конструкции могат да бъдат коригирани по различни начини и динамично променяни, което дава богати възможности за анимиране на математическата ситуация.

Динамичният математически софтуер **GEONET** отваря нови възможности за преподаване и усвояване на материала в урока по математика, предоставяйки нови методи за визуализиране. Това спомага за пълноценното осмисляне на характеристиките на ситуацията, за изграждането на хипотези, за проверка на верността им, за визуализиране и анализиране на крайния резултат. Такъв ефект трудно може да бъде постигнат при използването на традиционните помагала.

**GEONET** поставя основите на един учебен процес, предоставящ на учениците възможността за самостоятелна, индивидуална и колективна работа, както и за един активен изследователски подход при изучаването на математическата материя. Трябва да подчертаем, че използването на **GEONET**, както в училищата, така и извън тях, е безплатно [5].

Като част от по-мащабен проект, разработената образователна среда е вариант



Фиг. 1

както и на динамични конструкции — Flash анимации и **GEONEX** ...-ови аплети. За да бъдат активни тези аплети освен ... **GEONEX**, е необходима и инсталация на Java 1.4 (или по-нова версия).

Най-често използваните интернет браузъри като Internet Explorer, Mozilla Firefox, Opera и др. визуализират еднакво добре предложените продукти.

След стартиране на приложението, на потребителя се предоставя възможност за избор на език (български, руски или английски). Предлага се и възможност за допълнително инсталиране на **GEONEX**, Java или Flash Player (Фиг. 1).

Навигацията се осъществява посредством меню, което е с дървовидна структура на две нива. На първо ниво са основните раздели от съдържанието, а на второ са заглавията на конкретните учебни единици. След избора на даден урок съдържанието му се визуализира в основния прозорец (Фиг. 2).

Придвижването по съдържанието се осъществява лесно и интуитивно посредством стрелки, разположени в долната част на страницата. За придвижване могат да бъдат използвани и стандартните възможности, които ни предоставя конкретния Web браузър.

Всеки урок предоставя богати възможности за визуализация при въвеждането на понятия, доказването на теореми или решаването на задачи.

За разлика от традиционното представяне на учебния материал по геометрия тук един динамичен аplet заменя множеството статични чертежи, необходими за пълното излагане на материала.

Посредством Java Script всеки от обектите на аплета може да бъде показван или скриван когато е необходимо.

Възможностите на технологията позволяват да се използват нови средства за евристичен анализ на геометричната ситуация, съставяне и проверка на хипотези и т.н. Някои от точките са свободни и могат да се движат с помощта на мишката. Така може да се следи изменението на геометричната конструкция, да се съпоставят отделните чертежи и да се правят изводи.

В нашия продукт за целта се използва полето за експеримент – в отделен прозорец на потребителя се предоставя възможност да променя местоположението на даден обект и същевременно да следи дали се запазват свойствата на зададената конструкция (Фиг. 4).

Тези именно възможности, предоставени от комбинацията **GEONEX** ... и Java Script формират концепцията за представяне на учебното съдържание:

на електронен учебник по математика за осми клас. Той представлява web-базирано приложение, създадено в HTML формат, предназначено за компютърно подпомогнато обучение.

Тя доразвива и надгражда концепцията, зададена от аналогични продукти за обучение по алгебра (вж. [1, 2, 3, 4]).

Хипертекстовият формат позволява враждането на текстове, графики,

МАТЕМАТИКА В клас

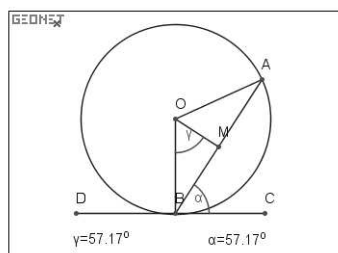
- ОКРЪЖНОСТ
  - Взаимни положения на точка и права окръжност
  - Взаимно положение на две окръжности
  - Съответствие между централни ъгли, дъги и хорди
  - Периферни и вписани ъгли
    - Ъгли, чиито върхове са вътрешни или външни точки за окръжността
    - ГМТ, от които отсечка се вижда под даден ъгъл
- ОКРЪЖНОСТ И МНОГОЪГЪЛНИК
  - Окръжност, описана около триъгълник
  - Окръжност, описана около многоъгълник
  - Окръжност, вписана в триъгълник
  - Окръжност, вписана в многоъгълник
  - Външно вписани окръжности
  - Забележителни точки в триъгълника
  - Вписан четириъгълник
  - Описан четириъгълник
  - Ограден четириъгълник
  - Правилни многоъгълници и окръжност
- ЗАДАЧИ

### Периферни и вписани ъгли

Ъгъл, чиито връх лежи на окръжност, едното му рамо се допира до окръжността, а другото му рамо я пресича, се нарича **периферен ъгъл** за окръжността.

Дъгата от окръжността, лежаща във вътрешността на периферния ъгъл, се нарича **съответна дъга** на ъгъла.

**Теорема 1.** Периферният ъгъл се измерва с половината от съответната му дъга.



#### Доказателство:

**I. Нека  $\angle ABC$  е остър периферен ъгъл** за окръжност  $k(O, r)$  и  $AB$  е съответната му дъга. В  $\triangle AOB$  отсечката  $OM$  е височина и следователно ъглополовяща, откъдето  $\angle BOM = \angle AOM$ . Да забележим, че  $\angle BOM + \angle OBM = 90^\circ$  и  $\angle ABC + \angle OBM = \angle OBC = 90^\circ$ . Тогава  $\angle ABC = \angle BOM = 90^\circ - \angle OBM$ , но  $\angle BOM = \frac{1}{2} \angle AOB$  следователно периферният  $\angle ABC$  се измерва с половината от съответната му дъга  $\widehat{AB}$ .

Ст.1 Ст.2 Ст.3 Ст.4 Ст.5 НАЧАЛО

ЕКСПЕРИМЕНТИРАЙ

**II. Нека периферният  $\angle ABC$  е туп.** Точката  $D$  лежи на  $CB$  след точката  $B$ , а точките  $P$  и  $Q$  лежат на  $k$  и са съответно вътрешни на  $\angle ABC$  и  $\angle ABD$ . Сега  $\angle ABD$  е остър периферен ъгъл за  $k$  и се измерва с  $\frac{1}{2} \angle AQB$ . От тук следва, че

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ABD = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AQB = 180^\circ - \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{APB}) = \frac{1}{2} \widehat{APB}.$$

**III. Нека периферният  $\angle ABC$  е прав** следва  $\widehat{APB} = 180^\circ$ . Тогава градусната мярка на  $\angle ABC = 90^\circ$  е равна на половината от мярката на дъгата  $\widehat{AB}$ .

Фиг. 2

◇ винаги доказателството или решението на дадена задача започва от първоначален (възможно най-прост) чертеж;

◇ визуализацията става стъпка по стъпка, като в хода на работата се дава възможност за повторение (Фиг. 3);

◇ предоставена е възможност за връщане към първоначалния вид на чертежа;

◇ след протичане на конкретното решение или доказателство, на обучаемия се предоставя и възможност за експериментиране (Фиг. 4).

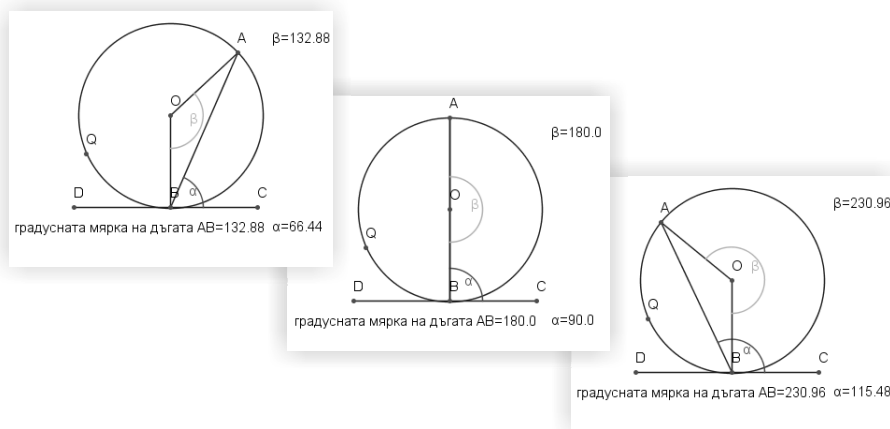
По този начин, ходът на всеки урок може да бъде моделиран индивидуално, съобразно обучаемите и конкретната ситуация.

В настоящия електронен учебник при представянето на всяка тема са включени три типа уроци: урок за нови знания (Фиг. 2), урок за упражнение (Фиг. 5) и урок за проверка на знанията, който е под формата на тест (Фиг. 6).

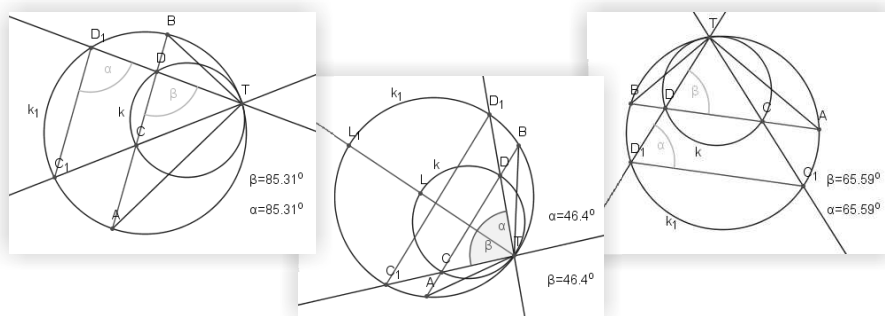
Всички теми са разработени аналогично. Като пример ще представим темата “Периферни и вписани ъгли”.

На Фиг. 2 е изобразен кадър от урок за нови знания. Тук чрез бутони (хиперлинкове), на динамичния чертеж се визуализира съответното учебно съдържание, разделено на отделни стъпки. Стъпките могат да бъдат показвани в подходяща последователност, а когато е необходимо може да се възстановява първоначалното положение на чертежа и да се пристъпва към експеримент.

Фиг. 5 съдържа кадри от следващия урок за упражнение. Тук чрез бутони (хиперлинкове) се визуализира на динамичния чертеж условието на задачата, основни-



Фиг. 3



Фиг. 4

те стъпки от решението и се дава възможност да се възстановява първоначалното положение на чертежа, както и да се пристъпва към експеримент.

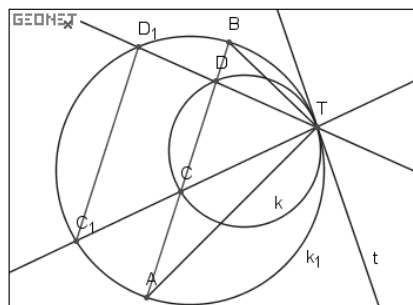
Именно въвеждането на активния изследователския подход в обучението е нещото, което отличава преподаването на математика посредством този продукт, от традиционното преподаване.

Уникална по своята същност е и тестовата система за проверка на знанията (Фиг. 6). Тя предоставя на потребителя богат набор от тестове, всеки от които включва от 8 до 16 въпроса и дава възможност за избор на един от три отговора. Към проверка се пристъпва след като бъдат попълнени всички въпроси. Оценката се изчислява в реално време и се извежда в отделен прозорец. Предоставя се и възможност за визуализация на резултатите. Посочват се въпросите, верните отговори и се показва кои въпроси са били сгрешени и на кои е отговорено правилно. Накрая се преминава към попълването на нов тест, който се избира по случаен начин от предварително введените по пет теста към всяка тема.

Представеният в статията електронен учебник е иновационен образователен соф-

**Задача 3.** Окръжностите  $k(O, r)$  и  $k_1(O_1, r_1)$  се допират вътрешно в точка  $T$ . Секуща пресича двете окръжности съответно в точки  $A, B, C$  и  $D$  ( $A, B \in k$ ;  $C, D \in k_1$ ). Ако  $CT \cap k_1 = C_1$ ,  $DT \cap k_1 = D_1$ , да се докаже, че:

- а)  $C_1D_1 \parallel AB$ ;  
 б) ъглополовящите на  $\angle ATB$  и  $\angle CTD$  съвпадат.



**Решение:** Нека построим общата допирателна  $MN$  на  $k$  и  $k_1$ .

а)  $\angle TDC = \angle MTC = \frac{\widehat{TC}}{2}$ ,

$\angle MTC_1 = \angle C_1D_1T = \frac{\widehat{TC_1}}{2}$ , но

$\angle MTC_1 = \angle MTC \Rightarrow \angle C_1D_1T = \angle CDT$

т.е.  $C_1D_1 \parallel AB$ .

б) Ако  $TL_1$  е ъглополовящата на  $\angle ATB$ , то  $\widehat{AL_1} = \widehat{L_1B}$ . Нека  $TL_1 \cap k = L$ . От а) следва, че  $\widehat{AC_1} = \widehat{BD_1}$ , тогава  $\widehat{C_1L_1} = \widehat{D_1L_1}$ , т.е.  $TL$  е ъглополовяща на  $\angle CTD$ .

Ст.1

Ст.2

НАЧАЛО

ЕКСПЕРИМЕНТИРАЙ

Фиг. 5

туерен продукт, предназначен за компютърно подпомогнато обучение. Той е адресиран към:

- ◇ учители по математика, информатика, информационни технологии, физика и други природо–математически дисциплини и към техните ученици;
- ◇ преподаватели в природо–математическите факултети и към техните студенти;
- ◇ специалисти по дидактика, методика на обучението по математика и по информационни технологии.

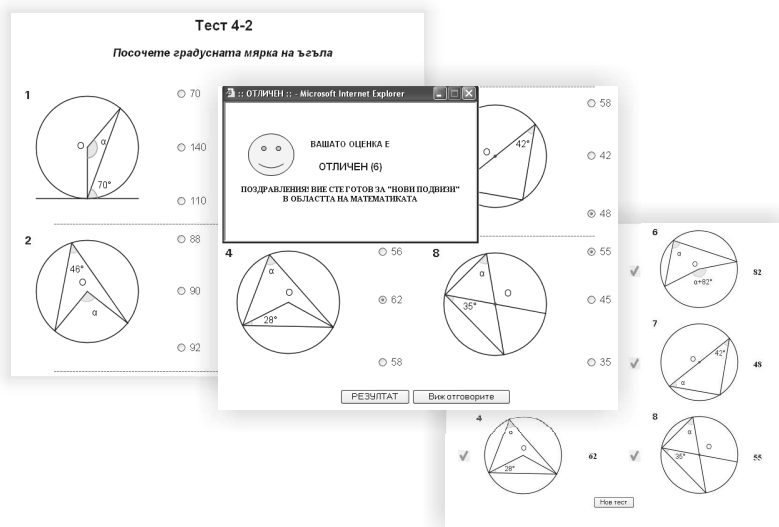
Реализираният дизайн, навигация и ясна структура го правят атрактивен и лесен за използване. Възможно е включването му във всеки от етапите на обучението:

- ◇ запознаване с понятия, факти и твърдения;
- ◇ усвояване на знания и умения;
- ◇ прилагане и усъвършенстване на придобитите знания и умения;
- ◇ създаване на дидактически материали.

Целта на авторите е използването на продукта да се съчетава по естествен начин с класическите форми на работа – използване на тетрадки, учебници, сборници и т.н. Същевременно, визуализацията в него – динамични графики, аплети и ефекти, и възможностите за експериментиране непосредствено и в реално време, са извън възможностите на “листа и молива”.

Методическите цели на Образователната среда са главно в следните посоки:

- ◇ повишаване качеството на преподаване и усвояване на учебния материал;
- ◇ повишаване интереса на учениците;
- ◇ осигурява възможност за активно участие на обучаемите в процеса на усвояване и натрупване на познания;
- ◇ възможност за индивидуализация при обучението.



Фиг. 6

Постигането на тези цели с помощта на образователен софтуер изисква разработването на специална методика, което е едно ново предизвикателство пред всички, занимаващи се с преподаване на математика.

В заключение може да кажем, че съчетанието Flash, HTML, JavaScript и **GEONEX** разкрива неподозирани възможности пред разработчиците на подобни среди да представят на потребителя продукт от най-високо качество.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Т. Тонова, В. Гушев, Е. Копева. Образователна среда за графично решаване на параметрични задачи. *Математика и информатика*, **5** (2005), 15–19.
- [2] Т. Тонова, В. Гушев, Е. Копева. Образователна среда за графично решаване на параметрични задачи – Графики на елементарни функции. *Математика и информатика*, **6** (2005), 4–8.
- [3] Т. Тонова, В. Гушев, Е. Копева. Образователна среда за графично решаване на параметрични задачи – Трансформации на графики на функции. *Математика и информатика*, **1** (2006), 10–15.
- [4] Т. Тонова, В. Гушев, Е. Копева. Образователна среда за графично решаване на параметрични задачи – Модул “Задачи”. *Математика и информатика*, **2** (2006), 9–18.
- [5] <http://geonext.de>
- [6] J. Todorow. Web-based Multimedia Technologies in Learning and Education. Conference “Art and Pedagogy”, 24.6.2003 – 25.6.2003, <http://todorow.bol.bg>
- [7] J. Todorow. Didactic Models and Web-Based Audio-Visual Technologies (November 2003), <http://todorow.bol.bg>
- [8] И. Тонов, И. Трендафилов, Р. Караджова. Математика 8 клас. Булвест 2000, София, 2001.

[9] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски. Математика 8 клас. Анубис, София, 1997.

Ангел Андреев Гушев  
Природоматематическа гимназия “Васил Друмев”  
ул. “Вела Благоева” №10  
5000 Велико Търново  
[www.pmgvt.org](http://www.pmgvt.org)  
e-mail: [angel\\_hg@abv.bg](mailto:angel_hg@abv.bg)  
[angel\\_gushev@yahoo.com](mailto:angel_gushev@yahoo.com)

Веселин Андреев Гушев  
Факултет по Математика и Информатика  
Софийски Университет “Св. Климент Охридски”  
бул. Джеймс Баучер №5  
1164 София  
[www.fmi.uni-sofia.bg/lecturers/edumi/v\\_gushev/](http://www.fmi.uni-sofia.bg/lecturers/edumi/v_gushev/)  
e-mail: [v\\_gushev@fmi.uni-sofia.bg](mailto:v_gushev@fmi.uni-sofia.bg)

## WEB-BASED NOTEBOOK OF MATHEMATICS FOR EIGHTH GRADE OF HIGH SCHOOLS

Angel A. Gushev, Vesselin A. Gushev

The didactic model is convenient tool for realizing of an optimal strategy of teaching activities and designing of learning modules with needed methodical competence and direct application to the learning practice. Using of computer-based lessons is of a great importance for the effectiveness and the quality of teaching in contemporary life.

Following the model of didactic modelling, a multi-language learning environment for teaching mathematics in eighth grade is created.

The base of it is the dynamic mathematical software **GEOMET**. It gives new possibilities for teaching and learning during mathematical lessons and presents new methods for visualization. Such effect is difficult to obtain when one apply traditional tools as blackboard and chalk.