

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012
*Proceedings of the Forty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 9–12, 2012*

**НИКОЛАЙ ЛОБАЧЕВСКИ И ЯНОШ БОЯЙ – ПЪРВИ
СЪЗДАТЕЛИ НА НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ**

Грозьо Станилов

Николай Иванович Лобачевский е велик руски геометър, един от създателите на първата неевклидова геометрия, днес по право носеща главно неговото име – **Геометрия на Лобачевски**. Известният английски математик **Уилям Клифорд** го нарича „*Коперникът на геометрията*“. Геометричното дело на Лобачевски има революционен характер и е изиграло изключително голяма роля за развитието на математиката в частност на геометрията и на физиката за раждането на теорията на относителността на **Айнщайн**.



Н. И. Лобачевский

Николай Иванович Лобачевски е роден на 01.12 1792 г. в Нижни Новгород (Русия). Неговия дядо Максим Лобачевски по бащина линия е бил поляк. Баща му Иван Максимович Лобачевски е бил чиновник в геодезическия департамент в Нижни Новгород. Умира твърде млад още на 40 годишна възраст, оставяйки жена си в трудно материално положение. Николай Иванович Лобачевски е бил средният от тримата сина на фамилията. Майка им Прасковя Александровна е изпратила синовете си да учат в Казанската гимназия, която Лобачевски завършва през 1806 г.,

показвайки добри знания, особено по математика и езиците – латински, немски и френски. Голяма заслуга за интереса му към математиката е имал учителят му **Г. И. Карташевски**.

След завършване на гимназията тримата братя постъпват в наскоро открития през 1805 г. Казански университет, следвайки призива на университетските преподаватели, които в голямата си част са били бивши учители в гимназията. Лобачевски постъпва в университета през 1807 г. след повторен приемен изпит. През първите 3–4 години преподаването в университета е било на ниско ниво. След конфликт през 1806 г. били уволнени редица преподаватели, поради което преподаването и по математика започнало да се провежда от студенти. Ситуацията коренно се изменила, когато през 1808 г. е пристигнал професорът по чиста математика **Мартин Бартелс** от Германия, учител и приятел на великия **Карл Фридрих Гаус**. Той бил превъзходен педагог. Пристигнали с него и други немски учени.

В началото на следването си Лобачевски се интересувал повече от медицина. Но скоро след идването на Мартин Бартелс и под негово влияние той насочил интересите си към математиката. Като студент той се изявявал с добро поведение, но е имало и случай когато след пускане на самоделно направена ракета е бил наказан с карцер. В характеристиката му през 1811 г. може да се прочете, че се е проявявал с упорство, самомнение, неподчинение, а също така и с възмутителни постъпки, както и с безбожие. При завършване получил положителна атестация, в която се включвал и успеха по изучаваните дисциплини. При завършване на университета през 1811 г. е получил степента магистър по физика и математика и като отличник е бил оставен на работа в университета, като преди това е бил заставен да се покае за „глупаво поведение“ и да обещае, че по-нататък ще се държи примерно.

През 1811 г. се появява първата негова работа „Теория на елиптичните движения на небесните тела“, под влияние на астронома Литров (също немски учен, дошъл в Казан заедно с Бартелс), с когото са наблюдавали системно движението на една комета. Скоро след това под влиянието на Бартелс той започва да се занимава с класически работи на Гаус. През 1813 г. се появява работата му „Относно решаването на уравнението $x^m - 1 = 0$ “. Лобачевски се занимава активно и с преподавателска дейност, като чете лекции по аритметика и геометрия за студенти „чиновници“, които са без университетско образование, но желаещи да получат длъжност в 8 клас. Поради това още в началото на 1814 г., по ходатайство на Бартелс, той е назначен за „адюнкт“ (доцент) по чиста математика в университета. От тази година започва по-сериозна организационна и преподавателска дейност в Казанския университет. Бартелс става декан на едно от четирите отделения в университета (Нравствено-политическо, физико-математическо, словесно и докторско) и възлага на Лобачевски четене на лекции по „Теория на числата по Гаус и Лъжандр“. През 1816 г. Лобачевски е утвърден, макар и не гладко, на длъжност „извънреден професор“. Започва да чете по-сериозни курсове по аритметика, алгебра и тригонометрия, равнинна и сферична геометрия, диференциално и интегрално смятане по Монж и Лагранж. Той участва и активно в особен комитет „за разглеждане на оплаквания на студенти от началства за причинени им грубости“.

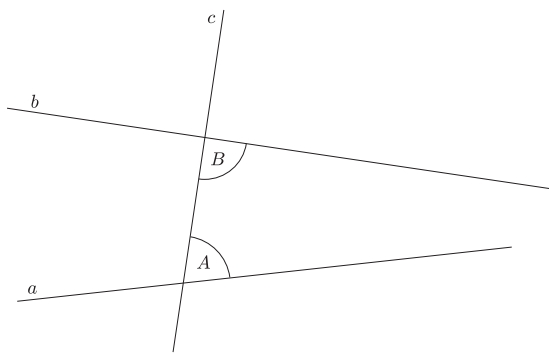
През 1819 г. настъпват големи промени в Казанския университет. Те са свързани с ревизия на цялостната дейност на университета от държавния деятел Михаил Магницки, който дал крайно отрицателно становище за университета с предложение

да се закрие. Похвала е имало само за физико-математическия факултет. Император Александър I отклонил това предложение, но назначил Магницки за попечител на окръга и да „оправи“ университета. Последният уволнил 9 професора, въвел строга цензура в университета включително контрол в четенето на лекции. Бартелс и други чуждестранни учени напуснали университета. Декан на факултета става младият едва 28 годишен Лобачевски.

Започват години на огромна бляскава дейност за Лобачевски. Той чете лекции по математика, астрономия, физика. Поставя в ред библиотеката, музея, физическия кабинет, създава обсерватория. Изпълнява и задачата за съблюдаване на благоденството на всички студенти в университета. Магницки го предлага за награждаване с орден „Св. Анна“, което става през 1824 г. Но скоро отношенията между двамата се влошават. Магницки получава доноси за проява на самонадеяност на Лобачевски и на отсъствие на религиозна набожност. А всъщност Лобачевски често проявява непокорство и възстава против произвола на Магницки. През 1826 г. нещата се оправят частично, тъй като Магницки е уволнен за злоупотреби и предаден на съд. На негово място идва М. Н. Мусин-Пушкин, бивш възпитаник на Казанския университет. Отношенията между двамата са добри, което укрепва авторитета на Лобачевски. И още през 1827 г. 35 годишния Лобачевски е избран за ректор на университета (при избора 11 да, 3 не).

Още като студент Лобачевски прави опити за доказване на **Петия постулат на Евклид**. Последният може да се формулира така:

Ако при пресичане на две прави в една равнина с трета права, сборът от ъглите от едната страна на пресичащата права е по-малък от два прави ъгъла, то правите се пресичат от онази страна на правата, в която този сбор е по-малък от два прави (Фиг. 1):



Фиг. 1. Ако $\sphericalangle A + \sphericalangle B < \pi$, то правите a, b се пресичат надясно от правата c .

През 1824 г. той подготвя учебник по геометрия, който е отхвърлен от академик Фус, поради това, че Лобачевски не само е използвал метричната система за измерване, а и повече заради това, че в силна степен се отклонява от евклидовия канон. В тези години той активно развива своите идеи за Новата си, наричана от него *Въображаема геометрия*. И като първа проява на идеите му се явява неговия доклад под заглавие „Сбито изложение на Началата на геометрията“, направен

на 23.02 1826 пред Научното тяло на Казанския университет. Тази дата се счита за рождена на геометрията на Лобачевски. В него той отхвърля верността на петия постулат на Евклид и приема верността на следната аксиома, наричана **аксиома на Лобачевски**:

През точка, нележаща на дадена права, съществуват поне две прави (в равнината на точката и правата), които не пресичат дадената права (Фиг. 2).

На тази фигура е осъществен модел на геометрията на Лобачевски върху повърхнината на прост хиперболоид. На него през точката M , нележаща на „правата“ D , минават „правите“ d_1 , d_3 , които не пресичат „правата“ D . В този модел „права“ е евклидова хипербола.

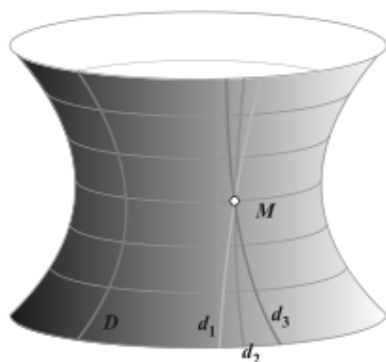
Докладът на Лобачевски е посрещнат от колегите му твърде хладно, скептично, по-скоро иронично. Известно е, че по време на доклада му, големият руски математик **М. Г. Остроградски** пошупва на ухото на свой колега следната фраза: „Ну, погледнете, наш Николай Иванович (Лобачевский) немножко сопёл с ума“.

Пренебрежителното отношение на колегите му, не обезсърчили Лобачевски. Той с огромна енергия се заема с разработването на своята геометрия. Предвид и на огромната му дейност за укрепването на университета, той е избран за ректор през 1833 г. за трети път (при избор с 9 да и 7 не). Лобачевски е бил в продължение на 20 години непрекъснато ректор на Казанския университет.

През 1832 г. се оженил за Варвара Мойсеева, която е била 20 години по-млада от него. Имали са поне 7 деца.

По инициатива на Лобачевски от 1834 г. започва издаването на журнала „Учёных записок Казанского университета“, което продължава и сега. В него той публикува своите изследвания.

За огромната си преподавателска и административна дейност Лобачевски е награждаван многократно и то с високи отличия. Ще споменем само следното: през 1836 г. руският император Николай I при посещението си на Казанския университет, след като е останал изключително доволен от развитието на университета, е



Фиг. 2



Фиг. 3

наградил Лобачевски с орден „Света Анна“, който му давал право на потомствено дворянство. През 1838 г. му е даден герб (фиг. 3) за заслуги в службата и науката и му е подарено дворянство.

Накратко за публикациите на Лобачевски:

През 1826 г. Лобачевски представя доклада си за печат на френски език в списанието „Записки на физико-математическото отделение“, но изданието е пропаднало и трудът му не е намерен. През 1829 г. в списанието Казанский вестник е публикуван труда му „О началах геометрии“, което се приема за първата публикация в света по геометрията на Лобачевски. Този труд е представен от Казанския университет в Академията на науките (Петербург) през 1832 г. и получава от академик Остроградски отрицателна оценка. В ироничен стил той признава, че нищо не е разбрал от книгата, освен два интеграла, единият от които бил сбъркан. Впоследствие се оказва, че Остроградски е сбъркал. В средите на математическите кръгове се разпространявала веста за „фантазиите“ на Лобачевски. Врѣх на всичко това е появилият се пасквил в журнaлa „Ф. Булгарин“ озаглавен „Син на отечеството“, в който Лобачевски е осмиван до краен предел. На Лобачевски не е дадена възможността да се защити. Но всичко това не спряло Лобачевски. Скоро през 1835–1838 г. публикува в „Учёных записках“ двете си важни статии: „Въображаема геометрия“ (на френски) и „Новые начала геометрии с полной теорией параллельных“. Първата от тези статии веднага излиза от печат и в авторитетния Берлински журнал на Крел.

През 1840 г. Лобачевски прави решителна крачка – публикува на немски език в малката издателска къща на С. Fincke неголямата си книга (61 стр.) „*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*“. Още същата година следва силно отрицателно становище отпечатано в авторитетно немско списание, от автор подписал се с псевдонима 140. Гаус открива тази книга и скоро има два екземпляра. Следва мълниеносна слава за Лобачевски. Макар, че в списания Гаус нищо хвалебствено не е писал за него, все пак той изиграва огромна роля за признаването на Лобачевски. Той веднага предлага на Гьотингенското Кралско Научно Общество (прототип на съвременните академии на науките) да избере Лобачевски за чуждестранен член-кореспондент като един от превъзходните математици на Русия. И това става още през 1842 г. Това е единственото пожизнено признание за Лобачевски. През 1846 г. Гаус пише на приятеля си Г. Шумахер – виден астроном по онова време: „Вие знаете, че аз вече 54 години (от 1792, точно тогава е роден Лобачевски), споделям тези възгледи ... аз не намерих нищо ново в съчинението на Лобачевски. Но Лобачевски е следвал не по моя път, изпълнено е от него с голямо майсторство, в истински геометричен дух“. Следват преводи на съчинението на Лобачевски от авторитетни френски издателства, отново на немски и няколкократно на английски в САЩ, както и на руски в „Математически сборник“.



Я. Бояй

Янош Бояй е забележителен унгарски математик. Роден е на 15.12.1802 г. в Коложвар (на немски Клаузенбург, днес Клуж-Напока, Румъния). Тогава този град е принадлежал на Австро-Унгария. Баща му Фаркаш Бояй е бил преподавател по математика, физика и химия, впоследствие и професор по математика в колеж. Янош Бояй се изявил като даровитото дете. Още на 13 години, благодарение на помощта на баща си, владее Диференциалното и интегрално смятане и няколко езика, свири отлично на цигулка и композира.

Янош Бояй получава математическо образование във Военно-инженерната академия във Виена. През 1823 година е произведен в офицер и изпратен в крепостта Темешвар (днес Тимишоара, Румъния). В самота и като разполага с много свободно време, Бояй се увлича по геометрията и по-специално по проблемите за успоредните прави, които в продължение на години са занимавали и неговия баща, но без успех. През 1825 г, едва 23 годишен, осъзнава недоказуемостта на Петия постулат на Евклид въз основа на останалите аксиоми на евклидовата геометрия,. Това го навежда на мисълта за възможността да се построи нова геометрия, независеща от този постулат. В писмо до баща си Янош пише *„Още не съм постигнал целта си, но получих забележителни резултати — от нищо създадох нов свят“*. Баща му е решително против. Той му пише: *„Тази ваша работа може да ви лиши от всичкото ви свободно време, от вашето здраве, от вашата почивка, както и да ви лиши от всяка радост на живота. Това е черна пропаст, погълнала хиляди титани като Нютон. . .“* Самият баща Фаркаш Бояй е правил многократни опити за доказване на Петия постулат като грешките му са откривани от Гаус, с когото са били приятели от студентските години. Въпреки пламенните молби на бащата да се откаже, Янош Бояй продължава и развива своите идеи. Предполага се, че още през годините 1820–1823 Янош Бояй завършва своя трактат.

В допълнение да посочим, че Янош Бояй е владеел 9 езика, включително китайски и тибетски, бил отличен танцьор, никога не е пил и пушил.

През 1830 г. бащата съставя сборник от свои лекции по математика с намерението

да ги публикува. За около една година той не успява да събере необходимите средства, докато Янош не го убеждава да приеме от него пари за отпечатването, като в приложение добави към лекциите и своя собствен ръкопис. И до днес това издание е известно под името „Апендикс“, въпреки че самият сборник статии е издаден с названието „Тентамен“. Пълното заглавие на трактата на Бояй гласи: „Приложение, съдържащо науката за пространството, за абсолютната истина, не зависеща от истинността или неверността на Петия постулат на Евклид“. Той е публикуван през 1831 г.

Когато Фаркаш Бояй моли своя приятел Гаус за мнение върху труда на Янош, Гаус високо го оценява. Той пише на свия приятел Херлинг, че е получил от Бояй забележителна работа и че счита нейния автор (Янош Бояй) за „гений от най-висок ранг“. Обаче Гаус оспорва първенството на научните му резултати. Самият Гаус бил достигнал до тези резултати още в началото на века, но така и не се осмелил да ги публикува, „защото повечето хора няма да разберат за какво става дума“. Отговорът на Гаус предизвиквал силно разочарование и гняв у Бояй. Известно време той дори вярва, че великият математик си приписва заслугите му, и това личи от неговата кореспонденция и архива му.

Бояй обаче не знае, че почти същите резултати в областта на неевклидовата геометрия постига и един друг голям математик – Николай Лобачевски, с когото са работили успоредно във времето. Изглежда исторически Бояй е създал по-рано от Лобачевски своята нова геометрия, но по-късно е публикувал резултатите си. Лобачевски обаче още през 1826 г. докладва резултатите си пред математическата общност в университета в Казан, а през 1829 г. ги публикува. Бояй научава това едва през 1848 г., когато прочита излязлата на немски език през 1840 г. книга на Лобачевски „Геометрични изследвания върху теорията на успоредните прави“. Това е втори тежък удар за Бояй, който до този момент продължава да вярва в приоритета си. Цитирането на първата публикация от 1829 г. напълно му отнема възможността за това. Той започва да учи руски език, за да се запознае в оригинал с трудовете на Лобачевски, изчита ги прецизно, посочвайки някои дребни неточности, но като цяло справедливо оценява работата му и нарича изводите му гениални.

Разочарованията, трудният самотен живот и напредналата възраст на Бояй оставят отпечатъка си и вдъхновението го напуска. До края на живота си Бояй продължава да се занимава с математика, но не постига съществени резултати, като една от причините е и че в изолацията си не успява да следи новостите в бурно развиващите се области на алгебрата и анализа. Ръкописите му в обем от над 20 000 страници са изучени и оценени едва след смъртта му през 1860 г.

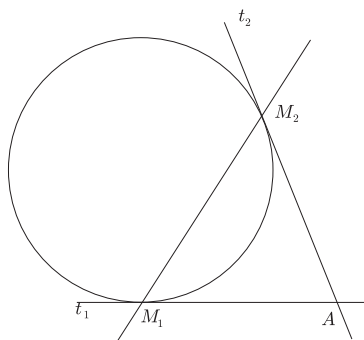
Заслужава да се отбележи и факта, че съчинението на Бояй е написано на латински език в твърде особен, негеометричен стил. Означенията са необичайни. Съчинението е трудно читаемо.

Лобачевски както и Бояй са починали непризнати, не доживяли до тържеството на своите идеи. Скоро ситуацията коренно се изменила. През 1854 година големият немски математик **Бернхард Риман** публикува работата си под заглавие „*Върху хипотезите, стоящи в основата на геометрията*“, с която слага началото на нова ера в развитието на геометрията. Той създава широко използваната днес концепция за **риманови геометрии** и **риманови пространства**, благодарение на които днес

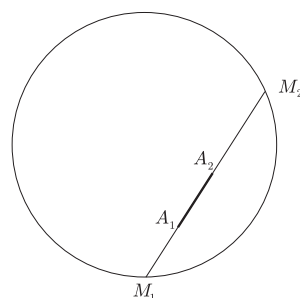
геометрията се радва на изключителен разцвет. Голяма роля за признаването на идеите на Лобачевски са изиграли работи на швейцарският геометър **Е. Белтрами** (1868), както и моделите на геометрията на Лобачевски, дадени от **А. Пуанкаре** (1883), **Ф. Клайн** и **У. Кейли**. От важно значение е и работата на Ф. Клайн (1872) „Ерлангенска програма“. Оказало се, че геометрията на Лобачевски влиза в последната схема както и, че е твърде частен случай от концепцията на Риман. Последва създаването на Теорията на относителността от **Алберт Айнщайн**.

Любопитно е да се отбележи следния факт: унгарските математици говорят за **геометрия на Бояй**; германците твърде често употребяват термина **геометрия на Гаус** без да могат да цитират за това Гаус; в цял свят се говори за **геометрия на Лобачевски**, понякога **геометрия на Лобачевски-Бояй**, както е възприето и у нас.

Основни факти от геометрията на Лобачевски. Най-напред ще изградим модела на Кейли-Клайн на геометрията на Лобачевски, но въз основа на проективната геометрия. В разширената евклидова равнина се разглеждат онези проективни преобразувания (колинеации), които запазват кръг с радиус R .



Фиг. 4



Фиг. 5

Под „точка“ се разбира вътрешна точка. „Права“ в този модел се нарича евклидова хорда в този кръг (Фиг. 4). Дължина $d(A_1, A_2)$ на отсечката A_1A_2 се дефинира по следния начин (Фиг. 5):

$$d(A_1A_2) = \frac{\rho}{2} \ln |\delta|,$$

където δ е двойното отношение: $\delta = (A_1A_2M_1M_2)$, а ρ е произволна положителна константа. Затова за разстояние се получава следната формула

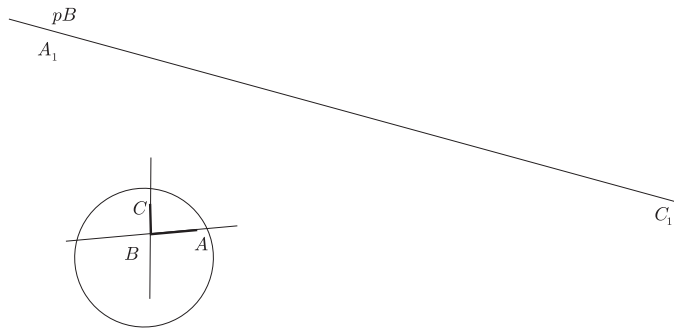
$$\cosh \frac{d}{\rho} = \frac{|(A_1, A_2)|}{\sqrt{(A_1, A_1)(A_2, A_2)}},$$

където $(A, B) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ е скалярно произведение на точките $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Понятието ъгъл се дефинира както в евклидовата геометрия (фиг. 6):

Мярката α на ъгъла ABC се дава с формулата

$$\cos \alpha = \frac{|(A_1, C_1)|}{\pm \sqrt{(A_1, A_1)(C_1, C_1)}},$$

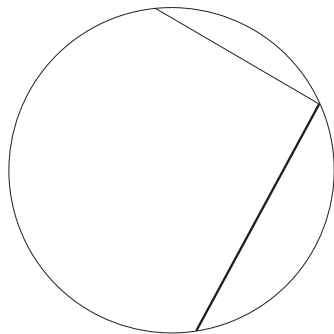


Фиг. 6

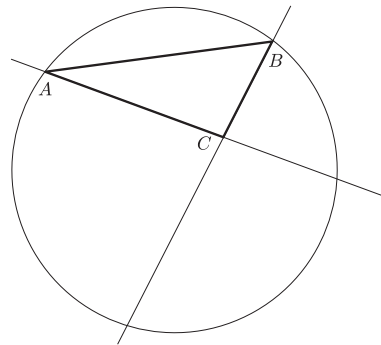
където плюс (+) се взема когато ъгълът е остър и минус (-), когато ъгълът е туп. Тук A_1, C_1 са полюсите съответно на правите (лъчите) BA, BC относно окръжността.

„Прав ъгъл“ се дефинира чрез свойството на полюс и поляра: един ъгъл се нарича прав когато полюсът на едното му рамо лежи на другото му рамо. От последната формула следва, че мярката на прав ъгъл е $\pi/2$.

Прави, които нямат обща (вътрешна) точка, а имат обща контурна точка се наричат паралелни прави (фиг. 7):



Фиг. 7



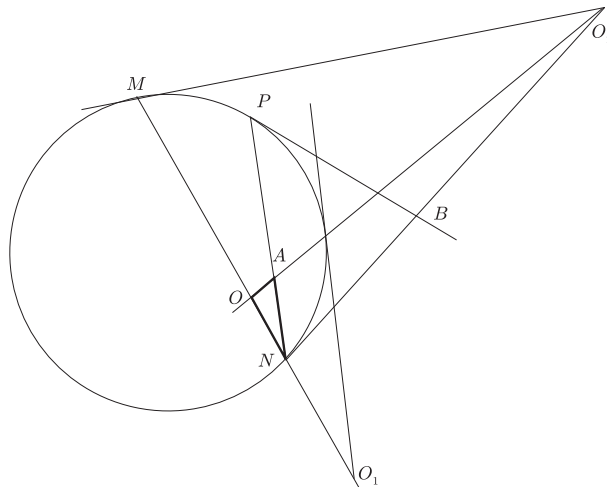
Фиг. 8

През точка C минават двете паралелни прави CA, CB на правата AB (фиг. 8).

Ако O е петата на перпендикуляра на точката върху правата MN (ъгълът при точката O е прав), разстоянието D на точката A до правата MN е дължината $d(A, O)$ на отсечката AO : $d = d(A, O)$. Ъгълът $\angle OAN$ (Фиг. 9) се нарича **Ъгъл на паралелността, съответен на разстоянието d** и се означава с $\pi(d)$. В сила е следната формула за ъгъла на паралелността:

$$\cosh\left(\frac{d}{\rho}\right) = \frac{1}{\sin \pi(d)}.$$

В евклидовата геометрия той е прав. Оттук следва, че евклидовата геометрия се получава когато $\rho \rightarrow \infty$. В геометрията на Лобачевски е в сила формула за сбора



Фиг. 9

от ъглите на триъгълник и неговото лице:

Ако $S(\triangle ABC)$ е лицето на $\triangle ABC$ чийто ъгли са α, β, γ , то в сила е равенството (Лоб.)

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma) - \pi}{S(\triangle ABC)} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

От тук следва, че евклидовата геометрия се получава когато $\rho \rightarrow \infty$.

Ако се разглежда равнината на Лобачевски като една повърхнина, то за нейната гаусова кривина K се получава формулата

$$K = -\frac{1}{\rho^2}.$$

Лицето S на кръг с радиус R се дава с формулата

$$S = 2\pi\rho^2 \left(\cosh \left(\frac{R}{\rho} \right) - 1 \right),$$

а дължината l на окръжност с радиус R се дава с формулата

$$l = 2\pi\rho \sinh \left(\frac{R}{\rho} \right).$$

Както и в евклидовата геометрия следва резултата, че производната на лицето относно радиуса на кръга, е равна на дължината на съответната окръжност.

От тези две формули следва, че когато $\rho \rightarrow \infty$ се получават съответните формули от евклидовата геометрия.

За правоъгълен триъгълник с катети a, b и хипотенуза c е в сила зависимостта

$$\cosh \left(\frac{c}{\rho} \right) = \cosh \left(\frac{a}{\rho} \right) \cosh \left(\frac{b}{\rho} \right),$$

от която когато $\rho \rightarrow \infty$ се получава питагоровата теорема в евклидовия случай.

Така установихме, че *евклидовата геометрия е граничен случай на геометрията на Лобачевски.*

Накрая да споменем за още една геометрия, наричана понякога **елиптична гео-**

метрия. Тя се реализира върху сфера, на която се идентифицират всяка двойка диаметрално противоположни точки. Ролята на права се изпълнява от голяма окръжност. В тази геометрия през всяка дадена точка, нележаща на дадена права, не съществува непресичаща я права, т.е. няма успоредни (паралелни прави). Ако $S(\triangle ABC)$ е лицето на $\triangle ABC$ чийто ъгли са α, β, γ , то в сила е следната формула:

(Рим.)
$$\frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{r^2},$$

където r е радиусът на сферата. Тя е създадена от Риман (далеч след Лобачевски).

Оттук следва, че когато $r \rightarrow \infty$ се получава евклидовата геометрия. Следователно:

Евклидовата геометрия е граничен случай на геометрията на Лобачевски–Бояй (наричана понякога **хиперболична геометрия**) и на елиптическата геометрия.

Ще завършим със следната мисъл на Лобачевски, с която той започва своето гениално съчинение “Геометрични изследвания по теория на паралелните прави”:

“В геометрията аз намерих някои непълноти, които са породени от това, че тъй като тя не преминава в анализ, тази наука не е прекрачила прага на онова състояние, в което я е оставил Евклид”.

Благодарение на този нов подход в геометрията, тя се радва на стабилен разцвет.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] <http://bg.wikipedia.org>, Лобачевски Николай Иванович.
- [2] <http://bg.wikipedia.org>, Янош Бояй.
- [3] <http://bg.wikipedia.org>, Фаркаш Бояй.
- [4] Г. Станилов. Лобачевски, Бояй – Неевклидова геометрия. ДИ Наука и Изкуство, София, 1984 (превод от немски и руски).
- [5] Г. Станилов. Геометрия на Лобачевски. <http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent>.
- [6] Л. К. Туттаев. Геометрия Лобачевского, Проективная модель, Издателство Белгосуниверситета им. В. И. Ленина, Минск, 1959.

Грозьо Станилов Иванов
Катедра по геометрия
Факултет по математика и информатика
Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Бул. Дж. Баучер № 5
1164 София, България
e-mail: stanilov@fmi.uni-sofia.bg