МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

ЕФЕКТИВНО ОБУЧЕНИЕ ПО ОПТИМИЗАЦИОННИ МЕТОДИ ЧРЕЗ МОДЕЛИРАНЕ И РЕШАВАНЕ С MATLAB НА ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ

Стефка Караколева

Статията представя практически опит в преподаването на оптимизационни методи за студенти в Русенски Университет “Ангел Кънчев”. Обучението на студентите по линейно оптимиране се изгражда на основата на задачи, чието решаване включва етапите моделиране, решаване с програмна система MATLAB и анализ на полученото решение.

Въведение. В класическия курс по Оптимизационни методи за икономически специалности обикновено материалът се преподава на лекции и семинарни упражнения. Задачите, които се решават, имат малко на брой променливи, правят се една-две стъпки за илюстрация на алгоритъм или метод. Математическите модели често се дават в готов вид, без да се анализира и моделира реална задача и без анализ на получените резултати.

Този подход, имащ за цел икономия на време, води до прекалено теоретизиране на тази интересна и изключително полезна за бъдещите икономисти математическа дисциплина. От друга страна, не се отчита от какво имат нужда бъдещите икономисти – от изучаване на математическата теория или от умения да моделират, бързо да решават и успешно да анализират конкретни практически задачи.

В статията е представен практически опит при обучението на студенти по оптимизационни методи, при който теорията се преплита с решаване на задачи чрез използване на системата за математически изчисления MATLAB. Опитът на автора показва, че чрез поставяне на конкретни практически задачи [2, 3] и проследяване етапите на тяхното решаване – от съставяне на модела до анализ на решението, се засилва интересът на студентите към линейното оптимиране и се повишава ефективността на обучението. Разгледани са една задача от разкрояване и две задачи от Теория на графите, тяхното моделиране чрез апарата на целочислено линейно оптимиране и решаването им със системата MATLAB [5, 7, 8].

Моделиране и решаване с MATLAB. Първата тема при обучението по оптимизационни методи обикновено е “Моделиране на линейни оптимизационни задачи”. Задачите, които водят до такива модели са разнообразни и с широко приложение. Това убеждава студентите в практическата полза от дисциплината и ги мотивира да учат. Процесът на моделиране–постепенното въвеждане по пътя на логиката на променливите на модела, целевата функция и получения математически модел–силно впечатлява младите мислещи хора и ги учи на творчески подход.

Опитът ми показва, че повечето студенти се заинтригуват от получените модели и желаят веднага да решат задачата до край. За тях самото съставяне на модела, без решаването му, е нелогично. Така, по естествен път, се стига до системите за математически изчисления, които са създадени точно за това–бързо и успешно да решават поставени от нас задачи.

В производството често се налага да се получат заготовки с фиксирани размери от стандартни материали, от които след това се сглобяват изделия, състоящи се от различни по вид и брой заготовки. Обикновено изходните материали са стандартни пръти, летви, ленти или рула. При това разкрояване възниква задача за оптимизация с цел или минимизиране на неизползваемия остатък, или максимизиране броя на получените изделия, или минимизиране броя на нарязаните изходни материали.

Изучаваните от студентите модели са идеализирани – пренебрегва се дебелината на режещия инструмент. Алгоритъмът за получаване на различните варианти на разкрояване се демонстрира за конкретни задачи [2, 3]. За разкрояване в производствени условия е приложим алгоритъмът от [1].

Пример 1. Фирма за производство на амбалажна хартия произвежда стандартни рула с ширина 1.5 m и 2 m. Фирмата е получила поръчка за 150 рула с ширина 50 cm, 200 – с ширина 70 cm и 300 – с ширина 90 cm. Стандартните рула трябва да се нарежат така, че остатъкът след нарязването да е минимален. Да се изпълни поръчката като се състави линеен оптимизационен модел за определяне план на нарязване и да се реши модела с MATLAB.

Първи етап: *Варианти на разкрояване*

Таблица 1. Варианти

Ширина	Варианти на рязане									
	Руло (1.5 метра)				Руло (2 метра)					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$0.9\,m$	1	–	–	–	2	1	1	–	–	–
$0.7\,m$	–	2	1	–	–	1	–	2	1	–
$0.5\,m$	1	–	1	3	–	–	2	1	2	4
Остатък(m)	0.1	0.1	0.3	–	0.2	0.4	0.1	0.1	0.3	–
Променливи	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

Втори етап: *Математически модел*

Нека x_i е броят рула, нарязани по i-ти вариант, $i = \overline{1,10}$. От Таблица 1 се вижда, че парчета с ширина 0.9 m се получават при нарязване по варианти 1, 5, 6, и 7, като нарязването на едно руло по пети вариант дава 2 парчета от 0.9 m, а по останалите варианти - всяко нарязано руло носи по 1 парче от 0.9 m. Общият брой на парчетата от 0.9 m, получени след нарязването на x_i рула по i-ти вариант, $i = \overline{1,10}$, е $x_1 + 2x_5 + x_6 + x_7$. Като се вземе предвид, че са необходими 300 броя от $0.9\,m$, се получава ограничение $x_1 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 300$. Аналогично за другите два размера се получава $2x_2 + x_3 + x_6 + 2x_8 + x_9 = 200$ и $x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_7 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} = 150$. Общият остатък при нарязването на x_i рула по i-ти вариант, $i = \overline{1,10}$ е $0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_5 + 0.4x_6 + 0.1x_7 + 0.1x_8 + 0.3x_9$ (Таблица 1).

Окончателно, моделът на линейно оптимиране е:

$$\min Z = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_5 + 0.4x_6 + 0.1x_7 + 0.1x_8 + 0.3x_9,$$

при ограничения:

$$\begin{array}{lllllllllll} x_1 & & & & +2x_5 & +x_6 & +x_7 & & & & = 300, \\ & 2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & & +2x_8 & +x_9 & & = 200, \\ x_1 & & +x_3 & +3x_4 & & & +2x_7 & +x_8 & +2x_9 & +4x_{10} & = 150 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \;\; x_i \in \mathcal{Z} \text{ за } i = \overline{1,10}.$$

Трети етап: *Решаване на модела*

Решаването на модела се осъществява чрез системата за математически изчисления MATLAB [5, 7, 8]. Процедурата `linprog` изисква задачата да е за минимум на целевата функция при ограничения $A * x \leq b$ и $Aeq * x = beq$, с долна и горна граница за неизвестните съответно `lb` и `ub`.

Стартира се инструмента `optimtool` от командния прозорец на MATLAB. От падащия списък на полето `Solver` се избира процедурата `linprog`, в полето Algorithm–Medium scale-simplex. В командния прозорец се въвеждат данни за задачата:

```
>>Z=0.1*[1,1,3,0,2,4,1,1,3,0]
>>Meq=[1,0,0,0,2,1,1,0,0,0;0,2,1,0,0,1,0,2,1,0;1,0,1,3,0,0,2,1,2,4]
>>Beq=[300;200;150]
```

В полето `f` се задават коефициентите на целевата функция `Z`. Тъй като задачата има само ограничения-равенства, полетата `A` и `b` не се попълват, в полето `Aeq` се задава `Meq`, а в полето `beq` – `Beq`. В полето `lb` за долна граница за променливите се задава `zeros(1,10)`. След стартиране на процеса, се получава оптимално решение $Z_{\min}(0, 100, 0, 50, 150, 0, 0, 0, 0, 0) = 40\,m$. Следователно, минимален остатък се получава при нарязване на 100 рула по втори, 50–по четвърти и 150–по пети вариант.

Пример 2. Фирма за таксиметрови услуги планира основен ремонт на автомобилния парк през следващите пет години. Даден автомобил трябва да е в експлоатация поне една година, преди да се подложи на основен ремонт. В Таблица 2 са дадени цените за ремонт на един автомобил (в хил.лв.) в зависимост от времето за ремонт и броя на годините, през които автомобилът е бил в експлоатация [2].

Таблица 2. Цени за ремонт на един автомобил

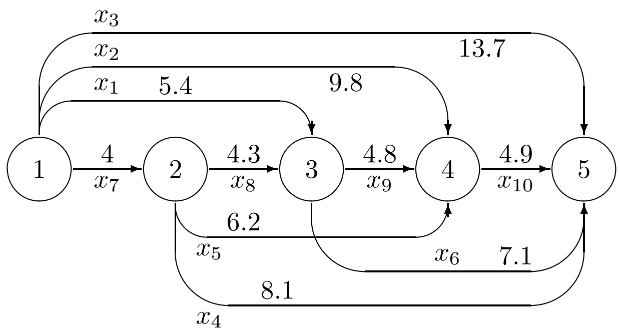
Година	1	2	3	4	5
1	–	4.0	5.4	9.8	13.7
2	–	–	4.3	6.2	8.1
3	–	–	–	4.8	7.1
4	–	–	–	–	4.9

Да се определи след колко години експлоатация трябва да се прави основен ремонт на даден автомобил, така че разходите да са минимални.

Първи етап: *Представяне на задачата във вид на граф*

На всяка година се съпоставя възел (Фигура 1). Дължината на реброто, свързващо два възела е равна на стойността на ремонта от Таблица 2.

Втори етап: *Най-къс път в графа*



Фиг. 1. Граф на задачата за таксиметровата фирма

Задачата за намиране на най-евтиния вариант се свежда до намиране на най-къс път между възлите 1 и 5 в графа (Таблица 3).

Таблица 3. Решение на задачата за таксиметровата фирма

Ит.	Разр.възли директно св.с неразрешени	Кандидати измежду неразр.възли	Тотално разстояние	Мин. разст.	Краен възел на най-къс маршрут	Път
1	1	2	4	4	2	$1 \to 2$
2	1	3	5.4	5.4	3	$1 \to 3$
	2	3	$4 + 4.3 = 8.3$			
3	1	4	9.8	9.8	4	$1 \to 4$
	2	4	$4 + 6.2 = 10.2$			
	3	4	$5.4 + 4.8 = 10.2$			
4	1	5	13.7			
	2	5	$4 + 8.1 = 12.1$	12.1	5	$2 \to 5$
	3	5	$5.4 + 7.1 = 12.5$			
	4	5	$9.8 + 4.9 = 14.7$			

Най-късият "път" в графа от Фигура 1 е $1 \to 2 \to 5$ с цена на ремонта 12.1 хил.лв. Това означава, че най-изгодно е всеки автомобил да минава през основен ремонт след две години експлоатация и да се бракува след пет.

Трети етап: Нека ребрата на графа са означени с x_i, $i = \overline{1,10}$ (Фигура 1).

Формулиране на задачата за най-къс път в граф като задача на линейно оптимиране:

$$\min f = 5.4x_1 + 9.8x_2 + 13.7x_3 + 8.1x_4 + 6.2x_5 + 7.1x_6 + 4x_7 + 4.3x_8 + 4.8x_9 + 4.9x_{10}$$

при ограничения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 1$$

$$x_7 = x_4 + x_5 + x_8$$

$$x_1 + x_8 = x_6 + x_9$$

$$x_2 + x_5 + x_9 = x_{10}$$

$$x_3 + x_4 + x_6 + x_{10} = 1$$

за $x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,10}$.

Забележка. При формулиране на ограниченията се спазва правилото: броят на ребрата, влизащи в даден възел е равен на броя на излизащите от него ребра. За първия (последния) възел сумата от влизащите (излизащите) ребра е равна на 1.

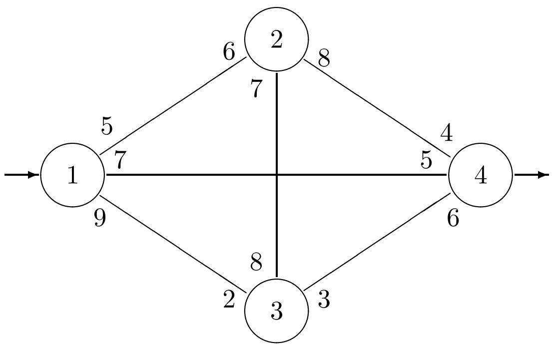
Четвърти етап: Полученият модел е Задача на целочисленото линейно оптимиране с 0–1 променливи, тъй като променливите на модела приемат стойности 0 или 1. Решаването с MATLAB става с процедурата `bintprog`. В командния прозорец на MATLAB се въвеждат командите

```
>>f=[5.4,9.8,13.7,8.1,6.2,7.1,4,4.3,4.8,4.9]
>>Aeq=[1,1,1,0,0,0,1,0,0,0;0,0,0,1,1,0,-1,1,0,0;1,0,0,0,0,-1,0,1,-1,0;
0,1,0,0,1,0,0,0,1,-1;0,0,1,1,0,1,0,0,0,1]
>>beq=[1,0,0,0,1]'
>>[x,FMIN]=bintprog(f,[],[],Aeq,beq)
```

Получава се решение $f_{\min}(0,0,0,1,0,0,1,0,0,0) = 12.1$ хил.лв, същото като това, получено чрез Таблица 3.

Пример 3. В салона на банка има четири гишета за обслужване на клиенти. На входа 1 стои служител, който насочва клиентите към останалите гишета. На гише 2 се обслужват дебитни и кредитни карти, на гише 3 се разглеждат искания за кредити, а касата е гише 4.

На Фигура 2 е даден капацитетът на потока на обслужващите звена за един час. Мениджърите на банката трябва да изчислят максималния поток от клиенти, обслужени в салона на банката за един час.



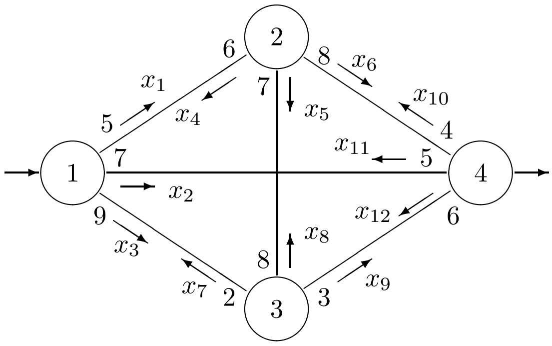
Фиг. 2. Капацитет на гишетата за един час

Първи етап: *Формулиране на задачата за максимален поток като задача на Линейно оптимиране*

За да се формулира задачата за максимален поток в граф като задача на линейно оптимиране [4, 2], се въвеждат 12 неотрицателни целочислени променливи x_k, $k = \overline{1,12}$ - поток по реброто (i,j); $i,j = \overline{1,4}$; $i \neq j$ (Фигура 3).

Модел на задача на целочислено линейно оптимиране за определяне на максималния поток y:

$$\max\ Z = y$$



Фиг. 3. Формулиране на задачата за максимален поток като задача на Линейно оптимиране

при ограничения

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= x_4 + x_7 + x_{11} + y \\
x_1 + x_8 + x_{10} &= x_4 + x_5 + x_6 \\
x_3 + x_5 + x_{12} &= x_7 + x_8 + x_9 \\
x_2 + x_6 + x_9 &= x_{10} + x_{11} + x_{12} + y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
0 \le y \le 21, & 0 \le x_1 \le 5, & 0 \le x_2 \le 7, & 0 \le x_3 \le 9, & 0 \le x_4 \le 6 \\
 & 0 \le x_5 \le 7, & 0 \le x_6 \le 8, & 0 \le x_7 \le 2, & 0 \le x_8 \le 8 \\
 & 0 \le x_9 \le 3, & 0 \le x_{10} \le 4, & 0 \le x_{11} \le 5, & 0 \le x_{12} \le 6,
\end{array}
$$

Втори етап: *Решаване на задачата за максимален поток с MATLAB*

Стартира се инструмента `optimtool` от командния прозорец на MATLAB. От падащия списък на полето `Solver` се избира процедурата `linprog`, в полето Algorithm–Medium scale-simplex. В командния прозорец се въвеждат данни за задачата:

```
>>f=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1],beq=zeros(1,4)'
>>Aeq=[1,1,1,-1,0,0,-1,0,0,0,-1,0,-1;1,0,0,-1,-1,-1,0,1,0,1,0,0,0
0,0,1,0,1,0,-1,-1,-1,0,0,1,0;0,1,0,0,0,1,0,0,1,-1,-1,-1,-1]
>>lb=zeros(1,13),ub=[5,7,9,6,7,8,2,8,3,4,5,6,21]
```

В полето `f` се задават коефициентите на целевата функция `f=-Z`. Тъй като задачата има само ограничения-равенства, полетата `A` и `b` не се попълват, попълва се `Aeq`, `beq`, `lb`, `ub`. След стартиране на процеса, се получава оптимално решение $f_{\min}(5, 7, 6, 0, 0, 8, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 18) = -18$. Следователно, максималният поток в графа е 18.

Заключение. Подходът, демонстриран в статията, показва как се използва успешно синтаксиса на системата MATLAB в процеса на обучение по Оптимизационни методи. Този подход ускорява процеса на усвояване на материала от студентите, провокира ги сами да съставят и решават математически модели на оптимизационни задачи, засилва интереса към математиката и им дава нов инструмент за решаване на задачи от практиката.

REFERENCES

[1] В. Илиев, М. Марков. Подготовка на данните за оптимизация на разкроя на прътов материал с MATLAB. International Conference on Computer Systems and Technologies, CompSysTech, 2004.

[2] Ст. Караколева. Изследване на операциите. http://ecet.ecs.uni-ruse.bg/else/subjects/_index.php?cid=9120913191910370, 2005.

[3] В. Павлов. Изследване на операциите в икономиката. Русенски Университет "А. Кънчев", Русе, 2009.

[4] Х. Таха. Введение в исследование операций, Том 1, 2. Мир, Москва, 1985.

[5] Й. Тончев. MATLAB 7. Техника, София, 2009.

[6] F. S. Hiller, G. J. Lieberman. Introduction to Operations Research. McGraw–Hill Publishing Company, Fourth Edition, New York, 1986.

[7] MATLAB *Reference guide*. The Math Works Ink., 2010.

[8] Optimization Toolbox 5. MATLAB User's Guide, The MathWorks Inc. 2010.

Стефка Романова Караколева
Русенски Университет "Ангел Кънчев"
Катедра Числени методи и статистика
ул. Студенска 8
7004 Русе, България
e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

EFFECTIVE EDUCATION OF OPTIMIZATION METHODS VIA MODELING AND SOLVING PRACTICAL PROBLEMS WITH MATLAB

Stefka Karakoleva

The article presents practical experience of teaching optimization methods for students in "Angel Kanchev" University of Ruse. Education in linear optimization methods is built upon tasks whose solution involves the following stages: modeling, solving with MATLAB software system and analysis of the solution. The approach demonstrated in the article shows how to use successfully the syntax of the MATLAB system in the education of Optimization methods. This approach accelerates the process of understanding the subject, increases the interest of mathematics and give the students a new tool for solving problems.