

ЕДНО СВОЙСТВО НА ТОЧКАТА НА ЛЕМОАН

Димитър Белев, Антон Белев, Калоян Буковски

В тази статия сме показали тясната взаимовръзка между педалните и Наполеоновите (обобщени) триъгълници на двойка инверсни точки относно описаната около даден триъгълник окръжност. Доказали сме, че тези триъгълници са хомотетични. В частния случай, когато двойката инверсни точки съвпадат с изодинамичните центрове на дадения триъгълник, център на хомотетиите е точката на Лемоан. Доказали сме някои метрични зависимости, свързващи лицата на Наполеоновите триъгълници, педалните триъгълници и дадения триъгълник.

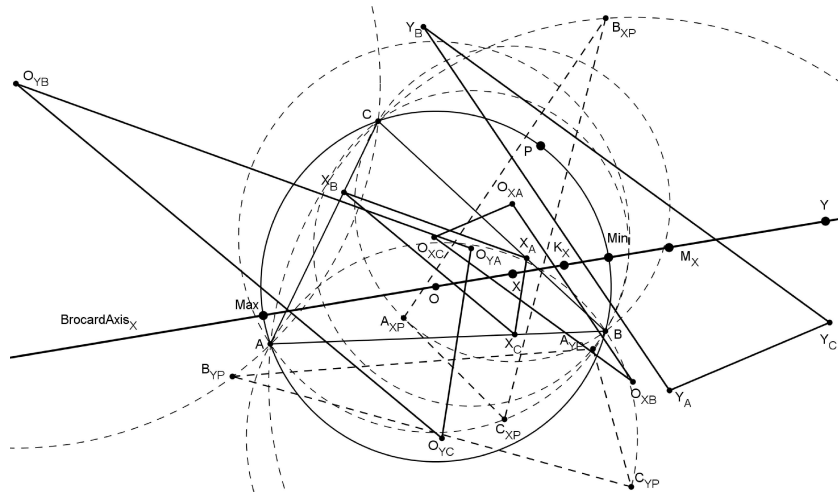
Построение. Нека $k(O, R)$ е описаната около $\triangle ABC$ окръжност (фиг. 1), точките X и Y (X е вътрешна за k) са инверсни относно k , точките $P, Q, T \in k$ и не съвпадат с A, B и C . Изогонално спрегнатите точки на точка P относно триъгълниците ABX , BCX и CAX определят изоогоналния $\triangle A_{XP}B_{XP}C_{XP}$ на точка X (аналогично $\triangle A_{YP}B_{YP}C_{YP}$ за Y) относно $\triangle ABC$ (вж. [1]). Центровете на окръжностите (изоогонални окръжности [1]), върху които лежат върховете на изоогоналните триъгълници, определят Наполеоновия триъгълник $O_{XA}O_{XB}O_{XC}$ на точка X (аналогично $\triangle O_{YA}O_{YB}O_{YC}$ за Y). Построени са и педалните триъгълници $X_AX_BX_C$ и $Y_AY_BY_C$ на X и Y относно $\triangle ABC$. В [1] сме доказали, че всички тези триъгълници са подобни. Сега показваме, че Наполеоновите и педалните триъгълници на точките X и Y са и хомотетични.

Построяваме още: средата M_X на отсечката XY , точка K_X , инверсна на M_X относно k и пресечните точки Min и Max на правата XY (BrocardAxis_X) с окръжността k .

За да намалим препратките, повтаряме някои доказателства от [1].

Нека $P \equiv \text{Min}$, $Q \equiv \text{Max}$ и изоогонално спрегнатите точки на P , Q и T относно $\triangle ABX$ са C_{XP} , C_{XQ} и C_{XT} (фиг. 2). От изоогоналната спрегнатост имаме равенството на ъглите $\angle C_{XP}XC_{XT} = \angle QXD = \angle PXT$ и $\angle C_{XP}AC_{XT} = \angle PAT$, от където и $\angle C_{XP}O_{XC}C_{XT} = \angle POT$ и $\angle XC_{XP}C_{XT} = \angle XPT$. Тогава, $\triangle C_{XT}C_{XP}O_{XC} \sim \triangle PTO$, $\triangle C_{XP}C_{XT}X \sim \triangle PTX$ и аналогично $\triangle C_{XQ}C_{XT}O_{XC} \sim \triangle QTO$, $\triangle C_{XQ}C_{XT}X \sim \triangle QTX$. Следователно са изпълнени $\angle C_{XQ}O_{XC}C_{XT} + \angle C_{XT}O_{XC}C_{XP} = \angle QOT + \angle TOP = 180^\circ$, $\angle C_{XQ}XC_{XT} + \angle C_{XT}XC_{XP} = \angle QXT + \angle TXP = 180^\circ$ и $\frac{XC_{XP}}{XP} = \frac{XC_{XT}}{XT}$ и $\frac{XC_{XQ}}{XQ} = \frac{XC_{XT}}{XT}$, от където и верността на твърденията:

(1) точките C_{XQ} , O_{XC} , X и C_{XP} са колинеарни,



Фиг. 1

$$(2) \quad \frac{XC_{XQ}}{XC_{XP}} = \frac{XQ}{XP}.$$

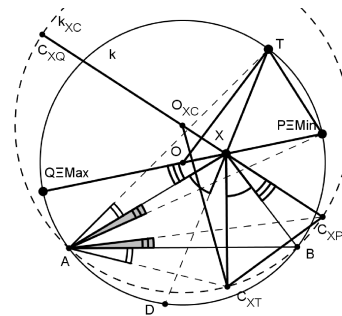
В общия случай, когато точките P и Q не съвпадат с точките Min и Max, прилагаме двукратно направените разсъждения и получаваме равенствата: $PXQ = C_{XP}XC_{XQ} = B_{XP}XB_{XQ} = A_{XP}XA_{XQ}$ и $\frac{XP}{XQ} = \frac{XA_{XP}}{XA_{XQ}} = \frac{XB_{XP}}{XB_{XQ}} = \frac{XC_{XP}}{XC_{XQ}}$ (аналогично за останалите равенства). Това показва, че $\Delta A_{XP}B_{XP}C_{XP}$ се изобразява в $\Delta A_{XQ}B_{XQ}C_{XQ}$ чрез въртяща хомотетия с център точка X , ъгъл на въртене PXQ и коефициент на хомотетия $k = \frac{XP}{XQ}$.

Така доказахме:

Лема 2. (Запазваме номерацията от [1]) *Изогоналните триъгълници на точка X относно ΔABC са подобни. Ако P и Q са точките, чрез които са получени тези изогонални триъгълници, то коефициентът на подобност е $k = \frac{XP}{XQ}$.*

Твърдение 1. Ако $h_X(K_X, k_X)$ ($h_Y(K_Y, k_Y)$) е хомотетията, изобразяваща точка X (Y) в точка O , педалният $\Delta X_A X_B X_C$ ($\Delta Y_A Y_B Y_C$) на точка X (Y) се изобразява в Наполеоновия $\Delta O_Y A O_Y B O_Y C$ ($\Delta O_X A O_X B O_X C$) на точка Y (X) чрез хомотетия h_X (h_Y), като $k_X + k_Y = 2$.

Доказателство. Означаваме $OX = x$, $OY = y$ (Фиг. 3). Понеже $x \cdot y = R^2$ и $K_X O \cdot M_X O = R^2$, то $OM_X = \frac{x+y}{2} = \frac{R^2 + x^2}{2x}$, $K_X O = \frac{R^2}{M_X O} = \frac{2 \cdot x R^2}{R^2 + x^2}$, $K_X X =$



Фиг. 2

$$(3) \quad k_X = \frac{K_X O}{K_X X} = \frac{2R^2}{R^2 - x^2} \text{ и } k_Y = -\frac{K_X O}{K_X Y} = -\frac{2x^2}{R^2 - x^2}$$

Нека точката $P \equiv \text{Min}$ (фиг. 3). Понеже AP е ъглополовяща на $\angle XAY$ и $\angle PAX = \angle C_{XP}AB$, $\angle PAY = \angle C_{YP}AB$ (от изогоналната спрегнатост), то $\angle C_{XP}AB = \angle C_{YP}AB$ и $\angle C_{XP}BA = \angle C_{YP}BA$ (аналогично). Така $\triangle ABC_{XP} \cong \triangle ABC_{YP}$ и правите $O_{XC}C_{XP}$ и $O_{YC}C_{YP}$ са симетрични относно правата AB . Но от (1) $X \in O_{XC}C_{XP}$, $Y \in O_{YC}C_{YP}$ и от успоредността на OO_{YC} и XX_C имаме пропорцията $\frac{OO_{YC}}{2.XX_C} = \frac{OY}{XY}$.

В частния случай, когато точките X и Y съвпадат с изодинамичните центрове ($X \equiv Ap_1, Y \equiv Ap_2$ точки на Аполоний), средата M_X съвпада с точката $X(187)$ (SCHOUTE CENTER, вж. [3]), а точката на Лемоан е инверсна на точката $X(187)$ относно k , т.е. $K_X \equiv K$.

Знаем, че точките O, K, Ap_1, Ap_2 образуват хармонична група (вж. [3]). В общия случай, от равенства (3) получаваме $\frac{K_X X}{K_X Y} = \frac{x^2}{R^2} = \frac{x}{y} = \frac{OX}{OY}$, или:

313

Твърдение 2. Ако точката P съпада с точка Min (Max), то страните на изогоналните триъгълници на точките X и Y са най-малки (най-големи) и са равни на разликата (сбора) на съответните страни на Наполеоновите триъгълници на X и Y .

Нека точката $Q \equiv \text{Max}$ и изогонално спрегнатата ѝ точка относно ΔABX е C_{XQ} (фиг. 3). Точките C_{XQ} , O_{XC} , X и C_{XP} са колинеарни и $\frac{XC_{XQ}}{XC_{XP}} = \frac{XQ}{XP}$ (от (1) и (2)). Следователно $\frac{2R_{XC}}{XC_{XP}} = \frac{2R}{XP}$ (R_{XC} е радиуса на изогоналната окръжност k_{XC}), от където и пропорцията $\frac{XO_{XC}}{XC_{XP}} = \frac{XO}{XP}$. Това показва, че точката C_{XP} се изобразява в точка O_{XC} чрез хомететията $h_1(X, k_1)$. Доказателството е също и за останалите двойки върхове. Така $h_1(\Delta A_{XP}B_{XP}C_{XP}) = \Delta O_{XA}O_{XB}O_{XC}$ и аналогично $h_2(\Delta A_{YP}B_{YP}C_{YP}) = \Delta O_{YA}O_{YB}O_{YC}$, а това ни дава равенствата $\frac{a_X}{a_{\text{Min}}} = |k_1| = \frac{XO}{XP} = \frac{x}{R-x}$ и $\frac{a_Y}{a_{\text{Min}}} = k_2 = \frac{YO}{YP} = \frac{y}{y-R} = \frac{R}{R-x}$ т.е.,

314

Ако от второто равенство на (4) извадим почленно първото, имаме $\frac{a_Y}{a_{\text{Min}}} - \frac{a_X}{a_{\text{Min}}} = 1$. Или:

$$(5) \quad a_{\text{Min}} = a_Y - a_X \text{ и } a_{\text{Max}} = a_Y + a_X \text{ (след аналогично доказателство).}$$

Нека точката $P \equiv \text{Min}$, точката $Q \in k$ и не съвпада с A, B и C . От Лема 2 имаме, че изогоналните триъгълници $A_{XP}B_{XP}C_{XP}$ и $A_{XQ}B_{XQ}C_{XQ}$ са подобни с коефициент на подобност $k = \frac{XP}{XQ}$. Но $XP \leq XQ$ за всяка точка $Q \in k$ и следователно страните на изогоналния триъгълник $A_{XP}B_{XP}C_{XP}$ са най-малки (аналогично – най-големи, когато P съвпада с точка Max). Твърдението е доказано.

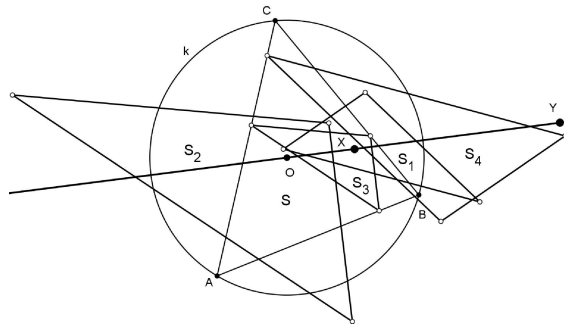
Ако разделим почленно равенства (4), получаваме отношението

$$(6) \quad \frac{a_X}{a_Y} = \frac{x}{R} = \sqrt{\frac{OX}{OY}}.$$

Следствие 1. Коефициентът на подобност на Наполеоновите триъгълници на точките X и Y е $\frac{a_X}{a_Y} = \sqrt{\frac{OX}{OY}}$.

Следствие 2. Коефициентът на подобност на класическите Наполеонов триъгълници е $\frac{a_X}{a_Y} = \sqrt{\frac{OAp_1}{OAp_2}}$, където точките Ap_1 и Ap_2 са изодинамичните центрове на ΔABC .

Въвеждаме още няколко означения: $k = \frac{x}{R}$, S – лицето на ΔABC (фиг. 5), S_1 и S_2 – лицата на Наполеоновите триъгълници на точките X и Y (вътрешен и външен), S_3 и S_4 – лицата на педалните триъгълници на точките X и Y (вътрешен и външен).



Фиг. 5

Лицето на педалния триъгълник на точка X (вътрешна за окръжността k) се дава от формулата $S_3 = \frac{R^2 - x^2}{4R^2} S$ (вж. [4], [5]). Като заместим $\frac{x}{R}$ с k имаме $S_3 = \frac{1 - k^2}{4} S$. Наполеоновите и педалните триъгълници на точките X и Y са подобни и формули (3) и (6) ни дават коефициентите на подобност на съответните двойки триъгълници. Да пресметнем останалите лица.

$$\text{От (3)} \quad S_2 = k_X^2 S_3 = \left(\frac{2R^2}{R^2 - x^2} \right)^2 S_3 = \frac{4}{(1 - k^2)^2} \frac{1 - k^2}{4} S = \frac{1}{1 - k^2} S.$$

$$\text{От (6)} \quad S_1 = \left(\frac{x}{R} \right)^2 S_2 = \frac{k^2}{1 - k^2} S.$$

$$\text{От (3)} \quad S_4 = \frac{1}{k_Y^2} S_1 = \left(\frac{R^2 - x^2}{2x^2} \right)^2 S_1 = \frac{(1 - k^2)^2}{4k^2} \frac{1}{1 - k^2} S = \frac{1 - k^2}{4k^2} S.$$

Така при направените означения докажем:

Твърдение 3. Лицата на Наполеоновите и педалните триъгълници на точките X и Y се дават от формулите:

$$(7) \quad S_1 = \frac{k^2}{1-k^2}S, \quad S_2 = \frac{1}{1-k^2}S, \quad S_3 = \frac{1-k^2}{4}S, \quad S_4 = \frac{1-k^2}{4k^2}S.$$

Ето някои твърдения, които следват веднага от формули (7).

Следствие 1. Наполеоновите триъгълници на точки, лежащи на окръжност, концентрична на окръжността k , имат равни лица¹.

Следствие 2. В сила са следните зависимости между лицата на Наполеоновите² и педалните триъгълници на точките X и Y и лицето на $\triangle ABC$:

$$(8) \quad S_2 - S_1 = S, \quad \frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} = \frac{4}{S}, \quad S_1S_4 = S_2S_3 = \frac{S^2}{4} \quad (\text{или} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = k^2).$$

Ако отчетем, че триъгълниците $O_{XA}O_{XB}O_{XC}$ и $Y_A Y_B Y_C$ са обратно ориентирани, то формулите (8) можем да преобразуваме така:

$$(9) \quad \frac{S_2 + S_1}{2} = \frac{S}{2}, \quad \frac{2S_3S_4}{S_3 + S_4} = \frac{S}{2}, \quad \sqrt{|S_1S_4|} = \sqrt{|S_2S_3|} = \frac{S}{2}.$$

Тези формули показват, че половината от лицето на $\triangle ABC$ е средно аритметично на ориентираните лица на Наполеоновите триъгълници на точките X и Y , средно хармонично на ориентираните лица на педалните триъгълници на точките X и Y и средно геометрично на „смесените двойки“ лица.

Означаваме с S_{Min} и S_{Max} най-малкото и най-голямото лице на изогоналните триъгълници. От равенства (5) и (6) получаваме, че $a_{\text{Min}} = (1-k)a_Y$ и, следователно, $S_{\text{Min}} = (1-k)^2 S_2 = (1-k)^2 \frac{1}{1-k^2} S = \frac{1-k}{1+k} S$.

Следствие 3. Най-малкото и най-голямото лице на изогоналните триъгълници на точките X и Y се дават от формулите:

$$(10) \quad S_{\text{Min}} = \frac{1-k}{1+k} S \quad \text{и} \quad S_{\text{Max}} = \frac{1+k}{1-k} S \quad (\text{след аналогични изчисления}).$$

Лесно се вижда и равенството $S_{\text{Min}} S_{\text{Max}} = S^2$.

Има ли точки, чиито педален и Наполеонов триъгълник са еднакви? Отговор дават равенствата (7). Приравняваме S_1 и S_3 (от трето равенство на (8) виждаме, че $S_1 = S_3 \Leftrightarrow S_2 = S_4$) и получаваме уравнението $\frac{k^2}{1-k^2} S = \frac{1-k^2}{4} S$. Корените му са $k_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1$, или $OX = (\sqrt{2} - 1) R$ и $OY = (\sqrt{2} + 1) R$ (очевидно е изпълнено $OX \cdot OY = R^2$).

Следствие 4. Множеството от точки, чиито педален и Наполеонов триъгълник са еднакви, е две концентрични на k окръжности с радиуси, равни³ на $(\sqrt{2} \pm 1) R$.

¹И педалните им триъгълници имат равни лица. Виж също [4], стр.140

²Първата формула е известно свойство на класическите Наполеонов триъгълници (вж. [2]). Тук виждаме, че тя е вярна и за обобщените Наполеонов триъгълници.

³Константата $\delta_S = \sqrt{2} + 1$ е по-малко известното сребърно сечение. Още $\frac{1}{\delta_S} = \sqrt{2} - 1$ (вж. [6] и [7]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. БЕЛЕВ, К. БУКОВСКИ, Д. БЕЛЕВ. Едно ново семейство триъгълници, *Математика*, **6** (2011).
- [2] H. S. M. COXETER, S. L. GREITZER. *Geometry Revisited*, Toronto – New York, 1967.
- [3] C. KIMBERLING. *Encyclopedia of Triangle Centers*,
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [4] R. A. JOHNSON. *Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, Boston, MA: Houghton Mifflin, 1929, 139–141.
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html>
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio
- [7] <http://mathworld.wolfram.com/SilverRatio.html>

Димитър Андонов Белев
ж.к. „Овча Купел 2“, бл. 23, вх. В
1632 София, България
e-mail: dbelev@gbg.bg

Антон Димитров Белев
Block C2 Room 3
Firhill Court
150, Firhill Road
Glasgow, G20 7BB
United Kingdom
e-mail: antonbelev@abv.bg

Калоян Пламенов Буковски
5/1 Hermit's Croft
Hermit's Croft
Edinburgh, EH8 9RG
United Kingdom
e-mail: k.bucovsky@gmail.com

ONE PROPERTY OF THE SYMMEDIAN POINT

Dimitar Belev, Anton Belev, Kaloyan Bukovski

In this article we present a strong connection between the pedal and the (generalized) Napoleon triangles of a pair of inverse points with respect to the circumcircle of a given triangle. We prove that these triangles are homothetic. In the particular case when the pair of inverse points in hand coincides with the Isodynamic centres of the triangle, the homothetic centre appears to be the Lemoine point. We also prove several metric connections which give relations between the areas of the Napoleon triangles, the pedal triangles and the reference triangle.