

**ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕФЕКТИВНОСТТА НА  
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОБУЧЕНИЕ ПО  
КОМБИНАТОРИКА, ВЕРОЯТНОСТИ  
И СТАТИСТИКА В СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ  
(ЗАДЪЛЖИТЕЛНА ПОДГОТОВКА)**

**Елена Л. Каращранова, Евгения А. Стоименова**

Целта на настоящия доклад е да представи резултатите от проведено изследване на ефективността на експериментално обучение с използване на интерактивни обучаващи модули по комбинаторика, вероятности и статистика в средното училище (задължителна подготовка).

**1. Увод.** Проведеният педагогически експеримент е свързан с изследването на възможностите за съгласувано обучение по комбинаторика, вероятности, статистика и информатика. За целта на базата на изведени връзки между основни понятия от двете предметни области са разработени интерактивни обучаващи модули, целящи повишаване на ефективността на обучението по стохастика в средното училище. Заложените за изследване основни понятия по комбинаторика, вероятности и статистика са съобразени с ДОО по математика първо равнище.

**2. Методика на изследването.** Изследването е насочено към оценяване на възможностите на учениците от 10. и 11. клас за усвояване на основните понятия – комбинаторни съединения, вероятност, данни, емпирична вероятностна плътност, теоретична вероятностна плътност.

В основата на критериите, по които се извършва оценяването, е степента на усвояване на основните понятия, свързани с постигане на образователните цели и очаквани резултати, заложи в учебните програми по математика и информатика за 10. и 11. клас.

За оценка на резултатите от проведеното педагогическо изследване на базата на съдържателен анализ и експертни оценки са разработени дидактически системи от задачи, целящи да оценят степента на усвояване на основните понятия, заложи за усвояване в педагогическия експеримент. За всяко от понятията има три нива на усвояване – ниско, средно, високо, като нивото се оценява с резултатите от решаването на конкретна дидактическа “задача-компонента”. На таблица 1. по-долу са представени дидактическите системи от задачи за всяко от понятията:

Спецификата на учебното съдържание (изоморфност на задачите), която е една от трудностите при неговото усвояване, е изключително богата на възможности за разработване на различни по съдържание задачи, имащи един и същ модел за решаване, и позволява реализирането на необходимата вариантност на системите от

задачи за установяване на входното ниво, резултатите от обучението и отсрочената проверка на знанията и уменията на учениците.

За показатели са използвани срочните оценки по математика на учениците и относителният дял на учениците, достигнали съответната степен на усвояване на основните понятия.

понятия	ниска	средна	висока
<b>Комбинаторни съединения</b>	Може да изброява комбинаторни съединения с малък обем	Може да прилага формулите за комбинаторните съединения при зададен модел	Може да прилага комбинаторните съединения за решаване на задачи и да тълкува резултатите като възможност за избор
<b>Вероятност</b>	Може да пресмята вероятности при зададен модел	Може да използва комбинаторните съединения за пресмятане на класическа вероятност	Може да пресмята и сравнява вероятности и да използва получените резултати за вземане на решения
<b>Емпирична вероятностна плътност</b>	Може да групира данни и да пресмята числови характеристики за негрупиран данни	Прави връзка между вида на хистограмата, данните, честотните разпределения и ширината на интервалите	Може да свързва числовите характеристики с разпределението на данните

Таблица 1. Модел на дидактическа система от задачи

**3. Описание на експеримента.** Педагогическият експеримент е проведен с ученици от 10. и 11. клас от НХГ “Св. Св. Кирил и Методий”, гр. Благоевград, през учебните 2004/2005г. и 2005/2006г. Извадката за втората част на експеримента е формирана от общо 210 ученика.

Организационните трудности наложиха предварителна подготовка, включваща експериментиране на предлаганите модули с цел да се оцени възможността за най-ефективното им включване в реалния учебен процес. В резултат на проведените предварителни експерименти в часовете по математика (през учебната 2004/2005г.), където основно са включени елементи от комбинаторика, вероятности и статистика, се оказа, че единствената възможна форма на този етап е предлаганите модули да се използват само за демонстрации. Това несъмнено е полезно, но не решава същността на разглежданите проблеми. Натрупаният в предварителния експеримент опит послужи за подобряване на структурата на включените обучаващи модули и за подготовката и мотивирането на учителите, провели експерименталното обучение.

Реално експериментът бе проведен в часовете по ИТ, предвидени за изучаване на модула “Интегриране на дейности”, след като учениците са изучавали модула “Вероятности и статистика” в 10 и 11 клас в часовете по математика.

Учениците са разделени на две групи – контролна и експериментална. В контролната група са проведени обобщаващи уроци, в които обучаващите модули са използвани от учителите като помощен материал при годишен преговор върху това учебно съдържание. В експерименталната група освен това е предоставена възможност на учениците да работят с предлаганите модули върху предварително зададена

схема от задания. Процесът на усвояване на понятията комбинаторни съединения и вероятност е изследван в експеримента с ученици от 10 клас експериментална (ЕГ) и контролна (КГ) групи. Усвояването на понятието емпирична вероятностна плътност е изследвано с ученици от 11 клас – експериментална (ЕГ1) и контролна (КГ1) групи.

**4. Анализ на резултатите.** В таблица 2. са дадени основните числови характеристики за срочните оценки по математика на учениците от 10 и 11 клас в двете групи.

клас	група	Средна стойност	Стандартно отклонение	Коефициент на вариация	Стандартна грешка
10 клас	ЕГ	4.25	1.074	0.257	0.150
	КГ	4.37	1.70	0.268	0.159
11 клас	ЕГ1	4.02	1.179	0.293	0.159
	КГ1	4.08	1.089	0.267	0.164

Таблица 2. Числови характеристики за срочните оценки по математика

Описателните статистики показват, че по отношение на срочния успех, средните постижения на учениците от 10 и 11 клас в експерименталните и контролните групи са близки и имат слаба вариативност.

За проверка на хипотезата за наличие на статистически значими различия между средните стойности на срочните оценки по математика и дисперсиите в двете групи са приложени  $t$ -критерият на Стюънт и  $F$ -критерият на Фишер за независими извадки.

	Тест за равенство на дисперсиите		Тест за равенство на средните		
	$F$	$p$ -стойност	$t$	Степени на свобода	$p$ -стойност
Срочна оценка по математика 10 клас	0.719	0.398	-0.526	103	0.600
Срочна оценка по математика 11 клас	1.025	0.314	-0.254	103	0.800

Таблица 3. Резултати от теста за равенство на средните стойности

Резултатите показват, че при предположение за хомогенност на дисперсиите ( $p > 0,05$ ) не се наблюдава статистическа значимост на разликите в средния срочен успех по математика ( $p > 0,05$ ) на учениците в двете групи при ниво на доверие  $\alpha = 0,05$  за 10 и 11 клас.

За сравняване на резултатите от входния тест в двете групи е използван  $\chi^2$  критерият за проверка на хипотезата за сравняване на две емпирични разпределения. Той е удачен, тъй като учениците са групирани в три групи, в зависимост от степента на усвояване на основните понятия – ниска, средна и висока.

Резултатите от проверката на хипотезата за съвпадението на емпиричните разпределения на постиженията на учениците на входните тестове по комбинаторика, вероятности и статистика в експерименталните и контролните групи са представени на таблица 4.

Входен тест	комбинаторика	вероятности	статистика
$\chi_{\text{емп}}^2$	1.592	0.910	0.458

Таблица 4. Емпирични статистики

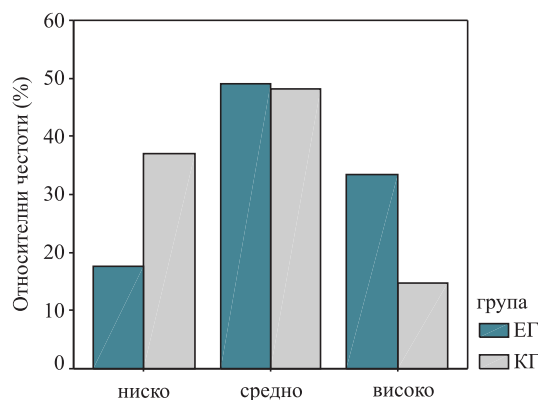
Тъй като теоретичната статистика  $\chi_{\text{теор}}^2(2) = 5,99$  е по-голяма от емпиричните за трите входни теста, то приемаме (нямаме основание да отхвърлим) основната хипотеза, че разпределенията на резултатите на входните тестове в контролните и експерименталните групи имат един и същ вероятностен модел.

С цел изследване на съгласуваността между оценките по математика и резултатите от входните тестове е използван  $\chi^2$  анализ за изследване на зависимостта между признаци, измервани на номиналната скала. След групиране на сročните оценки в три групи – до 3, 4 и 5, 6 и прилагане на  $\chi^2$  анализ се получава, че между сročните оценки по математика и резултатите на входните тестове (комбинаторика, вероятности и статистика) има наличие на статистически значима връзка.

	Коефициент на средно-квадратична спрегнатост	$p$ -стойност
комбинаторика	0.605	0.0001
вероятности	0.692	0.0001
статистика	0.368	0.007

Таблица 5. Резултати от  $\chi^2$  критерия за независимост

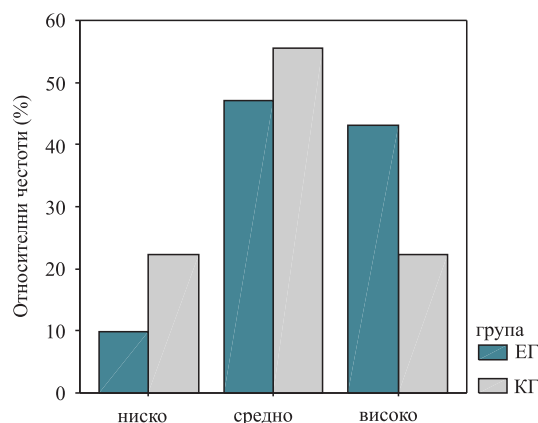
Резултатите от постиженията на учениците след провеждане на експерименталното обучение за нивото на усвояване на комбинаторните съединения са представени на фигура 1.



Фиг. 1. Заключителен тест върху комбинаторни съединения

От представените по-горе данни се вижда, че резултатите в ЕГ се подобряват. Разликите в структурата на постиженията на учениците в двете групи са статистически значими, защото емпиричната статистика  $\chi_{\text{емп}}^2 = 7,352$  е с по-голяма стойност от критериалната статистика  $\chi_{\text{теор}}^2(2) = 5,99$ .

Аналогични са резултатите след експерименталното обучение по вероятности. Конкретните резултати за контролната и експерименталната групи са представени на фигура 2.



Фиг. 2. Заключение тест върху вероятности

Прилагането на  $\chi^2$  критерия за проверка на хипотезата за сравняване на две емпирични разпределения (в КГ и ЕГ) показва наличието на статистически значими различия в структурата на постиженията на учениците след експерименталното обучение ( $\chi_{\text{емп}}^2 = 6,410 > \chi_{\text{теор}}^2(2) = 5,99$ ). Намалява относителният дял на учениците с ниска степен на усвояване на основните понятия и се увеличават относителните дялове на учениците в средната и високата степен на усвояване на основните понятия.

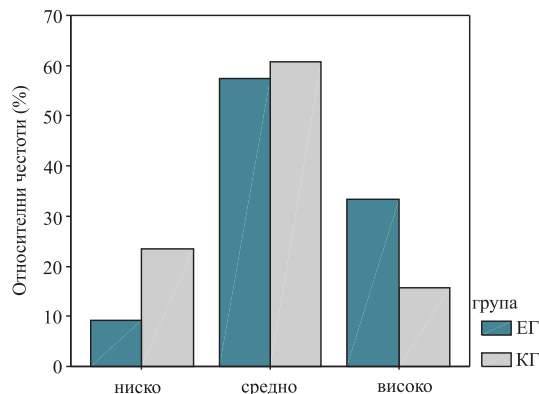
От казаното дотук може да се направи изводът, че статистически значимо подобрите резултати в експерименталните групи (на тестовете по комбинаторика и вероятности) се дължат на подобряване на резултатите на всички ученици, а не само на слабите или само на силните. Това потвърждава предимствата на използването на интерактивни обучаващи модули при преподаването на елементи от комбинаториката и вероятностите. Резултатите от заключителния тест по статистика са представени на фигура 3.

Наблюдава се намаляване на относителния дял на учениците с ниска степен на усвояване на основните понятия и се увеличават относителните дялове на учениците със средната и високата степен на усвояване на емпиричната функция на разпределение в ЕГ.

Тъй като емпиричната статистика  $\chi_{\text{емп}}^2 = 6.648$  е по-голяма от теоретичната  $\chi_{\text{теор}}^2(2) = 5.99$ , приемаме наличието на статистически значимо различие в структурата на постиженията на учениците след експеримента при ниво на съгласие 0,05.

За сравняване на статистическата значимост на разликите в относителните дялове на учениците в групите с високи постижения на заключителните тестове е използван z – критерият за сравняване на относителни дялове при независими извадки. На таблица 6 са дадени емпиричните характеристики за трите заключителни теста.

Сравняването на получените емпирични статистики с критериалната статисти-



Фиг. 3. Заклучителен тест върху емпирична вероятностна плътност

Заклучителен тест	Комбинаторни съединения	Вероятност	Емпирична вероятностна плътност
$z_{\text{емп}}$	2.226	2.026	2.10

Таблица 6. Емпирични статистики

ка  $Z_{\text{теор}}(0.05) = 1.96$  показва, че разликите в относителните дялове в групите от ученици с високи постижения са статистически значими. Това дава основание да приемем, като непротиворечаща на наблюденията, хипотезата за значимо повишаване на резултатите в усвояването на елементи от комбинаториката, вероятностите и статистиката след експерименталното обучение.

Изследването на психометричните свойства на всяка дидактическа система от задачи включва сравняване на тестовите резултати с предварително зададени експертни оценки [1]. Експертните оценки са определени съвместно с учителите, участвали в провеждането на експеримента. Таблица 7 съдържа реалния процент ученици, решили успешно съответната задача, и очаквания от експертите процент. Анализът е направен на базата на резултатите на учениците в експерименталната група.

Резултатите на учениците за задачите от първо ниво (задачи 1, 4 и 7) показват висок процент на успеваемост, малко по-висок от очаквания. Задачите от второ ниво (задачи 2, 5 и 8) също са с по-висока успеваемост, сравнително близка до очакваната [2]. Най-близко до очаквания процент на задачите от третото ниво са резултатите по статистика (вж. таблица 7).

Средната експертна оценка за всички задачи е 0.667, докато средният получен резултат е 0.705. Разликата от 0.038 е статистически незначима при ниво на значимост 0.05. Сравнението е реализирано с непараметричния критерий на Уилкоксон ( $p = 0.314 > 0.05$ ).

**5. Заключение.** От направения анализ можем да заключим, че резултатите в усвояването на основните стохастични понятия, заложили в експерименталното обучение, са значимо по-добри. Повишената активност на учениците и възможността да експериментират подпомагат усвояването на разглежданите основни понятия от стохастиката.

Тип задача		Реален процент	Очакван процент
комбинаторика	1 задача	82.4	80
	2 задача	74.5	70
	3 задача	43.1	50
вероятности	4 задача	94.1	80
	5 задача	88.2	70
	6 задача	41.2	50
статистика	7 задача	94.6	80
	8 задача	70.3	70
	9 задача	45.9	50

Таблица 7. Реални и очаквани проценти

По-добрите резултати в обучението по статистика са свързани, освен с прилагането на интерактивните обучаващи модули, и със спецификата на заложеното в учебните програми по математика учебно съдържание. Определено смятаме, че то трябва да се изучава по-рано, а в 11. клас учебното съдържание да е насочено към усвояване на връзката между емпирична и теоретична вероятност (например, аналитично и симулационно изследване на генератори на случайни числа) и неформално усвояване на понятието теоретична вероятностна плътност (например, разглеждането на модели на разпределения, имащи приложения в другите учебни предмети).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. БИЖКОВ. Педагого-психологическа диагностика, София, 2003.  
 [2] S. GROZDEV, E. STOIMENOVA. Psychometric Properties of Olympiad Test problems, 3<sup>rd</sup> Mediterranean Conference on Mathematical Education, Greece, 2003, 257–264.

Елена Лазарова Караштранова  
 Катедра Информатика  
 Природоматематически факултет  
 ЮЗУ “Неофит Рилски”  
 2700 Благоевград  
 e-mail: helen@aix.swu.bg

Евгения Асенова Стоименова  
 Институт по математика и информатика  
 Българска академия на науките  
 ул. “Акад. Г.Бончев”, бл. 8  
 1113 София, България  
 e-mail: jeni@math.bas.bg

#### ANALYSIS OF THE EFFICACY OF EXPERIMENTAL TEACHING ON COMBINATORICS, PROBABILITY AND STATISTICS AT HIGH SCHOOL

Elena L. Karashtranova, Eugenia A. Stoimenova

This paper presents results from the analysis of an experimental method for teaching statistics. Experimental interactive computer modules are developed and used for teaching combinatorics, probability and statistics at high school.