

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
*Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011*

**ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЕДИН КОМПЛЕКСЕН МОДЕЛ ЗА
РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ФУНКЦИИ ЧРЕЗ
ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЗНАНИЯ ПО ГЕОМЕТРИЯ**

Добринка В. Бойкина, Васил Б. Милушев

В статията е разгледано конкретно приложение на един модел за решаване на математически задачи от една област чрез прилагане на знания от друга област на училищния курс по математика.

Известно е, че във всяка задача има както обща информация (насочваща към прилагане на общи идеи и методи за решаване, реализацията на които обаче понякога е трудна), така и специфична информация [6]. Откриването на последната може да се използва за намиране на по-рационално решение. В публикациите по методика на обучението по математика ([1], [3], [4], [6], [7] и др.) са представени различни модели за решаване на определени типове задачи от училищния курс по математика. Така например, в [3] сме изследвали сложната система “идеален модел” – “материален модел” на дейността решаване на математически задачи (ДРМЗ) и взаимовръзките между компонентите ѝ. Това е осъществено на базата на етапите “разпределяне”, “асимиляция” и “определяване” при формиране на психически новообразувания и въз основа на функционалния анализ на задачата. Изследването на тази система от модели там сме направили за случаите, когато елементите на теоретичния базис на решението на задачата принадлежи на: а) математическата дисциплина, от която е задачата; б) други математически дисциплини. Освен това, въз основа на логическите модели на математическите знания и дейности, включително и на ДРМЗ, разглеждани (според [2]) съответно на атомарно, молекулярно и клетъчно равнище, в [7] сме конструирали комплексен модел, който съчетава случая а) със случая, когато една част от базиса на решението не е от същата математическа област **A**, от която е задачата **Z**, т.е. когато съществува теоретичен базис на **Z**, “ключовите” елементи на който принадлежат на друга математическа област **B**.

Този материален модел схематично се представя така:

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_4 \rightarrow M_5 \rightarrow M_6,$$

където:

— **M**₁ е модел на определена проблемна ситуация, построен със средства от областта **A** (**M**₁ е математическа задача **Z** от областта **A**);

— **M**₂ и **M**₃ са евентуални спомагателни модели на **M**₁, специфични за областта **A** (съкратен запис на текста на задачата **M**₁, представяне на съществени връзки между обекти на **M**₁ чрез таблици, схеми, чертежи и т.н.);

— M_4 е модел на M_3 (или на M_2 , или директно на M_1), при изграждането на който съществено се използват понятия и символи от математическа област B (т.е. M_4 е задача Z' от математическата област B , равносилна на задачата Z);

— M_5 – решение на задачата Z' (M_4) (от областта B), след проверка на верността му от гледна точка на теорията от областта B ;

— M_6 – решение на задачата Z (M_1) (от областта A), след проверка на неговата адекватност със съответната ѝ първоначална ситуация.

Основните (ключовите) преходи в процеса решаване на задачата Z , съответстващ на този материален модел, сме описали подробно в [7, с. 431–432]. Тук ще отбележим само главното:

I. Преход от M_1 към M_4 . За реализирането на този преход са необходими умения, които се изграждат в резултат на системна работа със задачи от вида Z , както и рефлексивни умения. Практиката показва, че тук на ученика помага най-вече доброто запомняне на конкретни факти (формули, правила, твърдения, теореми и др.), усвоени по-рано.

II. Преход от M_4 към M_5 . При този преход се прилага проверен на практика материален модел на процеса решаване на математическа задача в случая, когато елементите на теоретичния базис на решението ѝ принадлежат на същата математическа област, от която е задачата. По същество тук се използват задачи-компоненти на клетъчно равнище, които са усвоявани от учениците по-рано във времето и се намират в тяхната “зона на близко развитие” (ЗБР) или в тяхната “зона на актуално развитие” (ЗАР). Тогава схемата $M_4 \rightarrow M_5$, включваща задачите-компоненти, може да се разглежда като материален модел на процеса решаване на математическа задача в случая, когато нейната теоретична база се състои от елементи на математическа област B , от която е задачата.

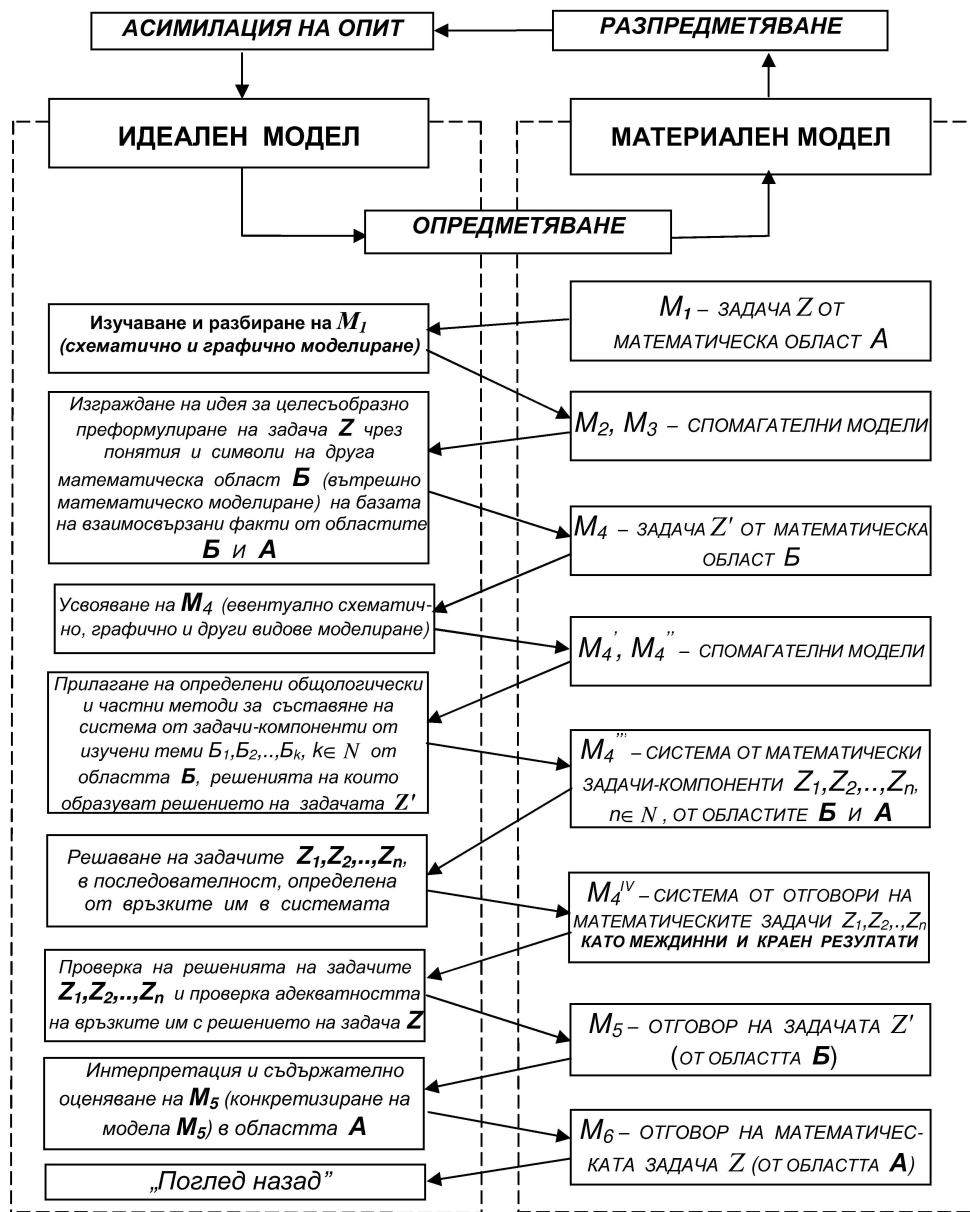
III. Преход от M_5 към M_6 . Това е етапът, при който се осъществява пренос на знания от модела към обекта, в случая – от модели със средствата на областта B към модели със средства от областта A .

Тук, за удобство на читателя, цитираме схемата на комплексния (идеално-материален) модел (фиг. 1) от [7, с. 433].

Когато моделът M_4 на задачата Z (т.е. задачата Z' от математическата област B) се явява традиционна, стандартна задача, тогава посоченият схематичен модел може да се опрости чрез пренебрегване на представения в детайли процес на решаване на стандартната задача, т.е. от схемата $M_4 \rightarrow M_4' \rightarrow M_4'' \rightarrow M_4''' \rightarrow M_4^{iv} \rightarrow M_5$ могат да отпаднат междинните стъпки на прехода от M_4 към M_5 .

По такъв начин може да се състави конкретен материален модел на процеса решаване на задача от дадена математическа област в случаите, когато е възможно тя да се моделира в стандартна задача от друга математическа област (например алгебрична задача, която допуска решаване с помощта на геометрични знания или обратно).

Целта на тази статия е да представим конкретно приложение на модела от фиг. 1 при решаване на задачи от темата “Функции”, като (за краткост) илюстрираме само компонентите на материалния модел чрез привличане знания по геометрия, при това в съответствие с рефлексивно-синергитичния подход [4]. Разглеждаме следната задача



Фиг. 1. Комплексен модел на дейността решаване на задачи от една математическа област с оператор, съдържащ знания от друга математическа област

Z: (M₁). Да се намерят най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$$

и стойностите на x , за които тя се достига.

I. Търсене на решение (в рефлексивно-синергетичен аспект).

Решаването на задачата чрез производна на функция (т.е. с използване на общата ѝ информация) води до диференциране на сложни ирационални функции и решаване на сравнително трудни ирационални неравенства. Това може да бъде мотив за запознаване на учениците с тъй нар. метод на моделиране за решаване на задачи. За целта може да се постави пред тях изискването да открият и оползотворят специфичната информация в задачата с оглед намиране на нейно решение с помощта на модел от друга област. При първа “среща” на учениците с такъв подход (смяна на модела) за решаване на задачи те попадат в неустойчиви състояния (“нелинейни” ситуации). Хаосът в такива случаи може да изиграе конструктивна роля за овладяване на този подход за търсене на решение, дори да съдейства за провеждане на интерактивно обучение – за да стигне до самоорганизация, ученикът трябва да провежда “нелинеен” диалог със самия себе си, с учителя, с останалите ученици. При подходящо организиране на съвместни изследвания, водещи до малки флуктуации, ученикът самостоятелно придобива съответни знания и умения, което допринася за развиване на сложната психологическа структура на неговата личност.

При избиране на алтернативни идеи и методи ентропията е по-малка, отколкото при “неизвестността”. Първата малка флуктуация може да бъде насочването към апробиране на известни евристични методи и идеи. “Успешен” метод се оказва раздробяването на задачата на подзадачи чрез целесъобразно разбиване на нейната област на части. Така например, лесно се установява, че при $x \leq 0$ е изпълнено $f(x) \geq f(0) = 2$. Следователно трябва да се изследва НМС на $f(x)$ при $x > 0$ и да се сравни тя с числото 2. Нека $x > 0$. Какво би могло да се моделира с $x > 0$ и $f(x)$ при решаване на неалгебрични задачи? С положителни реални числа обикновено се означават мерки на различни геометрични или физични обекти. Сега може да се използва в евристичен план холограмният принцип – частта трябва да съхранява в себе си информация за цялото. Така възниква въпросът “При какъв “първообраз” на модела $x > 0$ отделните части на израза, с който се задава функцията $f(x)$, както и самият израз имат смисъл, т.е. изразяват определени обекти?”. Не е трудно да се забележи, че ако $x > 0$ е дължина на отсечка, то изразът $\sqrt{1+x^2}$ е дължина на хипотенузата на правоъгълен триъгълник, чиито катети са с дължини 1 и x . Известно е, че в планиметрията обобщение на теоремата на Питагор се явява косинусовата теорема. Така се стига до твърдението, че изразът $\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ означава дължината на страна на триъгълник, на който другите две страни имат дължини 1 и x и косинусът на ъгъла между тях е равен на $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Развитието по-нататък на идеята за геометрично моделиране е тясно свързано с умението да се заменят алгебричните “управляващи” параметри с геометрични адекватни на тях. Това дава възможност за самоорганизация на решаващия, при която се налага актуализиране на съответните геометрични знания и умения.

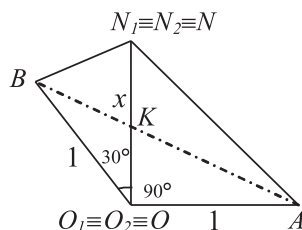
II. Решение. Отделните стъпки в схемата на фиг. 1 се явяват “малки флуктуации”, които предизвикват активиране на вътрешните фактори за целенасочено осъщест-

вяване на съответните преходи, поради което ученият се трябва да усвои техния смисъл и наредба. Въз основа на последователността на тези стъпки, решението на задачата може да се представи в следния вид.

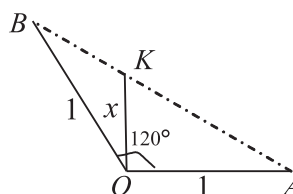
Спомагателни модели (M₂, M₃): При $x \leq 0$ най-малката стойност на $f(x)$ е числото 2. Нека $x > 0$. Тогава изразите $\sqrt{1+x^2}$ и $\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ могат да се моделират съответно с дължините на страните AM_1 и M_2B на $\triangle AM_1O_1$ и $\triangle M_2BO_2$, за които е изпълнено $AO_1 = 1$, $O_1N_1 = x$, $\angle AON_1 = 90^\circ$; $N_2O_2 = x$, $BO_2 = 1$, $\angle N_2O_2B = 30^\circ$.

Съставяне на съответна задача Z^I (M₄) от геометрията:

а) При данните от черт. 1 да се намери най-малката стойност на сумата $AN + NB$, като се варира дължината на отсечката ON .



Черт. 1



Черт. 2

Задачата е еквивалентна на следната:

б) При данните от черт. 1 да се намери дължината на AB .

Спомагателни модели на задача Z^I: (M₄^I): Дадено: ...

Да се намери: ...

(M₄^{II} – виж черт. 2):

Задачи-компоненти (M₄^{III}): В случая не се обособяват задачи-компоненти, понеже за намирането на AB може еднократно да се използва само една теорема (косинусовата). (За някои ученици, обаче, пресмятането на стойността на числовия израз, получен при прилагането на тази теорема, може да се окаже задача-компонента).

Система от отговори (M₄^{IV}): $AB = \sqrt{3}$.

Отговор на задача Z^I (M₅): Най-малката стойност на търсената сума е $AN + NB = \sqrt{3}$.

Отговор на задача Z (M₆): Най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$$

е числото $\sqrt{3}$, защото е по-малко от 2.

За намиране на стойностите на x , за които се достига тази най-малка стойност на разглежданата функция $f(x)$, трябва да се намери дължината на отсечката OK

от геометричната задача Z^I. Отг. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

При това решение не се използва понятието производна на функция, поради което задачата може да бъде предназначена и за ученици, които не са изучавали това понятие.

Аналогично се прилага моделът при решаване и на следните задачи:

Задача 1. Да се намери най-малката стойност на функцията:

- а) $f(x) = \sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2}$;
 б) $f(x) = \sqrt{1+x^2-x}\sqrt{3} + \sqrt{1+x^2-x}$ [8];
 в) $f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-2x+4}$;
 г) $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+1-x}\sqrt{2}$.

Задача 2. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на израза:

- а) $S = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+3)^2}$, ако $2|x|+|y|=2$ [8];
 б) $S = \sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2}$.

Опитът показва, че е полезно да се обучават учениците както да решават алгебрични задачи по алгебричен и геометричен начин (когато това е възможно), така и обратно – да решават геометрични задачи и по двата начина. С езика на теорията на моделирането може да се каже, че в процеса на решаване на такива многофункционални задачи се съставят както алгебрични, така и геометрични модели на едни и същи ситуации, извършват се преобразувания на тези модели. Детайлизирането на една ситуация от различни теоретични аспекти, използването ѝ многократно за съставяне на системи от равнотелни, макар и от различни области, задачи (какви-то са съответните математически модели) и тяхното решаване има голяма дидактическа стойност: овладяват се едновременно и в холистично единство математически знания и умения от няколко предметни области и същевременно се извършват съвместно математически дейности и интерпретации, което значително съдейства за развитие на мисленето. При това, ако е възможно разкриването на взаимовръзките на процесите на алгебричното и геометричното решаване, то не по-малко важен познавателен елемент тук се заключава в преходите от единия начин за решаване към другия, т.е. в “невидимите” на пръв поглед и трудно уловими при логическия анализ елементи на мисълта, които свързват двата процеса (алгебричния и геометричния) на търсене и откриване пътя на решаване на една и съща задача. Такъв ефект може да се постигне и при други варианти на прилагане на модела от фиг. 1. Разработеният модел за решаване на задачи от една област с инструментариума на друга област може да бъде пренесен и прецизиран и за решаване на задачи от произволен раздел (тема) от коя да е математическа дисциплина с помощта на средства – елементи от теорията на друг раздел или тема от същата математическа дисциплина. Именно този факт е в основата на богатите възможности, които някои задачи предоставят за решаване по сравнително голям брой различни начини. Например, в [5, с. 24–30] са представени три задачи с по пет решения, при част от които са използвани знания от различни теми или дисциплини.

По аналогичен начин могат да бъдат разработени модели и техни приложения за дейността решаване на задачи от която и да е математическа област със средствата от друга област.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. ГАНЧЕВ, Л. ПОРТЕВ, Б. БАЕВ, П. ТОДОРОВА. Методика на обучението по математика 5–7 клас. Пловдив, Изд. “Макрос”, 1997, 236 с.

- [2] Ив. Ганчев. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания). София, Модул-96, 1999, 198 с.
- [3] В. Милушев, Д. Френкев, Д. Милушева-Бойкина. Идеален и материален модели на процеса решаване на математически задачи. Юбилейна национална конференция с международно участие "20 години съюз на учените в България – клон Смолян", 20–21.X.2006 (електронно издание).
- [4] В. Милушев. Триадата дейности решаване, съставяне и преобразуване на математически задачи в контекста на рефлексивно-синергетичния подход. Автореферат на дисертация за получаване на научната степен "доктор на педагогическите науки" по научната специалност 05.07.03 (методика на обучението по математика), С., 2008, 61 с.
- [5] М. Н. НАЙДЕНОВ. Нова теория за качествена оценка на математическите задачи. Варна, 2005, 60 с.
- [6] Л. ПОРТЕВ, Н. НИКОЛОВ. Методика на обучението по математика. Пловдив, 1987.
- [7] Д. Г. ФРЕНКЕВ, В. Б. МИЛУШЕВ, Д. В. БОЙКИНА. Комплексен модел на процеса решаване на математически задачи от определен вид. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 429–435.
- [8] М. С. ЯКИР, В. Б. ПОЛОНСКИЙ, А. Г. МЕРЗЛЯК. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач (Методическое пособие). Киев, Лидер, 1993.

Добринка В. Бойкина
 Факултет по математика и информатика
 Пловдивски университет "Паисий Хилендалски"
 ул. Цар Асен № 24
 4000 Пловдив, България
 e-mail: boikina@uni-plivdiv.bg

Васил Б. Милушев
 Факултет по математика и информатика
 Пловдивски университет "Паисий Хилендалски"
 ул. Цар Асен № 24
 4000 Пловдив, България
 e-mail: milushev@uni-plivdiv.bg

AN APPLICATION OF A COMPLEX MODEL FOR SOLVING PROBLEMS WITH FUNCTIONS USING GEOMETRICAL KNOWLEDGE

Dobrinka V. Boikina, Vassil B. Milloushev

In the paper we present concrete application of a complex model for solving mathematical problems from one sphere applying knowledge of another one from the school course in mathematics.