

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2012
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2012
*Proceedings of the Forty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 9–12, 2012*

**НЯКОИ ПОДХОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЛОГИЧЕСКИ
ЗАДАЧИ ОТ ТИП ТРИЧЛЕННА РЕЛАЦИЯ**

Камелия Колева

Решаването на логически задачи е едно от възможните приложения на синергетичния модел на образование за обучение на активни, творчески личности, отворени към себе си, към другите хора и към света. С цел подпомагане на класификацията на логическите задачи и съответно по-лесното им решаване се разглеждат някои подходи за решаване на такива от тип тричленна релация. Разработката е естествено продължение на статия за моделиране на логически задачи от тип двучленна релация.

I. Увод. Синергетичният модел на образование е една от перспективните иновационни технологии. Синергетиката разкрива общите принципи при процесите на самоорганизация и развитие в отворени, нелинейни и далече от равновесието системи, без значение на конкретната природа на елементите им. Такава е и цялата система на образование. Както посочва Е. Н. Князева „Синергетичният подход към образованието се основава на стимулиращо или пробуждащо образование към откриване на себе си или сътрудничество със себе си и с другите хора.” [4]. За да се превърнат обучаемите в активни, творчески личности е нужно образованието да бъде насочено към самообразование, в контекста на синергетичния подход.

Синергетиката, като междудисциплинарно направление, се намира в непрекъснат творчески диалог с другите науки. Едно възможно приложение на синергетични идеи е при решаване на логически задачи по математика. *На първо място*, те са твърде нестандартни и различни от задачите в училищния курс по математика, като провокират процеси на самоорганизация и хаос в обучаемия с цел търсене на непознати (нестандартни) начини за решаването им и преминаване към ред. *На второ място*, логическите задачи представят в условието си реални житейски ситуации, с което дават възможност да се развие синергетичната представа за отвореност на света, взаимовръзка между човека, природата и обществото. *На трето място*, за тяхното решаване са нужни предимно логическо мислене, досетливост, изобретателност и в много малка степен – използването на конкретни математически познания (решаване на уравнения, системи и др.). Това води до пробуждане на творческите сили и възможности на ученика, до активиране на евристичното му мислене, търсене на съвместна творческа дейност с учителя и с другите ученици. Последното е проявление на синергетичните идеи за сътрудничество, личностната неповторимост на обучаемия, както и за новата роля на преподавателя, ориентирана към подпомагане на процеса на обучение.

Актуалността на темата за логическите задачи произтича и от факта, че те намират място не само в математическите състезания и олимпиади, те се срещат в тестовите по математика за кандидатстване след 7 клас до 2009 г. включително.

Важен момент при решаването на логически задачи е тяхната класификация. На пръв поглед всяка такава задача изисква собствен начин за решаване и ако ученикът не разсъждава в правилната посока, би могъл да изпадне в „пълнен хаос“ при нейното решаване. Нужни са *критерии-ориентир*, които да подпомогнат обучаемия при решаването на задачата (намаляване на хаоса и преход към ред). А критериите са тясно свързани с класификацията на логическите задачи. Трудността на последната е обусловена от голямото разнообразие на логическите задачи, както и от факта, че няма точна дефиниция коя задача е логическа. Според известният американски математик Мартин Гарднер „логически са тези главоблъсканици (задачи), които изискват само умения за логическо мислене, но не изискват аритметични изчисления“ [3].

Считаме, че подходящ критерий за класифициране на логическите задачи е използваният математически апарат, който в една или в друга степен присъства в условието и в решението на задачата. Смятаме, че е уместно класифицирането да бъде тясно свързано с определен модел, който използваме за решаване на логическата задача.

Голям дял от логическите задачи заемат тези от тип релация. В [5] е описан модел за решаване на логически задачи от тип двучленна релация. Той включва използването на математически понятия и твърдения за съкратено записване на условието, за записване на последователността от логически разсъждения при решаването и илюстрирането му чрез чертеж, таблица, граф или др. и най-накрая за записване на отговора на задачата. В [6] е представен модел за решаване на логически задачи от тип n -членна релация при $n \geq 4$. В настоящия доклад разглеждаме логически задачи от тип тричленна релация и свеждаме решаването им до представения в [5] модел за решаване на задачи от тип двучленна релация. Този модел не може да се пренесе буквално – той се усложнява поради увеличаване на броя на множествата, на техните елементи и на условията в задачата. На тази основа се усложнява и начинът за определяне на съответствията между елементите на трите множества. Освен това тричленната релация изисква и по-сложно илюстриране – чрез таблица с три измерения или чрез триделен граф.

II. Логически задачи от тип тричленна релация. Под тричленна релация разбираме всяко подмножество R на декартовото произведение $A \times B \times C$ на три дадени множества A , B и C .

При анализа на условието на логическите задачи от тип тричленна релация откриваме три множества (например множество от хора, множество от професии, множество от спортове и др.), най-често равномошни. Както при логическите задачи от тип двучленна релация, дадени са условия, определящи отношения между елементите на трите множества, най-често между двойка от тях (например кой човек каква професия упражнява, коя професия с кой спорт е свързана и т.н.). Повечето от условията можем да обособим в две групи: *условие-съответствие*, което определя, че между два елемента съществува връзка и *условие-забрана*, което носи информация, че даден елемент от едното множество не може да бъде свързан с елемент от друго множество. На базата на тези условия се търси определена

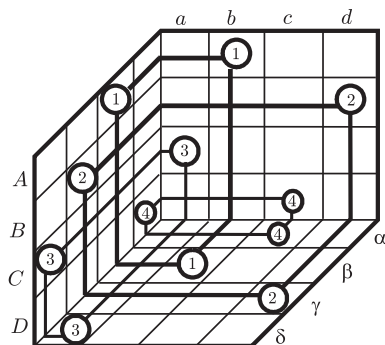
релация над трите множества такава, че във всяка наредена тройка да участва по един елемент от всяко множество. Намерените тройки елементи не трябва да имат противоречие с условието на задачата.

Преди да разгледаме конкретни логически задачи от тип тричленна релация, да се спрем на описанието на общия подход за решаването им. Уточняваме, че той се отнася за задачи от посочения тип, които отговарят на следните изисквания:

- 1) съдържат три различни равномошни множества;
- 2) условията на задачата са достатъчни, за да се установи взаимно-еднозначно съответствие между трите множества;
- 3) условията на задачата да могат да се „преведат“ в условия-съответствия и/или условия-забрани.

Логическите задачи, отговарящи на горните три изисквания, са най-често срещани. За краткост ще ги наричаме **задачи от тип (1:1:1)**.

Нека в условията на задача от тип 1:1:1 имаме три множества, например $M = \{A, B, C, D\}$, $P = \{a, b, c, d\}$ и $L = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Нека след решаване на задачата търсената релация R има вида $R = \{(A, b, \beta), (B, d, \gamma), (C, a, \delta), (D, c, \alpha)\}$. По аналогия със задачите от тип двучленна релация, при които използвахме двумерна таблица за илюстриране на решението, тук използваме тримерна таблица (фиг. 1), в която наредените тройки, елементи на R , са номерирани съответно от 1 до 4.

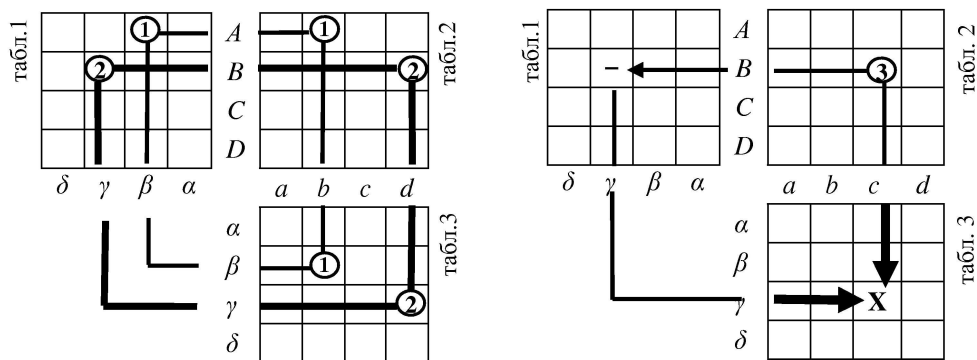


Фиг. 1. Представяне на тричленната релация $R = \{(A, b, \beta), (B, d, \gamma), (C, a, \delta), (D, c, \alpha)\}$ с тримерна таблица

конкретно, за нашия пример на фиг. 2 имаме: кръгче с номер в таблица 1 представя връзката между двойка елементи на множествата M и L ; съответно кръгче в таблица 2 – връзка между елементите на M и P и кръгче в таблица 3 – връзката между елементи на P и L .

При решаването на логически задачи от тип 1:1:1 чрез таблици използваме **правило на съответствието** (*правило на затворения контур*) [1]. То се състои в следното: при използването на три двумерни таблици за представяне на тричленната релация (фиг. 2), трябва всяка двумерна таблица, представяща връзката между елементите на двойка множества, да се свърже и с третото множество. Тази роля се изпълнява от специални линии, които се наричат **указатели на съответствието** [1]. За релацията R , илюстрирана на фиг. 2, **правило на съответствието**

Разбира се, чертането на тримерна таблица е по-трудно и затова я разбиваме на три двумерни таблици, всяка от които представя съответствието между двойка множества (Фиг. 2) и в същото време трите таблици са така начертани, че да са в неделимо цяло. По този начин илюстрираме как логическа задача от тип (1:1:1) се свежда до три логически задачи от тип двучленна релация, а тяхното решаване вече разгледахме в [5]. Вижда се, че всяка наредена тройка се изобразява с три кръгчета с един и същи номер – по едно във всяка таблица. Всяко кръгче представя съответствието между елементите на двойка множества и в този смисъл можем да го наречем частично решение (като част от наредена тройка). По-



Фиг. 2. Разбиване на тримерната таблица от фиг. 1 на три двумерни таблици (за прегледност сме представили само първите две наредени тройки на R)

Фиг. 3. Правило за пренасяне на забрана

изглежда така:

- за връзка между таблица 1 и елементите на множеството P се използват хоризонтални линии – **хоризонтални указатели на съответствието** между кръгчетата с един и същи номер;
- за връзка между таблица 2 и елементите на множеството L се използват аналогично **вертикални указатели на съответствието**;
- за връзка между таблица 3 и елементите на множеството M се използва двойка свързани линии, получени от успоредното пренасяне на **хоризонтален и вертикален указател на съответствието** между кръгчетата с един и същи номер. Можем да го наречем **ъглов указател на съответствието**.

Така, като начертаем в съвкупност хоризонтален, вертикален и ъглов указател между три кръгчета с един и същи номер от трите таблици, получаваме правоъгълник (затворен контур). Последният дава връзката между трите таблици (елементите на трите множества в задачата).

Друго правило, което използваме при решаване на логически задачи от тип (1:1:1) се състои в следното: когато в една от двумерните таблици сме определили връзка между двойка елементи (кръгче с номер) и свързвайки го с указател на съответствието със забранена клетка в съседна таблица (със знак „–“ в нея), то клетката в третата таблица, в която се пресичат указателите на съответствието, излизащи от клетката с кръгче и клетката със забрана, е също под забрана. По друг начин казано, в нея е невъзможно да има кръгче с номер (т.е. съответствие) и тогава нанасяме в нея друг знак за забрана, например „X“. Това правило наричаме правило за пренасяне на забрана. Последното произтича от правилото за логически извод: например, на фиг. 3 ако елементът B е в релация с елемента c (кръгче с номер 3 в клетка от таблица 2) и елементът B не е в релация с елемента γ (знак „–“ в клетка от таблица 1), то следва, че елементът c не е в релация с елемента γ (знак „X“ в клетка на таблица 3).

Чрез следващата задача илюстрираме прилагането на описания по-горе подход при решаване на **логически задачи от тип (1:1:1)**.

Задача 1. Петър, Иван и Стоян участвали в състезание по един от спортовете: плуване, бягане или скачане. Те заели първо, второ или трето място.

Плувецът се класирал трети. (1)

Скачачът не бил втори и не се казвал Иван. (2)

Стоян не тренира бягане и не се класирал първи. (3)

Какъв вид спорт тренира всяко от момчетата и на кое място се е класирало всяко от тях?

Решение. Тази задача се моделира с тричленна релация R , $R \subseteq A \times B \times C$, където $A = \{П, И, С\}$ е множеството на момчетата, $B = \{пл, б, ск\}$ е множеството на спортовете и $C = \{I, II, III\}$ е множеството на заетите места. Разполагаме елементите им в три двумерни таблици, както на фиг. 4. Трите условия на задачата ги преобразуваме в следните по-подробни условия–съответствия и условия–забрани:

(1) Плувецът се класирал трети; (2₁) Скачачът не е втори; (2₂) Скачачът не е Иван; (3₁) Стоян не тренира бягане; (3₂) Стоян не е на първо място.

От условието (1) нанасяме кръгче с номер 1 в клетка (III, пл) на таблица 3 (Фиг. 4), като част от първата наредена тройка. Допълваме съответния ред и колона на попълнената клетка със знаци „–“. Нанасяме знак „–“ според условията–забрани (2₁), (2₂), (3₁) и (3₂) съответно в клетките (II, ск) на таблица 3, (И, ск) и (С, б) на таблица 2 и (С, I) на таблица 1*. В таблица 3 на фиг. 4 след поставените знаци за забрана до момента нанасяме кръгчета с номер 2 в клетка (I, ск) и с номер 3 в клетка (II, б), като част от втора и трета наредена тройка съответно. Третата таблица, даваща съответствието между множеството на спортовете и множеството на местата е изцяло попълнена. Оттук нататък получените кръгчета в нея трябва да намерят съответните си „събратя“ по номер и място в таблици 1 и 2. Чрез *правилото за пренасяне на забрана* нанасяме знак „X“ в следните клетки:

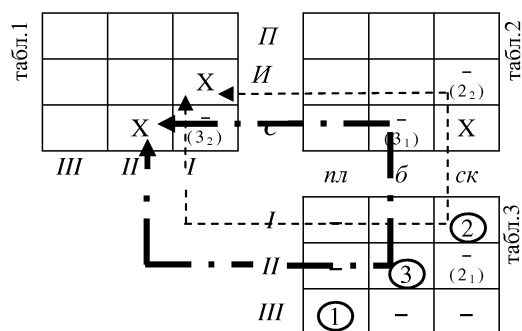
– (И, I) на първа таблица, получаващо се от свързването на второ частично решение в таблица 3 с клетката със забрана (2₂) на таблица 2 (изобразено на фиг. 4 със затворен контур с прекъсната линия);

– (С, ск) на втора таблица, получаващо се от свързването на второ частично решение в таблица 3 с клетката със забрана (3₂) на таблица 1 (изобразено на фиг. 5 със затворен контур с прекъсната линия);

– (С, II) на първа таблица, получаващо се от свързването на трето частично решение в таблица 3 с клетката със забрана (3₁) на таблица 2 (изобразено на фиг. 4 със затворен контур с дебела прекъсвана с точки линия).

Очевидно е, че за второто частично решение, представено в таблица 2 на Фиг. 5, остава единствена възможност да бъде в клетка (II, ск) – нанасяме в нея кръгче с номер 2 и допълваме реда ѝ със знаци „–“. В същата таблица излиза, че третото частично решение може да бъде само в клетка (И, б) и първото частично решение съответно в клетка (С, пл) (пренасяме ги по *вертикалните указатели на съответствието* между таблици 2 и 3). Пренасяйки кръгчетата на частичните решения от таблица 2 в таблица 1 (фиг. 5), съгласно правилото на съответствието се вижда, че първото частично решение може да бъде единствено в клетка (С, III) (допълваме

*За по-голяма яснота в съответните клетки със знак „–“, съгласно условията–забрани, сме поставили и номерата на условията.



Фиг. 4. Представяне на правилото за пренасяне на забрана за Задача 1

колоната ѝ със знаци „-“, третото – в клетка (I, II) и за второто остава в клетка (II, I) .

Окончателно, решението на задачата е: $R = \{(II, ск, I), (II, б, II), (C, нл, III)\}$.

Предложеният от нас подход за решаване не е универсален, поради голямото разнообразие на задачи от тип тричленна релация (1:1:1). Освен това за някои задачи той може да се окаже и по-сложен. Поради това предлагаме и друг подход за решаване в следващата задача, като основната разлика произтича от структурата на използваната таблица. Той е един от предпочитаните начини за решаване на подобни задачи в [2].

Задача 2. Мария, Лили, Катя и Живка свирят на различни инструменти – пиано, китара, цигулка и виолончело. Всяка от тях владее и по един чужд език – немски, френски, английски и испански. Известно е, че:

Момичето, което свири на китара, владее испански. (1)

Лили не свири на цигулка и на виолончело и не владее английски език. (2)

Мария не знае английски и немски език, но не свири и на виолончело. (3)

Живка знае френски език и не свири на цигулка. (4)

На какъв инструмент свири всяко момиче и какъв език знае?

Решение. При тази задача се използва тричленната релация R , $R \subseteq A \times B \times C$, където $A = \{M, L, K, J\}$ е множеството на момичетата, $B = \{н, к, ц, в\}$ е множеството на инструментите и $C = \{н, ф, а, и\}$ е множеството на езиците.

Условията на задачата преобразуваме в следните по-подробни условия–съответствия и условия–забрани:

(1) Китарата и испанския език са в комбинация.

От условието (2) получаваме три подусловия–забрани: (2₁) Лили не свири на цигулка; (2₂) Лили не свири на виолончело; (2₃) Лили не владее английски език.

Условията (3) и (4) се разпадат също на няколко подусловия: (3₁) Мария не знае английски език; (3₂) Мария не знае немски език; (3₃) Мария не свири на виолончело; (4₁) Живка знае френски език; (4₂) Живка не свири на цигулка.

Използваме двумерна таблица – Таблица 1, в редовете на която нанасяме елементите на множеството A , а в стълбовете първо нанасяме елементите на множеството B (сектор на инструментите), а след това и тези на множеството C (сектор на езиците). Изборът за нанасяне на децата по редове е обусловен от условията на

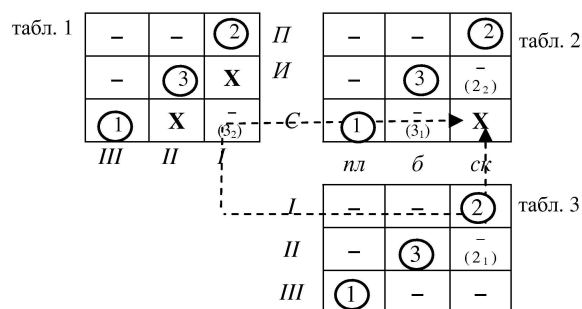
задачата, които съдържат най-много информация за съответствията между множеството на децата и другите две множества.

В клетка от таблицата нанасяме „+“, ако съответното дете свири на даден инструмент или владее даден език и „-“ ако не свири на определен инструмент или не знае даден чужд език. Съобразно избрания начин за илюстриране на релацията, след като я решим, във всеки ред на таблицата ще има по 2 знака „+“, по един във всеки от секторите на таблицата за езиците и инструментите (всяко дете знае 1 език и свири на един инструмент), а във всеки стълб по 1 знак „+“ (всяко дете владее точно един език и свири точно на един инструмент).

Таблица 1. Представяне на решението на Задача 2

деча	инструменти				езици			
	<i>n</i>	<i>κ</i>	<i>ц</i>	<i>в</i>	<i>н</i>	<i>ф</i>	<i>а</i>	<i>и</i>
<i>M</i>	-	+	-	- (3 ₃)	- (3 ₂)	-	- (3 ₁)	+
<i>L</i>	+	-	- (2 ₁)	- (2 ₂)	+	-	- (2 ₃)	-
<i>K</i>	-	-	+	-	-	-	+	-
<i>J</i>	-	-	- (4 ₂)	+	-	+	-	-

От условието (1) засега не можем да отбележим нищо в таблицата, тъй като тя не ни дава пряката връзка между множествата *B* и *C*. Нанасяме знак „-“ в съответните клетки, съгласно условията-забрани: (2₁), (2₂), (2₃), (3₁), (3₂), (3₃) и (4₂). От (4₁) нанасяме „+“ в клетката (*J*, *ф*) и допълваме със знаци „-“ клетките в стълба с надпис „*ф*“ и в реда на Живка в сектора на таблицата за езиците. От таблицата веднага се вижда, че Мария знае испански (нанасяме „+“ в клетката (*M*, *и*)). Последното в комбинация с условието (1) означава, че Мария е момичето, което свири на китара („+“ в клетката (*M*, *κ*)). Нанасяме знаци „-“ в клетките по реда на Мария и в стълбовете с надписи „*κ*“ и „*и*“. От реда на Лили веднага се вижда, че тя свири на пиано и знае немски (нанасяме „+“ в съответните стълбове по реда на



Фиг. 5. Представяне на решението на Задача 1

Лили и после ги допълваме с “–”). От стълба „ц“ веднага се вижда, че на цигулка свири Катя и отчитайки знаците по реда ѝ остава единствената възможност да знае английски. За Живка остава единствената възможност да свири на виолончело.

Тогава решението на задачата е: $R = \{(M, к, и), (Л, п, н), (К, ц, а), (Ж, в, ф)\}$.

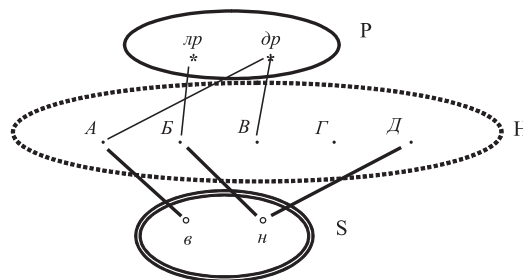
Задача 3. Един баскетболен отбор включва следните петима играчи: Анатоли, Бисер, Валентин, Георги и Дилиян. Един от тях играе като център. Известно е, че двама от тях стрелят с лявата ръка, а другите трима – с дясната (1). Двама са високи над 2 м., останалите са по-ниски (2). И още: Анатоли и Валентин стрелят с една и съща ръка (3), а Георги и Дилиян – с различни ръце (4); Бисер и Дилиян са от една и съща група според височината си (5), докато Валентин и Георги са от различни групи (6). И накрая, знае се, че играчът, който играе център, е висок и стреля с лявата ръка (7). Кой е той?

Решение. Означаваме с $P = \{A, B, B, Г, Д\}$ множеството на играчите, с $H = \{лр, др\}$ – множеството на ръцита, с които стрелят и с $S = \{в, н\}$ – множеството на ръста им. Вижда се, че задачата не е от тип (1:1:1), тъй като множествата не са равномошни и посоченият по-горе подход за решаването ѝ чрез таблици не е подходящ. Удобно е за илюстриране на решението на задачата да използваме триделен граф (фиг. 6) за представяне на тричленната релация $R \subseteq P \times H \times S$.

От съвместното тълкуване на условията (1) и (3), ако допуснем, че Анатоли и Валентин стрелят с лявата ръка, ще стигнем до противоречие с (4), т.е. ще излезе, че Георги и Дилиян стрелят с дясната ръка. Следователно A и B стрелят с дясна ръка и отбелязваме този факт с плътна линия (ребро за графа) от техните имена към елемента „др“ от множеството P .

От (4) следва, че Бисер стреля с лява ръка и свързваме с плътна линия елемента „Б“ от множеството H и елемента „лр“ от множеството P на графа.

Аналогично от съвместното тълкуване на условията (2) и (5) стигаме до извода, че B и $Д$ са ниски, защото в противен случай стигаме до противоречие с (6) (отбелязваме съответните плътни линии между елементите на множествата H и S). От (6) следва, че A е висок (чертаем ребро между съответните елементи в графа).



Фиг. 6. Представяне на решението на Задача 3 чрез граф

Като направим анализ върху графа, съгласно условието (7) ще получим, че **решението на задачата е Георги**, съгласно метода на изключването: не е A , тъй като стреля с дясна ръка, не е B (нисък), не е $В$ (дясна ръка), не е $Д$ (нисък).

Изводи. Подобно на логическите задачи от тип двучленна релация, и тези от тип тричленна релация ни заливат с неизчерпаемостта си разнообразие. Освен това подходите за тяхното решаване със сигурност се усложняват поради увеличаване на броя на множествата, броя на елементите, а оттам и условията на задачите. По тези причини, а и поради особено естество на логическите задачи въобще, предложените от нас подходи тук са „светлинки в тунела“. Но при всички положения, последните дават възможност за по-добра ориентация в типа на логическите задачи

и, разбира се, в тяхното решаване. А добиването на повече „светлинки“ води до усъвършенстване, до „по-добро придвижване в тунела“ и в крайна сметка до „излизане от него“. В контекста на синергетиката, предложените тук знания за логическите задачи от тип тричленна релация биха подпомогнали самоорганизацията на обучаемия и съответно по-лесното насочване към правилното разклонение в момент на бифуркация, или накратко, по-бързия преход от състояние на хаос към състояние на подредба.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Бизам, Я. Герцег. Игра и логика, 85 логических задач, Мир, М., 1975.
- [2] О. Б. Богомолова. Логические задачи. Бином, М., 2006.
- [3] М. ГАРДНЕР. Математические головоломки и развлечения. Мир, Москва, 1999.
- [4] Е. Н. КНЯЗЕВА. Научись учиться. *Мост*, (2001) № 44, 52–53, № 45, 38–40.
- [5] К. КОЛЕВА, В. БАКОЕВ. Един модел за решаване на логически задачи от тип двучленна релация, *Математика и информатика*, **6** (2011).
- [6] К. КОЛЕВА. Модел за решаване на логически задачи от тип n -членна релация при $n \geq 4$, *Сб. доклади от Годишна научна конференция на НВУ „Васил Левски“*, **2** (2010), 7–21.

Камелия Колева
Катедра Природо-математически науки
Факултет Общовойсков
Национален Военен Университет „Васил Левски“
Велико Търново
e-mail: kameliabk@abv.bg

SOME APPROACHES FOR SOLVING LOGICAL PROBLEMS OF TYPE TERNARY RELATION

Kameliya Bojidarova Koleva

Solving logical problems is one of the possible applications of synergetic model in education for training active and creative personalities, open to themselves to the others and to the world. In order to support the classification of logical problems and thus to facilitate their solution, some approaches for solving such problems of type ternary relation are discussed. This report is a natural continuation of an article for modeling logical problems of type binary relation.